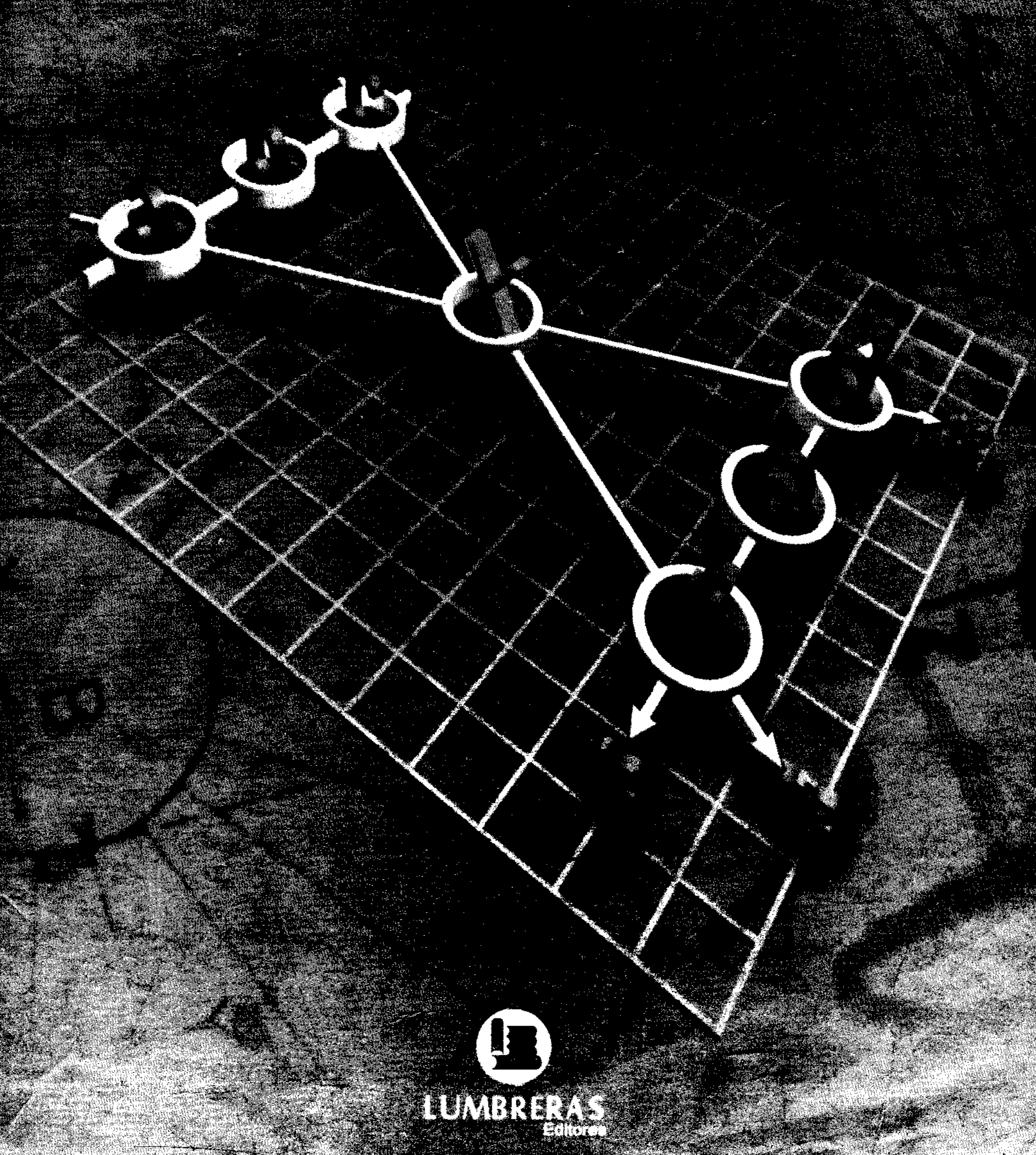
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

PROPEDÉUTICA PARA LAS CIENCIAS



LUMBRERAS
Editores

INTRODUCCIÓN

Desde su aparición, el hombre ha luchado por su existencia, de manera grupal, en un medio ambiente que le resultaba hostil. Esto le permitió razonar sobre los fenómenos naturales, sociales y del pensamiento, que junto con la práctica cotidiana lo impulsaron a estructurar diversas ciencias, una de las cuales es la matemática.

La Matemática es una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.

El vocablo razonamiento proviene del verbo **razonar** que significa discurrir ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión, mientras que **matemático** es todo aquello perteneciente o relacionado con el cálculo numérico. De esta manera, podemos afirmar que Razonamiento Matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de las personas.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, Propedéutica para las ciencias es un libro que surge de la necesidad de los docentes y el educando de nuestra patria, por contar con un texto que conjugue lo didáctico con el rigor matemático.

Respecto al contenido, cada capítulo se inicia con un marco teórico expuesto de manera clara y amplia, que luego es aplicado en la práctica a través de problemas resueltos y propuestos que no solo permiten desarrollar las capacidades, sino también afianzar los conceptos aprendidos y disipar las dudas.

En el primero, se presenta una breve reseña histórica de los orígenes de la matemática y en los capítulos restantes se desarrolla de forma sustancial los Razonamientos Aritmético, Algebraico y Geométrico.

En suma, el presente libro de divulgación trata variados tópicos de Matemática y cubre diversos niveles de la educación. Está dirigido a los estudiantes del nivel secundario, como texto de consulta; a los estudiantes preuniversitarios, como libro básico que desarrolla los contenidos de los principales prospectos de examen de admisión y a todo aquel que muestre interés por conocer los fundamentos de la matemática. Sin embargo, no se trata de una obra acabada, conforme transcurra el tiempo y se logren nuevos conocimientos este libro seguirá mejorando. Desde ya agradecemos nos hagan llegar sus observaciones y sugerencias.

Índice . . .

CAPÍTULO VIII

Cronometría

291
Página

CAPÍTULO IX

Fracciones

333
Página

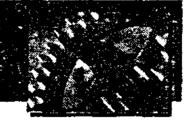
CAPÍTULO X

El Tanto por Cuanto

391
Página

CAPÍTULO XI

Comparación de Magnitudes



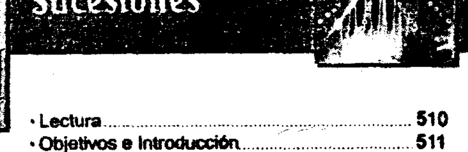
437
Página

CAPÍTULO XII

Operaciones Matemáticas

469
Página

CAPÍTULO XIII



Sucesiones

509
Página

CAPÍTULO XIV

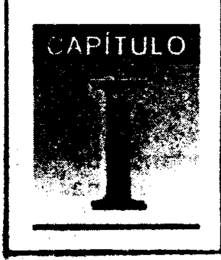
Series y Sumatorias

563
Página

CAPÍTULO XV

Conteo de Figuras

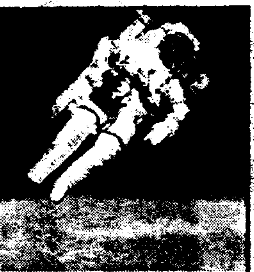
607
Página



INTRODUCCIÓN

La matemática ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las tecnologías creadas por el hombre a lo largo de toda su existencia. Dicho desarrollo tecnológico ha tenido y tiene manifestaciones importantes en el ámbito educativo a lo largo de la historia humana.

La importancia de los Números en la Vida Humana



El avance de la ciencia impulsada por la Matemática, llevó al hombre al espacio.

Cuando miramos, hacia el cielo, en las noches límpidas y serenas sentimos que nuestra inteligencia es pequeña. Delante de nuestra mirada sorprendida, las estrellas son una caravana luminosa que desfila por el desierto insondable del infinito, las nebulosas inmensas y los planetas giran, según leyes eternas, por los abismos del espacio. Una noción aparece, entretanto, bien nítida, en nuestro espíritu: la noción de número.

Vivió en Grecia, cuando ese país era dominado por el paganismo, un filósofo notable llamado Platón. Consultado por un discípulo sobre las fuerzas dominantes de los destinos del hombre, el gran sabio contestó: "Los números gobiernan el mundo". Realmente es así. El pensamiento más sencillo no puede ser formulado sin que en él se involucre, bajo múltiples aspectos, el concepto fundamental de número. Del número, que es la base de la razón y del entendimiento, surge otra noción de indiscutible importancia: la noción de medida. Medir, es comparar. Por consiguiente, sólo son susceptibles de medirse las magnitudes que admiten un elemento como base de comparación ¿Será posible medir la extensión del espacio? De ninguna manera. El espacio es infinito, y siendo así, no admite término de comparación. ¿Será posible evaluar la eternidad? De ninguna manera. Dentro de las posibilidades humanas, el tiempo es siempre finito, y en el cálculo de la eternidad, no puede lo efímero servir de unidad de medición.

En muchos casos, sin embargo, es posible representar una magnitud que no se adapte a los sistemas de medida por otra que pueda ser determinada con exactitud. Ese cambio de magnitudes, tendientes a simplificar los procesos de medidas, constituye el objeto principal de una ciencia, que los hombres denominan Matemática. Para alcanzar su objetivo, precisa la matemática estudiar los números, sus propiedades y transformaciones. En esa parte, ella toma el nombre de Aritmética. Conocidos los números; es posible aplicarlos a la evaluación de magnitudes que cambian, o que son desconocidas, pero que se presentan expresadas por medio de relaciones y fórmulas. Tenemos así el Álgebra. Los valores que medimos en el campo de la realidad son representados por cuerpos materiales o por símbolos; en cualquier caso, esos cuerpos o esos símbolos están dotados de tres atributos: forma, tamaño y posición. Es necesario, pues, estudiar estos tres atributos; ese estudio constituye el objeto de la Geometría.

Hablan algunos de las Ciencias Matemáticas, como si la Aritmética, el Álgebra y la Geometría fuesen partes enteramente diferentes. No es así todas se ayudan recíprocamente, apoyándose unas en las otras, y, en ciertos puntos se confunden. Hay una ciencia única, la Matemática, la cual nadie se puede jactar de conocer, porque sus conocimientos son, por su naturaleza, infinitos, y de la cual todos hablan, sobre todo los que más la desconocen.

Por ello, la Matemática enseña al hombre a ser sencillo y modesto; es la base de todas las ciencias y toda las artes.

FUENTE: El hombre que calculaba

Objetivos

1. *Conocer la evolución de la matemática.*
2. *Determinar el vínculo existente entre la realidad y la matemática.*
3. *Inducir al lector al razonamiento y al desarrollo de su capacidad de análisis.*

Introducción

ALGUNAS CONSIDERACIONES PARA EL EDUCADOR:

En la resolución de todo problema siempre hay detalles que muchas veces no percibimos por estar esmerados en conocer el resultado; por ello, cuando estemos frente al alumno enfrentando un problema, debemos incentivarlo a poner en práctica su curiosidad, su intelecto, sus facultades inventivas, su capacidad de relación con el medio físico y social que lo rodea, para despertar en ellos el encanto de resolverlo con alegría y convicción. Si esto sucede en una edad conveniente, puede provocar en él una afición a la actividad intelectual que, acompañada de una formación moral adecuada y la disciplina constante, dará como fruto estudiantes idóneos.

Ahora, si dedicamos todo el tiempo a ejercitarlos mecánicamente sólo en la resolución de problemas matemáticos, mermaremos en ellos el interés por el curso de razonamiento matemático; pero, si ponemos a prueba su ingenio, proponiendo problemas adecuados a sus capacidades y se les orienta a resolverlos por medio de métodos estimulantes, podremos despertarles el gusto por el pensamiento creativo y el análisis en la matemática. Así; habiendo gustado del placer de la matemática ya no la olvidará fácilmente. presentándose entonces una buena oportunidad para que la matemática adquiera en él un sentido, ya sea como diversión en sus ratos libres, o como herramienta en la profesión que estudie o ejerza.

En cuanto a la importancia del estudio de la historia de la matemática, citemos las palabras del matemático noruego Bekken: "El biólogo E. Haeckel nos dio su ley biogenética básica "Ontogenia recapitula Filogenia", es decir el individuo repite las principales etapas del desarrollo de la raza humana. Una analogía de esto es el principio genético en pedagogía que afirma que el aprendizaje de, por ejemplo, ideas matemáticas puede ser mejorado incluyendo en la experiencia del niño las etapas principales del desarrollo histórico de esas ideas. Como profesor de matemática, que los problemas que suscitan los mayores debates en la historia de la matemática frecuentemente representan, también, las mayores dificultades pedagógicas para el estudiante (y por lo tanto para el profesor) de matemática de hoy".

En el estilo deductivista, se suele considerar a todas las proposiciones como verdaderas y todas las inferencias como válidas. La matemática es presentada como un conjunto siempre creciente de verdades eternas: inmutables. Este estilo oculta la aventura. Toda la historia desaparece, las sucesivas formulaciones tentativas de cierto modo del procedimiento de demostración están condenadas al olvido mientras que el resultado final es elevado al rango de infalibilidad sagrada. Aún no se ha comprendido suficientemente que la actual educación matemática y científica es un foco de autoritarismo y es el peor enemigo del pensamiento creativo y crítico.

El pensamiento matemático no es puramente "formal": no está interesado solamente en axiomas, definiciones y demostraciones estrictas. Muchas otras cosas le pertenecen: la generalización, a partir de casos observados, argumentos inductivos, argumentos por analogía, reconocimiento de un concepto matemático; o abstracción a partir de una situación concreta, etc. El profesor de matemática tiene una excelente oportunidad de familiarizar a sus estudiantes con estos importantes procesos de pensamiento denominados "informales", para que de esta manera afiance su rol de maestro.

El docente tiene, en el presente texto, un marco teórico adecuado que incrementará sus notas de clase y servirá de punto de partida para una investigación más profunda; todo ello enriquecido con muchos ejemplos, ejercicios, problemas resueltos y propuestos. Dejamos pues en sus manos este humilde material que esperamos lo ayude.

CONSIDERACIONES PARA EL ALUMNO:

En el desarrollo del presente texto cada capítulo se ha expuesto de manera detallada en la parte teórica y práctica, para que desarrolles un método razonado y analítico de cada problema a afrontar en tu preparación pre-universitaria.

Te recomendamos leer, con mucha atención, los objetivos y la introducción de cada tema pues en ellos encontrarás información importante que te servirá de ayuda en el estudio de cada capítulo. Lo que no se entienda en un primer intento vuelve a leerlo, concéntrate y aguza tu ingenio. Nunca te desanimes, sé humilde al aprender y humilde al enseñar lo que aprendes a tus compañeros, pues enseñando aprenderás más.

Uno de los aspectos, en los cuales se da mayor énfasis, es en la forma de abordar el problema para lo cual debes hacer uso de tu pensamiento creativo, que se irá acrecentando día a día mediante la práctica de los ejercicios en cada uno de los capítulos.

No olvides que:
"Si al abordar un problema lo hacemos pensando, primero, en recordar algún teorema o una fórmula, entonces así no desarrollaremos las cualidades innatas que todos poseemos como el pensamiento creativo, la agilidad mental, la capacidad de abstracción, etc."

Por ello, el libro te brindará no sólo una gran cantidad de problemas tipos, sino la disciplina necesaria para desarrollar tu capacidad razonativa en general.

PRIMERAS IDEAS MATEMÁTICAS DEL HOMBRE

Como en toda ciencia, el dato que escapa casi totalmente a la precisión de su conocimiento es la iniciación del hombre en la matemática. ¿Cuándo aprendió a diferenciar dos cantidades?, ¿cuándo desarrolló la primera operación matemática?, ¿cuándo dibujó por primera vez la línea?, etc. Sin embargo, si bien es cierto que no se puede precisar las fechas en las cuales el hombre fue formalizando sus conceptos matemáticos; sí se puede, a base de hipótesis y conjeturas muy bien fundadas, tejer la trama de aquellos lejanos y tímidos inicios del amanecer matemático que se pierden en la inmensa bruma de la pre-historia.

LA MATEMÁTICA ES INHERENTE AL HOMBRE

Desde la aparición del hombre, mucho antes de que aprendiera a pensar de sí mismo, a razonar o a tener el primer concepto, todo lo que le rodeaba le "hablaba" ya de "matemática". El número de plantas, la distancia de su cueva al río, el tamaño de la presa que debía atrapar, el grupo formado por un conjunto de mamuts, la altura para coger los frutos, la comparación de la rapidez entre los animales que debía atrapar, el lapso entre la noche y el amanecer, el transcurrir de los días, el crecimiento de su tribu; todo lo que le rodeaba no hacía sino conducirlo por un camino incipiente e inevitable de la matemática: el de **comparar, agrupar y contar**. La escena de un escarabajo que amasa pelotitas de estiércol quizá le sugirió que la forma esférica era la más adecuada para hacer rodar y transportar cuerpos; de la araña que teje su tela para capturar sus presas posiblemente aprendió a entretejer fibras, construyendo redes adecuadas para capturar sus alimentos, etc.

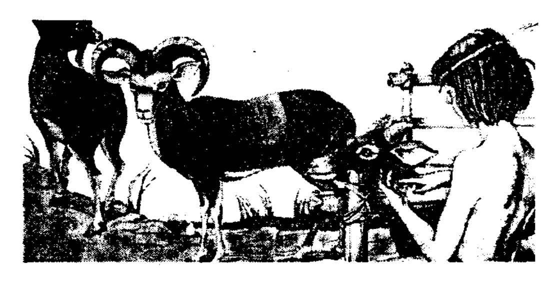
La observación, fase importante en el aprendizaje.

Así nació la matemática junto con el hombre, no porque el hombre la inventara, sino por sus necesidades propias y porque el lenguaje de la naturaleza está dado en conceptos de relaciones y funciones matemáticas.

Por ello debemos tener en cuenta que la matemática tiene aplicación en la vida diaria, en nuestras experiencias cotidianas y nunca debemos aislarla de ellas.

¿CÓMO APRENDIÓ A CONTAR?

Al comparar dos grupos de animales, o las frutas que había recolectado respecto a su vecino, el hombre ya tenía el concepto rudimentario de lo que era contar, más tarde verá que era necesario hacer marcas en las cuevas, en los árboles o en las hojas grandes para llevar la "contabilidad" de cantidades más complejas; aún cuando este hecho implicaba inconscientemente la propiedad de los números, distaba todavía mucho de lo que es el número natural; sin embargo ya la aritmética había nacido con este hecho, una aritmética primitiva y simple como sus propias necesidades.



El ser humano aprende a contar.

LOS DEDOS DE LA MANO EN LOS INICIOS DE LA COMPARACIÓN DE CONJUNTOS Y LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Como producto de la comparación entre objetos, el hombre no tardará en darse cuenta de que los dedos de la mano son una ayuda estupenda para fijar las colecciones, no muy grandes, de objetos o animales. Al observar cinco liebres o cinco ovejas y compararlos con los cinco dedos de una mano habrá dado el primer paso para formar sistemas de numeración, sea quinario, decimal o vigesimal, según la cantidad de los dedos tomados como base de comparación.

Hoy en día encontramos muchos ejemplos concretos de la importancia de los dedos en la comparación de conjuntos:

- ¡Señor! Me vende, por favor, una "mano" de plátanos.
- ¿Me vende, por favor, una "mano" de conchas de abanico?
- ¿Me vende, por favor, un "manojo" de perejil?, etc.

SE AMPLÍA EL CONJUNTO DE COMPARACIÓN

Cuando el hombre observa que los elementos de su tribu van aumentando y hay que recolectar más frutas y cazar más animales se da cuenta que es necesario una forma más práctica de comparar conjuntos más grandes, ya que los dedos de las extremidades eran insuficientes. Fue entonces como ideó el uso de guijarros, piedrecitas y marcas en los árboles y cuevas, para una mejor "contabilidad". Al sacar, por las mañanas, el gran número de sus ovejas para alimentarlas no sabía si al retorno estaban todas, o si algún depredador había comido algunas; por ello, producto de la necesidad y después de mucho tiempo, fue ideando una contabilidad incipiente, a base de piedrecitas. Cuando a sus ovejas, a cada una hacía corresponder con una piedrecita y todo el conjunto lo deja al costado del corral; al regreso, conforme iban entrando una a una, fue separando cada piedrecita del montón que dejó; si no sobraba ninguna era porque, estaban completas y si sobraba, era porque las había perdido. De esta manera comienza a familiarizarse con la comparación de conjuntos cada vez más grandes.

Comparando conjuntos. animales – piedras.

UN PASO IMPORTANTE HACIA EL CONCEPTO DE NÚMERO

Al observar dos conjuntos de elementos completamente diferentes como son las ovejas y las piedrecitas, el hombre dio un paso transcendental en la abstracción, que más adelante le ayudará a manejar conceptos matemáticos de mayor dificultad. Por primera vez el hombre observa dos conjuntos diferentes que tienen algo en común, algo que no se palpa, ni se ve, algo que sólo es una idea, que formará más adelante la base de lo que hoy llamamos "número natural".

La idea del conjunto de números naturales quedó plasmado en la pintura dejada por hombres primitivos en las paredes de cuevas que hasta hoy subsisten: prueba irrefutable de la evolución del pensamiento humano. Así, en Altamira (España) y Toquepala (Perú), encontramos pinturas rupestres que muestran cómo nuestros antepasados entendían lo que era **agrupar** animales y personas por separado, distinguiéndolos y estableciendo una **comparación** entre dichos **grupos**. Nace así la idea de conjunto asociado al número de elementos que posee.

Pinturas rupestres en Altamira (España); nótese la noción de conjunto que aparece claramente.

LAS PRIMERAS NOCIONES SOBRE UNIDAD, PLURALIDAD "MENOR Y MAYOR QUE"

De la comparación de dos conjuntos a la afirmación de cuál de ellos era mayor no distaba mucho; el hombre ya sabía diferenciar entre uno y muchos, entre pocos y muchos. Cuando salían de caza o a recolectar frutos tenían la noción, algo vaga se entiende, de que los animales cazados debían alcanzar para todos, es decir, dichos animales debían ser "**más que**" los cazadores (aquí es muy importante tener en cuenta que cada hombre desea un animal para él sólo, tratándose de una presa pequeña). Quizá durante muchos siglos el hombre utilizó el concepto de muchos, pocos o igual antes de llegar a la formalidad "**de mayor que**" o "**menor que**".

Al repartirse comparan lo que cada uno recibe.

Hasta hoy, en muchas poblaciones nativas, todavía se cuenta: uno, dos y muchos.

DE LA COMPARACIÓN DE OBJETOS AL CONJUNTO

Al comparar dos conjuntos de elementos diferentes, el de los dedos y las ovejas, por ejemplo, su afán por comunicarlo hacia otro hombre, ilumina su mente y hace que asocie una voz, un sonido a cada dedo de la mano – así como los niños aprenden a contar separando un dedo del otro y van diciendo: **uno**, **dos**, **tres**, ... El ser humano en un inicio relacionó a cada elemento o elementos de un conjunto, con un sonido o voces especiales que lo identificasen.

= ¿UNO? = ¿DOS?

= ¿DOS? = ¿CINCO?

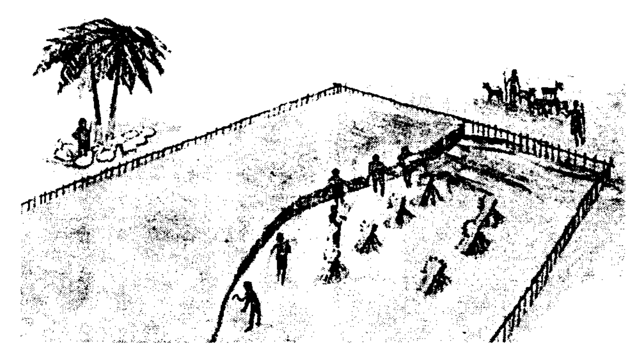
¿Cuáles fueron los sonidos o voces que relacionaron los elementos con las cantidades?

Entonces, el haber inventado voces correspondientes a cada dedo de la mano, abrió un nuevo horizonte hacia un progreso inminente que le ayudará a calcular en forma práctica para luego enseñar a interpretarlos a los que no lo entendiesen. Es así como el hombre supera la etapa primitiva para luego ingresar a una nueva donde aprende rápidamente los secretos de la naturaleza y logra transformar constantemente lo aprendido, de acuerdo a sus necesidades.

CREA LA AGRICULTURA

Al hacer girar su vida alrededor de la tierra cultivada, el hombre tuvo necesidades de protegerla, para lo cual formó sus primeros villorios o campamentos rústicos los cuales le permitieron soportar las inclemencias del tiempo.

Cuando la agricultura se desarrolló más y las cosechas fueron abundantes, la lucha por dominar la naturaleza lo llevó a edificar graneros y secar las carnes de los animales que había cazado para utilizarlos en tiempos difíciles.



La creación de la agricultura volvió al hombre sedentario.

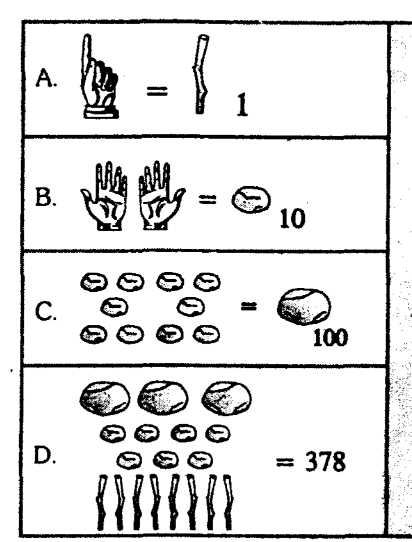
Las excavaciones de muchas de las viviendas neolíticas han puesto en evidencia el desarrollo gradual de la alfarería: el amasado, el coloreado, la forma que se le daba. Los motivos que adornaron dichas vasijas hablan de figuras geométricas que tienden a la simetría y regularidad.

LOS PRIMEROS NUMERALES IDEADOS POR EL HOMBRE

Como ya se sabe, el hombre ideó en un inicio objetos comunes para identificar cantidades, es por ello que los cinco dedos de la mano le indicaban "la cantidad 5", luego empleará símbolos que le serán más útiles en cantidades grandes. Los fenicios seguían dos métodos: escribían los números con rayas verticales para indicar unidades y marcas horizontales para indicar grupos de 10.

En una tumba cerca de las grandes pirámides de Gizeh, en Egipto, algunos exploradores encontraron en la pared, números más antiguos en los cuales el uno es una raya vertical; el 10, una herradura; el 100, un espiral; el 10000, un dedo que parece señalar; el 100 000, una rana, y el millón, un hombre que tiene una cara de asombro.

Entonces tengamos presente que el número es una idea, un concepto; mientras que el numeral es el símbolo del que nos valemos para representar esa idea. Se dice que un mismo número puede estar representado por numerales distintos, según el sistema numérico del cual se trate o la cultura al cual pertenece. De acuerdo al asunto que estamos tratando, diremos que los numerales son precisamente las rayas, marcas, piedrecitas, etc.



En los cálculos de los tiempos primitivos, el número uno podía representarse por un dedo o un palito (A). El número diez podía representarse por diez dedos, ambas manos o por una piedra pequeña (B). Diez piedras pequeñas serían equivalentes a una piedra grande, que representaría cien (C). En este sistema, el número diez marcaba el número tope en la cuenta; en otras palabras, el sistema estaba basado en la decena. Teniendo en cuenta lo anterior, el gráfico (D) demuestra la representación del número 378.

EL NÚMERO COMO ENTE ABSTRACTO

Tuvo que transcurrir muchos años para que el hombre llegue a entender formalmente lo que es un número. Los primeros conceptos fueron más bien cualitativos antes que cuantitativos. Al decir, por ejemplo, tres manzanas o dos ovejas, no podían concebir la idea de "tres" o "dos" independientemente de esas manzanas o esas ovejas; al percatarse más adelante que un conjunto de cinco ovejas y cinco hombres representaban una misma pluralidad y que tenían en común algo que no se veía pero que podían ser "igualadas", se va formando en su mente la idea de número.

Sólo cuando tiene conciencia cabal de este hecho se elevó el número a la categoría de ente abstracto; formando uno de los pilares fundamentales sobre el cual se apoya la matemática moderna.

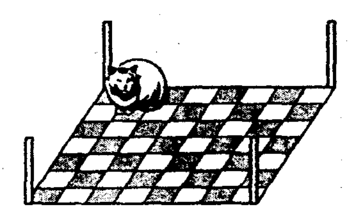
Primeros dibujos que ilustran las nociones geométricas alcanzadas gradualmente por el ser humano.

EJERCICIOS DE INTRODUCCIÓN

Así como hay ejercicios físicos específicos para un atleta, cuando empieza su entrenamiento, análogamente, empezaremos el curso desarrollando algunos ejercicios sencillos en los cuales usted deberá pensar en la forma de resolverlos sin emplear teoremas y fórmulas, pues estos ejercicios están diseñados para iniciarte en el razonamiento matemático; luego abordaremos temas con un mayor grado de abstracción.

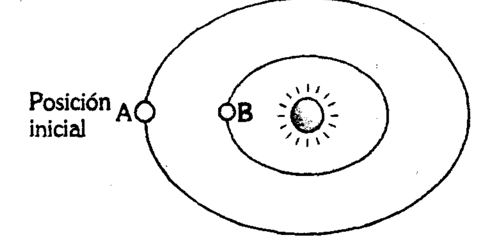
EJERCICIO 1

El piso de la cocina tiene cuatro ángulos, en cada ángulo está un gato, además, frente a cada gato hay tres gatos. En cada rabo está sentado un gato ¿cuántos gatos hay como mínimo en la cocina?



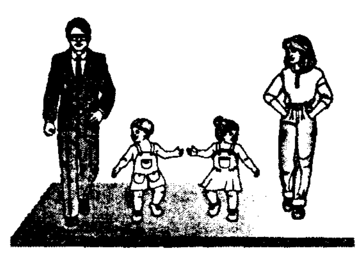
EJERCICIO 2

Si el planeta A tarda 4 años (terrestres) en dar una vuelta completa al Sol y el planeta B tarda dos años. ¿Cuántos años deberán transcurrir, como mínimo, para que los dos tomen la posición inicial?



EJERCICIO 3

En una reunión familiar se encuentran las siguientes relaciones de parentesco entre los presentes: padre, madre, hijo, hija, tío, tía, hermano, hermana, primo, prima, sobrino, sobrina; sin embargo, sólo habían 4 personas ¿cómo puede ser posible?

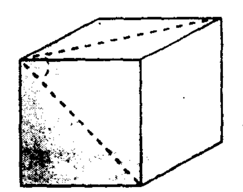


EJERCICIO 4

Tres personas A, B y C deben repartirse 21 vasos iguales, de los cuales 7 están llenos, 7 medios llenos y 7 vacíos. Si a cada uno debe corresponderle la misma cantidad de líquido y el mismo número de vasos. ¿Cuál es el número de vasos vacíos que le corresponde a la persona que tiene 3 vasos llenos?

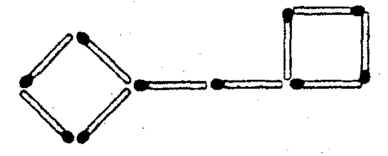
EJERCICIO 5

Calcular la medida del ángulo formado por las líneas punteadas:



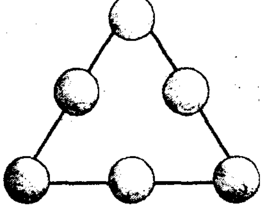
EJERCICIO 6

Una llave está construida con 10 cerillas, en ella se cambia de lugar 4 cerillas, de manera que resulten 3 cuadrados iguales.



EJERCICIO 7

Distribuir los dígitos del 1 al 6 en los círculos de la siguiente figura (un dígito en cada círculo), de tal manera que la suma de los dígitos en cada uno de los lados del triángulo sea 9.



RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS:

1. Hay 4 gatos
2. 4 años
3. Están presentes un hombre y su **hermana**; él está con su hijo y ella, con su hija.
4. 3 vasos
5. El ángulo mide 60º
6.
7.

Giordano Bruno

Soy enemigo de toda creencia. Tal era su lema.

*Cuando niño, no se llamaba Giordano sino Filippo. A los diecisiete años, al convertirse en novicio del convento de los dominicos, recibió el nombre de Giordano. Desde entonces todo el mundo empezó a llamarlo Giordano Bruno, el Nolanés, por el nombre de su patria, la ciudad napolitana de Nola. Los monjes tenían una magnífica biblioteca donde Giordano prácticamente pasó toda su juventud. Hasta los enemigos del Nolanés lo consideraban como una persona de altísimos conocimientos que Giordano adquirió en su juventud. Bruno era, entre sus contemporáneos, el más destacado conocedor de Aristóteles, de todos sus intérpretes cristianos, hebreos y árabes, de los filósofos, científicos, escritores y poetas de la Antigüedad: tal fue el resultado de los diez años dedicados a los libros. "¡**La ignorancia – ironizaba Bruno –es la mejor ciencia en el mundo, es fácil de aprender y no entristece el alma!**". De no haber sido un gran científico, en qué tremendo inquisidor se habría convertido este joven amante de los libros. Pero la Iglesia y la Inquisición lo perdieron muy temprano: púes desde su mocedad la gran duda se apoderó de él. En medio de la fusión de los conocimientos cristalizaba una infinidad de interrogantes. Cuanto más leía, más se le dilucidaba la incongruencia de los dogmas religiosos, los libros más religiosos alimentaban su ateísmo, los invitados del embajador de Francia se pusieron a adivinar en el libro de Ariosto, y al abrir al azar le correspondió la estrofa: "**Enemigo de toda ley, enemigo de toda creencia . . .**" Así fue toda su vida.*

Los siglos pasados desvalorizaron muchas de las pasiones de Giordano Bruno, pero su doctrina sobre la infinidad del universo y de la multiplicidad de los mundos similares a nuestra Tierra, nunca se olvidará. Desarrollando las ideas de Copérnico, Bruno destrozó las cúpulas de las esferas celestes con las estrellas eternamente fijas en ella y fue el primero en no temer al cosmos infinito.

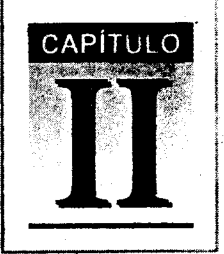
*Cuando leemos acerca de los sufrimientos de Bruno y Galileo, a menudo estamos dispuestos a catalogar a sus verdugos, como a una especie de fuerza terrible oscura y obtusa, como encarnación de una ignorancia beligerante. Pero no es así, y precisamente porque esto no es así, la tragedia de Giordano Bruno se vuelve aún más profunda. Es ingenuo suponer que el clero se proponía exterminar todo conocimiento en la mente humana, pisotear los brotes de cualquier ciencia. No, no eran capaces de hacerlo, y lo comprendían. **La ciencia no solamente no se perseguía, sino que, por el contrario, se estimulaba, siempre y cuando sirviera o pudiera servir a los intereses de la iglesia.***

Bruno tuvo que morir no por haber afirmado que existían numerosísimos mundos, ¡no!

Lo ajusticiaron por la idea de que estos mundos eran semejantes al mundo terrenal, porque atentaba contra la exclusividad del ser humano, por reducir la Tierra a la categoría de un cuerpo celeste ordinario, que en nada se distinguía de los demás. Se levantaba contra los dogmas que sustentaban la religión. Su doctrina amenazaba la propia existencia de ésta, y si era así, esta doctrina tenía que ser exterminada de inmediato.

Durante ocho años estuvo encarcelado el Nolanés: los "santos padres" de aquel tiempo aspiraban a obligarlo a que abjurara. Confesó muchas cosas: en efecto, había pecado mucho contra la fe y sus libros eran defectuosos; ciertamente no iba a la iglesia y le gustaban mucho las mujeres, todo eso era cierto. Pero sus puntos de vista, su doctrina, no; en ello, él tenía la razón. Le dieron cuarenta días para pensar; le enviaron teólogos a su prisión, pero todo en vano. Cuando en el palacio del cardenal Madruzi le leyeron la sentencia, Giordano dijo: "¡Ustedes me dictan la sentencia con más temor del que yo siento al oírla!"

La ejecución tuvo lugar al amanecer. Se le trincó la lengua con tenazas especiales para que no gritara impertinencias. Lo último que vio la muchedumbre antes de que lo envolviera el humo fue cómo Giordano sacudió y volvió la cabeza, cuando en una larga pértiga le acercaron un crucifijo a sus labios.



LÓGICA RECREATIVA

Para transformar la naturaleza adecuadamente en beneficio de la humanidad, el ser humano necesita primero imaginar, crear y diseñar estrategias y tecnología. Por ello es importante desarrollar y potenciar la imaginación y el pensamiento creativo.

Lectura 2

La paradoja de Russell

Bertrand Russell (1 872 - 1970) Se interesó por la Lógica y por la teoría del conocimiento, autor de Principio Matemático

Gottlob Frege, ocupa en la historia de la Lógica un lugar de privilegio; dedicó las mejores energías de su vida a sus Grundgesetze der Arithmetik, un libro fundamental, donde se hacía por primera vez un serio intento por definir lo que es un número a partir del concepto de conjunto. En 1 903, antes de publicar el segundo tomo de su obra, recibió una carta de un lógico inglés de 30 años, llamado Bertrand Russell, donde se planteaba una pregunta "sin" respuesta.

En esencia, lo que Rusell decía es esto: Llamamos normal a todo conjunto que no se tiene a sí mismo como elemento; por ejemplo, el conjunto de las bellotas de una encina es un conjunto normal, puesto que tal conjunto no es una bellota sino un conjunto de ellas y, por consiguiente, no se tiene a sí mismo y como elemento. Llamemos anormales a los conjuntos que se tienen a sí mismo como elementos. Por ejemplo, el conjunto de los conjuntos es, a su vez, un conjunto; por consiguiente, se tiene a sí mismo como elemento. Ahora bien, consideremos el conjunto de todos los conjuntos normales. ¿Es normal o anormal? Si es normal, no es elemento de sí mismo, lo cual lleva a una contradicción, pues entonces habría un conjunto normal no perteneciente al conjunto de todos los conjuntos normales. Si es anormal, es elemento de sí mismo y por consiguiente un conjunto anormal pertenece al conjunto de todos los conjuntos normales, lo que equivale a afirmar que un conjunto anormal es normal. De nuevo llegamos a una contradicción.

Cuando Frege recibió la carta, estaba terminando el segundo tomo de sus Grudgesetze y, dando muestras de una irreprochable probidad científica, la publicó al final de su obra esbozando un intento de respuesta. Sus palabras textuales fueron: "Difícilmente puede encontrarse un científico con algo más indeseable que ver venirse abajo los fundamentos de su trabajo justamente cuando lo está dando por terminado".

La carta de Russell contiene una paradoja: conteste lo que se conteste, nos vemos abocados a una contradicción flagrante. Una situación como para hacer engordar de felicidad al más tibio anticantoriano. Henri Poincaré, que era un pensador de primerísima magnitud, pero un crítico bastante duro, situaba el cantorismo entre las enfermedades y lo consideraba desde el punto de vista matemático, como "un interesante caso patológico". Otros en cambio, y no de los menos importantes, le animaron en su calvario: Hermitte, Mittag - Lefler y Hilbert se contaban entre sus admiradores, y personajes de la talla de Dedekind entre sus buenos amigos, si bien no llegaban a comprenderle por completo. A la pregunta ¿en qué piensa cuando piensa en un conjunto?, Dedekind respondía como un prosaico: "en un saco lleno de elementos", mientras Cantor, horrorizado, se llevaba las manos a la cabeza y soltaba una sentencia lapidaria: "Un conjunto es para mí como un abismo profundo".

FUENTE : Enciclopedia Universitas

Objetivos

1. *Afianzar el desarrollo de la creatividad y el ingenio.*
2. *Potenciar la habilidad analítica.*
3. *Ejercitar la capacidad recreativa de la realidad con la matemática.*

Introducción

Parafraseando a M. Gardner, la Lógica recreativa, como el ajedrez, tiene su propio y curioso encanto. El ajedrez combina la belleza de una estructura matemática con las delicias recreativas de un juego competitivo y la Lógica recreativa combina la belleza de una estructura matemática con el entretenimiento que aporta la resolución de un problema dado, haciendo así que la matemática sea fascinante.

En efecto, la matemática es fascinante ... ¡Sí, señor no ponga esa cara de asombro ...! Aún así, no es fascinante, ni mucho menos interesante, para aquellos que sólo recuerdan largas demostraciones de teoremas o resoluciones tediosas de difíciles problemas; pero si incluimos adecuadamente a los teoremas fundamentales cierta lógica recreativa y hacemos didácticas las soluciones, lograremos que la matemática se torne divertida e, inclusive con un poco de humor, podemos aprender jugando con pasatiempos matemáticos.

Los problemas que se presentan en las situaciones lógicas recreativas aportan, en ese sentido, diversión y desarrollo del pensamiento creativo. Para dar con las respuestas deberemos previamente plantearnos preguntas como: "¿He comprendido bien el enunciado del problema?, ¿he identificado claramente lo que me están pidiendo calcular, encontrar, discernir o resolver?"; entonces, ¿qué estrategia debo aplicar?, ¿qué pasos me conducirán hasta la respuesta?; pues, primero debemos precisar lo que realmente está pasando en la situación dada para luego situarnos frente a ella y proponer un abanico de posibilidades que nos conduzcan a la respuesta requerida.

Los ejercicios dados a continuación muestran situaciones, a veces familiares, a veces imaginarias, pero relacionadas con el pensamiento creativo y a medida que los resuelvas mejorará notoriamente tu capacidad para presuponer, hacer preguntas, deducir y emplear tu imaginación adecuadamente, permitiendo que las piezas del rompecabezas mental encajen correctamente para darnos una visión de la respuesta.

De este modo podrás aplicar las técnicas mencionadas para resolver los ejercicios dados en la resolución de situaciones reales de la vida cotidiana; finalmente te aconsejamos resolver los ejercicios realizando siempre enfoques creativos, nuevos, que desafíen el pensamiento convencional, que conduzcan a soluciones novedosas, y mejores, en cada problema.

PRUEBA PRELIMINAR

A continuación presentamos 13 ejercicios de diversa índole, los cuales tienen como objetivo despertar y evaluar, en primera instancia, los alcances de tu creatividad; herramienta con la cual cuentas para abordar el presente capítulo. Si consigues resolverlos todos ¡felicitaciones!, has cultivado y desarrollado una habilidad muy importante, pero ten presente lo siguiente: si logras resolver algunos quizá ninguno no te preocupes; pues, intentando nuevamente y poniendo empeño y constancia lograrás, finalmente, resolverlos. Si es así, has dado ya el primer paso, plantéate, entonces, el objetivo de potenciarte y asume con responsabilidad y conciencia tu desarrollo; para ello revisa bien los alcances teóricos dados, así como los ejemplos de aplicación correspondientes para cada tipo de problemas y estudia con ahínco la sección de ejercicios resueltos.

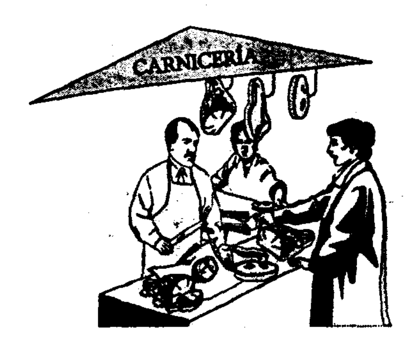
Le recomendamos no ver las respuestas hasta que haya realizado el máximo esfuerzo en la resolución de los ejercicios y esto va tanto para la prueba de entrada como para todos los demás problemas propuestos en el libro.

PRUEBA

1. ¿Cuánto perdió el carnicero?

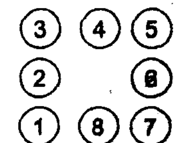
Una señora compra carne por un valor de S/. 3 y paga con un billete de S/. 10. El carnicero que no tenía cambio, cruza la calzada y se dirige hacia la botica, cambia el billete en dos de S/. 5. Cruza nuevamente la calzada y cambia en la panadería uno de los billetes de s/. 5 en 5 monedas de S/. 1, con lo cual consigue dar vuelto. Luego de algunos minutos el boticario le devuelve el billete de S/. 10 soles, pues ¡era falso! Y el carnicero compungido le entrega un billete de S/. 10 verdadero. ¿Cuánto perdió el carnicero?

¡No, la respuesta no es S/. 20, ni tampoco S/. 17 , ...!



2. Un cuadrado de monedas

A continuación mostramos un cuadrado compuesto por 8 monedas. Se le pide que cambiando de lugar a cuatro monedas, forme un cuadrado que presente cuatro monedas en cada lado.



3. El trozo perdido del pastel

La imaginación sobre las condiciones de un problema es necesaria al momento de empezar a resolverlo. Es importante, por tanto, hacerse una idea correcta de lo que quiere dar a entender un ejercicio.

Una de las ilusiones más divertidas es la que mostramos en seguida:

¿Dónde está la porción de torta que falta?

4. La suma

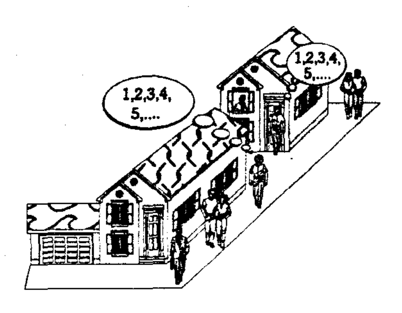
Hagamos referencia ahora a un ejemplo sumamente interesante y divertido.

Escribe seis veces la cifra (1) y tres veces el signo de adición (+) en una fila de modo tal que obtengas como suma un total de 24.

5. Contando y contando

¡Atención a este ejercicio!

Dos personas contaron durante una hora a los transeúntes que pasaron, junto a ellos, por la acera. Una contaba desde la puerta de su casa y la otra yendo y viniendo por la acera. ¿Quién contó más transeúntes?

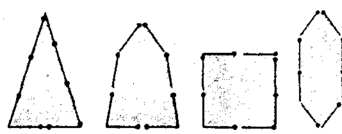


6. El lápiz

He aquí una pregunta que sin duda aparecerá muy cándida o demasiado sutil. ¿Cuántas caras tiene un lápiz convencional nuevo sin tajar?

7. Cerillas

Con ocho cerillas pueden construirse numerosas figuras de contorno cerrado, su superficie es, naturalmente, distinta, por ejemplo, las que se ven en el gráfico:



Se plantea construir con 8 cerillas una figura plana, de superficie máxima, ¿cómo será dicha superficie?

8. Las gemelas

En el aula 1 de la academia ADUNI, el primer día de clases, dos hermanas gemelas, de nombres Nena y Nina, se presentan ante sus compañeros.

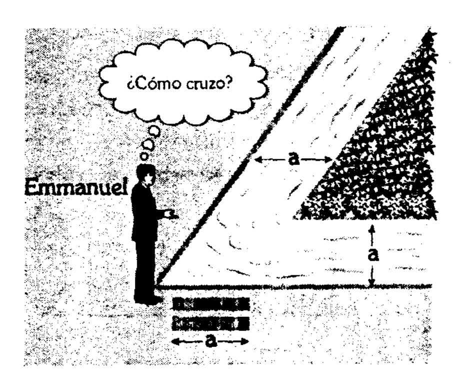
Una de ellas dice: "Yo soy Nena".

La otra comenta: "Si lo que ella dice es cierto, Yo soy Nina".

Si una de las dos miente siempre y la otra nunca lo hace, indique el nombre de la alumna sincera.

9. El foso

Un campo cuadrangular está rodeado por un foso de ancho constante, Emmanuel desea cruzarlo, pero sólo dispone de dos tablones muy resistentes cada uno de los cuales tiene un largo, exactamente igual al ancho del foso. ¿Cómo haría para cruzar el foso, utilizando únicamente estas dos tablas? (No tiene ni clavos, ni martillos, ni nada por el estilo).

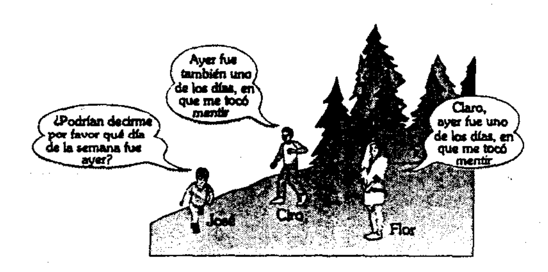


10. Deducción

Tenemos la siguiente información:

- Ciro mentía los lunes, martes y miércoles y el resto de días de la semana decía la verdad.
- Flor mentía los jueves, viernes y sábados y el resto de días de la semana decía la verdad.

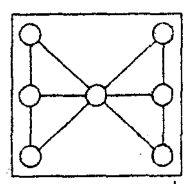
Con el propósito de saber qué día de la semana es hoy, José los busca y les hace una pregunta (ver la figura):



En base a las respuestas obtenidas, José (que era un chico muy listo) fue capaz de deducir qué día de la semana es hoy. ¿Qué día es?

11. Distribución numérica

Distribuir los dígitos del 1 al 7 usándolos una sola vez para conseguir que la suma de los números que ocupan cada fila sea 12.

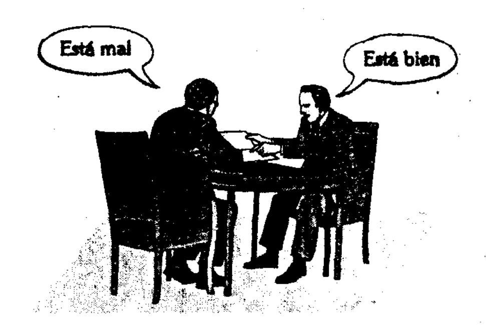


12. Una operación sencilla

Dos profesores de matemática se miraban disgustados mientras examinaban la misma operación elemental resuelta por un niño de 10 años.

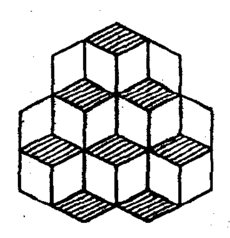
- Esta operación es correcta decía uno de ellos.
- ¡No! está errada por completo replicaba el otro.

¿Cómo pueden dos expertos tener un desacuerdo tan absoluto acerca de una operación simple?



13. El misterioso caso del cubo escondido

Se trata de una ilusión óptica muy famosa. Mira fijamente estos seis cubos. ¿Puedes ver, por casualidad, un cubo extra?



1. ¿Cuánto perdió el carnicero?

Lo que perdió el carnicero fue el valor de los S/. 10 falso que le dio la señora y que él asumió, pues el boticario recuperó su dinero.

2. Un cuadrado de monedas

Coloque la moneda 2, 4, 6 y 8 sobre las monedas 1, 3, 5, y 7, respectivamente, (de modo superpuesto).

3. El trozo perdido de pastel

El hecho de nuestra ilusión es que casi siempre vemos los grabados desde arriba y casi nunca desde abajo. Por lo tanto pon de cabeza la hoja donde se encuentra el problema y encontrarás la porción que falta.

4. La suma

El objetivo de este ejercicio es medir la habilidad del estudiante en el empleo rápido de una de las operaciones básicas (adición).

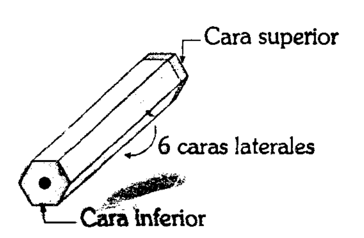
$$1 + 1 + 11 + 11 = 24$$

5. Contando y contando

A primera impresión pareciera que el que va yendo y viniendo contó más, pero realmente los dos contaron el mismo número de transeúntes. Efectivamente, quien estaba en la puerta contó a los transeúntes que pasaban en ambos sentidos; mientras quien iba y venía por la acera contó a ellos mismos y al que estaba en la puerta, ya sea en la ida o en la venida.

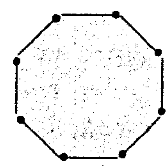
6. El lápiz

Un lápiz convencional nuevo y sin tajos tiene ocho caras, como se puede apreciar en el gráfico mostrado.



7. Cerillas

Puede demostrarse que de todas las figuras con perímetros iguales, la que tiene mayor área es el círculo. Naturalmente que a base de 8 cerillas no es posible construir un círculo; sin embargo, sí es posible construir la figura "más próxima" al círculo, **un octógono regular**.



8. Las gemelas

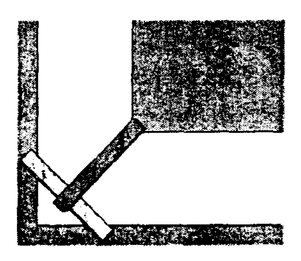
Recordemos las afirmaciones dadas.

Hay que tener en cuenta que el análisis debe hacerse en función de lo que la primera afirma. Si la primera dice la verdad entonces la segunda es Nina; por lo tanto, ambas dirían la verdad, lo cual es una contradicción con las condiciones del problema, pues por dato una debe mentir.

Esto quiere decir que la primera debe mentir (sería Nina) y la segunda diría la verdad (por dato debe ser Nena).

9. El foso

Observa el gráfico y comprenderás cómo se resuelve este problema. ¿interesante ... no?

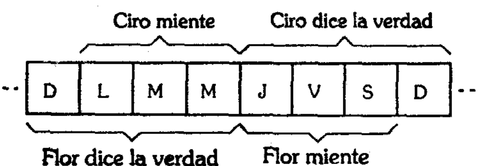


Observación :

Para el análisis matemático de este ejercicio, asume como ancho del foso 3 unidades cualesquiera arbitrarias y demuestra que el cruce del foso es posible, usando la desigualdad $2\sqrt{2} < 3$.

10. Deducción

Haremos un esquema en el cual mostraremos los días de la semana en los que los protagonistas son sinceros o mentirosos:



Según el esquema vemos que no existe un mismo día en que mientan los dos.

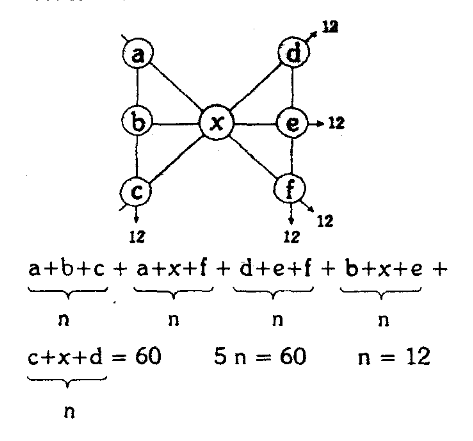
Luego:

- Si el día de hoy, los dos dijesen la verdad, entonces sería domingo (hoy); pero según las afirmaciones los dos debieran mentir el día de ayer (sábado) lo cual no es cierto.
- Entonces el día de hoy uno dice la verdad y el otro miente. Además por las afirmaciones dadas, se deduce que quien dice la verdad hoy, ayer mentía y quien miente hoy, ayer decía la verdad (dado que no existe un día en que coincidentemente mientan los dos).

Finalmente, según el esquema concluimos que el único día que cumple con las condiciones dadas es el día jueves.

11. Distribución numérica

Emplearemos conocimientos básicos de matemática, pues sumaremos todas las filas como se indica. Veamos:

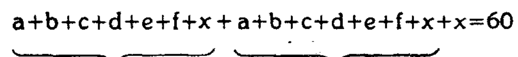


$$\underbrace{a+b+c}_{n} + \underbrace{a+x+f}_{n} + \underbrace{d+e+f}_{n} + \underbrace{b+x+e}_{n} +$$

$$\underbrace{c+x+d}_{n} = 60 \qquad 5n = 60 \qquad n = 12$$

Agrupando:

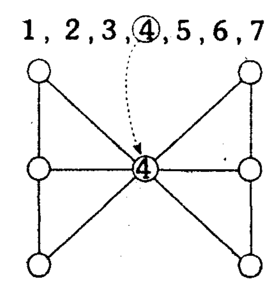
$$\underbrace{a+b+c+d+e+f+x}_{\text{Suma de los dígitos del uno al siete}} + \underbrace{a+b+c+d+e+f+x}_{\text{Suma de los dígitos del uno al siete}}+x=60$$



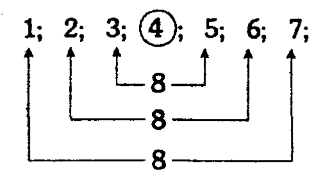
$1+2+3+4+5+6+7+1+2+3+4+5+6+7+x=60$

$56 + x = 60 \qquad x = 4$

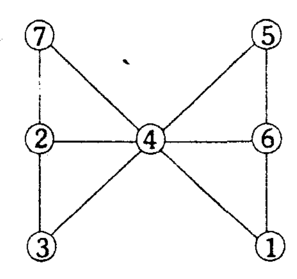
Resumiendo : tenemos 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 y hemos ubicado ya el número que va en el centro: es el 4. En efecto y al ponerlo se tendría:



Como la suma de las filas deber ser 12 y el 4 está ya en el centro; entonces los extremos deben de sumar 8; lo que se consigue al relacionar los dígitos de la siguiente manera:



Ubicando ahora el resto tendremos:



12. Una operación sencilla

La operación era: $9 \times 9 = 81$, en efecto, muy sencilla.

Lo que ocurría era que los profesores la miraban desde costados distintos de la mesa, por ello, para un profesor estaba correctamente, pero para el otro no, puesto que leía:

$18 = 6 \times 6$, lo cual es evidentemente erróneo.

13. El misterioso caso del cubo escondido

Tan sólo invierte la hoja y verás el cubo que falta.

SITUACIONES LÓGICAS RECREATIVAS

Encontramos aquí interesantes ejercicios en los cuales tendrás que poner en práctica tu habilidad e ingenio. En algunos de ellos utilizarás conocimientos elementales de aritmética y geometría; en otros, reflexión y un modo de pensar lógico.

Cada situación presente contiene en sí mismo los datos necesarios para ser resuelta; quizá las preguntas que debes hacerte al afrontar cada ejercicio serían: ¿Qué es lo que estoy observando?, ¿qué alcances me dan los datos y qué puedo deducir de ellos?, ¿qué estrategia a seguir me sugieren dichos datos?

El propósito al proceder así es empezar a ejercitar y desarrollar aún más nuestras capacidades intelectuales. Es cierto que algunos ejercicios son sencillos, pero otros no son tan fáciles de resolver a simple vista y eso es lo que los vuelve interesantes. En este último caso es posible llegar a la respuesta de cada uno de ellos, de una manera lógica, deducida a partir de los datos mencionados.

Sugerencias:

- Lee y observa cuidadosamente, según sea el caso. la situación descrita y esfuérzate en interpretar las preguntas que se planteen.
- Los datos necesarios para resolver los ejercicios se encuentran en ellos mismos. Identifícalos y a partir de ahí deduce y razona. No pretendas adivinar ni sacar conclusiones apresuradas.
- Aún cuando te sientas desorientado, cálmate y empieza de nuevo, intenta plantear nuevas hipótesis y otras posibilidades.

  En ocasiones te servirá despojarte del pensamiento convencional y emplear un enfoque creativo y nuevo: el pensamiento lateral. Los procedimientos que aconseja el pensamiento lateral son:

  - No atascarse en caminos sin salida.
  - No dejarse llevar por ideas preconcebidas y
  - Cambiar constantemente el punto de vista o enfoque del problema.

Observación:

Hemos distribuido los problemas en cinco grupos:

I. Ejercicios con cerillas.
II. Situaciones diversas.
III. Problemas sobre parentesco.
IV. Problemas sobre relación de tiempos.
V. Orden de información

En cada grupo, los problemas son de distinto nivel, desde los elementales hasta los difíciles. El objetivo del primer grupo es despertar y ejercitar tu ingenio y destreza visual; el de los siguientes tres grupos, es el de despertar, desarrollar e incrementar tu habilidad analítica; finalmente, el último grupo de ejercicios pretende ayudarte a desarrollar tu pensamiento creativo mediante el empleo de nuevos enfoques ingeniosos.

Algunos ejercicios son ya conocidos, digamos "clásicos"; pero son considerados aquí por su gran valor pedagógico; otros no son tan conocidos y algunos son nuevos. En conjunto, el material que ahora está en tus manos aspira humildemente a ayudarte en el desarrollo de todo el potencial oculto de tu intelecto para hacer de ti una persona más brillante, ingeniosa y aguda, que aplique su capacidad para resolver creativamente los problemas que enfrente diariamente.

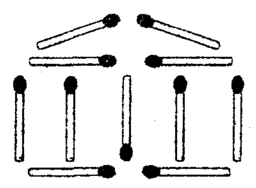
Para poder desarrollar nuestras habilidades intelectivas eficazmente es necesario impulsar y desarrollar nuestro ingenio y creatividad, así nos enfrentaremos adecuadamente a situaciones diversas y saldremos airosos de ellas.

I. EJERCICIOS CON CERILLAS

Observa el siguiente ejemplo.

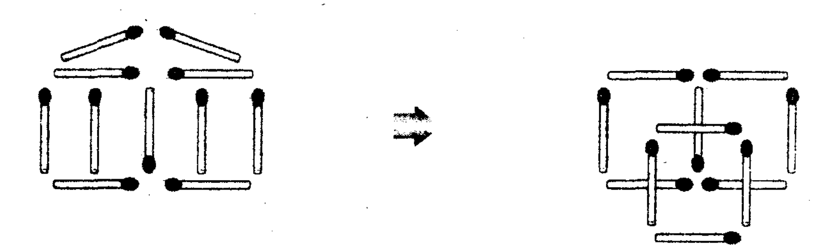
Ejemplo:

La figura mostrada es un famoso "templo griego" que está hecho con once cerillas. Cambia de lugar 4 cerillas de manera que obtengas 5 cuadrados.



Resolución:

Observamos que ya tenemos 2 cuadrados formados consecutivamente de manera horizontal; ahora deslicemos hacia abajo los dos cerillos verticales dentro de los 2 cuadrados mencionados, y completando adecuadamente con los 2 cerillos de afuera (encima), tendremos:



Contando los cuadrados de la figura obtenida hallaremos 3 cuadrados grandes y 2 pequeños; es decir, 5 cuadrados en total.

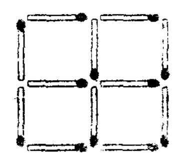
Como habrás notado, utilizando unas cuántas cerillas o palitos de fósforo hemos planteado un ejercicio muy interesante e ilustrativo. Para poder desarrollar los siguientes ejercicios te aconsejamos aprovisionarte de una caja de fósforos (aunque podrías también utilizar mondadientes, siempre y cuando tengan la misma longitud).

El objetivo es desarrollar tu poder de reflexión y tu destreza visual, empleando para ello imaginación e ingenio.

A continuación presentamos 20 ejercicios, dedica a cada ejercicio un tiempo prudencial; te aconsejamos no ver las soluciones hasta haber agotado tus posibilidades. ¡Esfuérzate; tú puedes!

Ejercicios Propuestos

1. Se tienen doce cerillas dispuestas en cuatro cuadrados pequeños como sigue:



a) Retira dos cerillas, dejando dos cuadrados.

b) Retira cuatro cerillas, dejando dos cuadrados iguales.

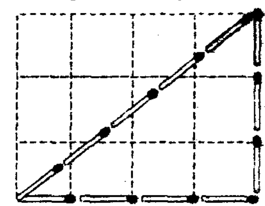
c) Mueve tres cerillas, para hacer tres cuadrados del mismo tamaño.

d) Mueve cuatro cerillas, para hacer tres cuadrados del mismo tamaño.

e) Mueve dos cerillas para hacer siete cuadrados de tamaños diferentes.

f) Mueve cuatro cerillas para hacer diez cuadrados, no todos del mismo tamaño.

2. Observa el siguiente esquema :

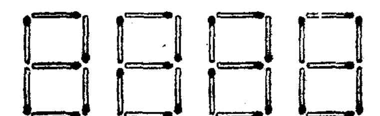


a) Mueve dos cerillas y forma una figura equivalente al área de 5 cuadraditos juntos.

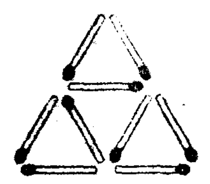
b) Mueve tres cerillas y forma una figura con un área equivalente a la de cuatro cuadraditos juntos.

c) Mueve cuatro cerillas y forma una figura con un área equivalente a la de tres cuadraditos juntos.

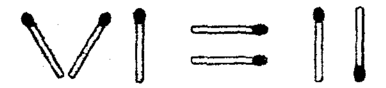
3. Retirando once cerillas, deja seis.



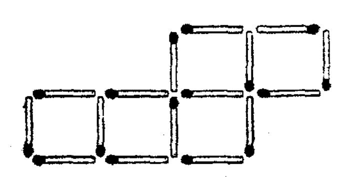
4. En la disposición de la figura siguiente, es sencillo dejar sólo dos triángulos equiláteros, retirando cuatro cerillas; asimismo eliminando tres. ¿Pero sabrá el lector suprimir sólo dos cerillas y dejar dos triángulos equiláteros? (no deben quedar cerillas sueltas).



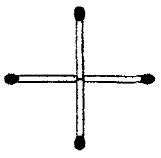
5. Moviendo solamente una cerilla debemos lograr una igualdad verdadera. No es válido tachar el signo "igual" con una cerilla y obtener una desigualdad verdadera; la expresión final debe ser una auténtica igualdad.



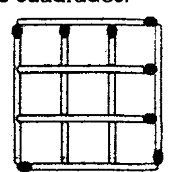
6. Cambiando la posición de dos cerillas hay que reducir, de 5 a 4, el número de cuadrículas unitarias de la figura. No es lícito dejar "cabos sueltos" –es decir, cerillas no utilizadas como lados de un cuadrado. Una notable característica de este clásico problema es que, incluso una vez resuelto, podemos ponerlo al revés, volverlo cabeza abajo, o ambas cosas y seguirá siendo casi tan difícil de resolver como lo era inicialmente.



7. Moviendo solamente una cerilla hay que formar un cuadrado. (La vieja broma de deslizar uno o dos milímetros hacia arriba la cerilla central superior, y dejar en el centro de la cruz un minúsculo hueco cuadrado no es válida. La solución también es humorística, pero la broma va ahora por distinto camino).

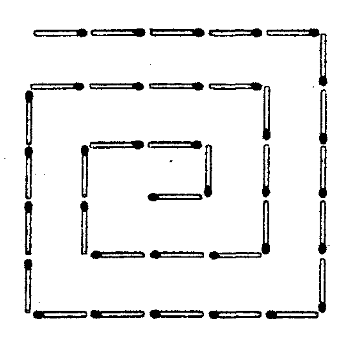


8. Como se ve, las ocho cerillas forman en este caso catorce cuadrados.

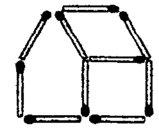


Retira dos cerillas y deja sólo tres cuadrados.

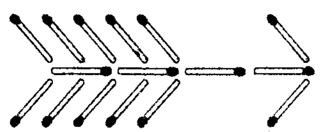
9. Cambia de lugar cuatro cerillas en esta espiral para construir tres cuadrados.



10. Se ha construido una casa utilizando 10 cerillas. Cambiar en ella la posición de dos cerillas, de tal forma que la casa aparezca de otro costado.



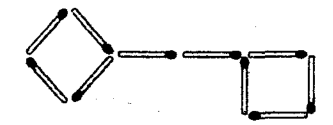
11. En la figura apreciamos una flecha construida con dieciseis cerillas.



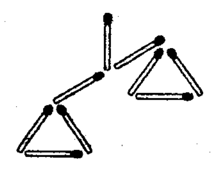
a) Mueve siete cerillas, de manera que se formen cinco figuras iguales de cuatro lados.

b) Mueve diez cerillas de la flecha, de manera que se formen ocho triángulos iguales.

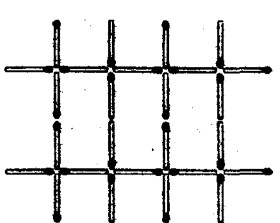
12. La llave está hecha con diez cerillas, cambiar de lugar cuatro cerillas de tal forma que resulten tres cuadrados.



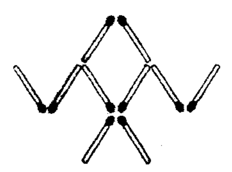
13. Una balanza, compuesta por nueve cerillas se halla en un estado de desequilibrio. Es preciso cambiar la posición de cinco cerillas, de tal forma que la balanza quede en equilibrio.



14. Hay que cambiar de sitio catorce cerillas de esta "rejilla" para lograr formar tres cuadrados.

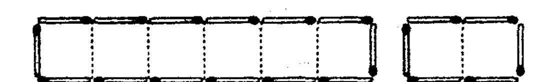


15. Un cangrejo de cerillas camina hacia arriba (ver figura), cambiar la posición de tres cerillas de tal forma que el cangrejo camine hacia abajo.



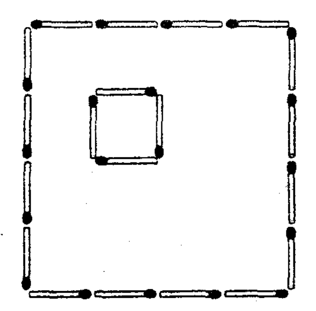
16. Coloca ocho cerillas de manera que formen dos cuadrados, ocho triángulos y una estrella de ocho puntas. Las cerillas pueden superponerse.

17. Mira el rectángulo de la izquierda. Tiene tres veces el área del rectángulo de la derecha (puede observarse "seis cuadrados" y en el otro lado "dos cuadrados" como muestran las líneas de puntos).



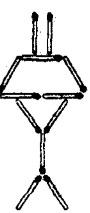
Añade una cerilla al rectángulo pequeño para que tenga siete cerillas y transfórmalo ahora en un polígono cóncavo de siete lados en donde puede "apreciarse cinco triángulos equiláteros" (claro está que como en el inicio emplea líneas punteadas). Añade ahora cuatro cerillas al rectángulo de la izquierda y transfórmalo en una figura compuesta por quince triángulos equiláteros, es decir, un área equivalente a tres veces la figura anterior.

18. He aquí un campo, un cuadrado de cuatro cerillas de lado. En su interior hay un establo, un cuadrado de una cerilla de lado. El granjero desea parcelar el campo en cinco corrales iguales, en forma de L. ¿Cómo hacerlo? (Se necesitan diez cerillas más para efectuar la parcelación).



19. Cambiando la posición de seis cerillas, es preciso transformar un farol (figura) en cuatro triángulos iguales.

20. En una lámpara, compuesta por doce cerillas, cambiar la posición de tres cerillas, de tal forma que resulten cinco triángulos iguales.

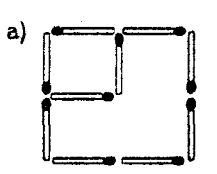


Resolución

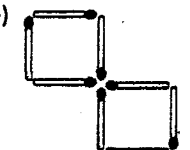
¿Qué tal te fue con los ejercicios?..., ¿bien?, ¿más o menos?..., ¿qué tan bien?... No te preocupes; recién estamos comenzando. Comprueba, ahora, tus respuestas:

1.

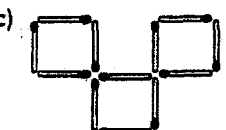
a)



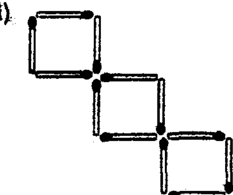
b)



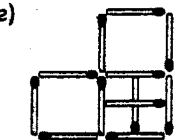
c)



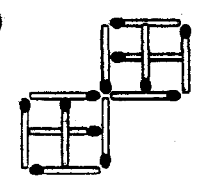
d)



e)

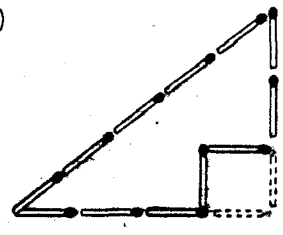


f)

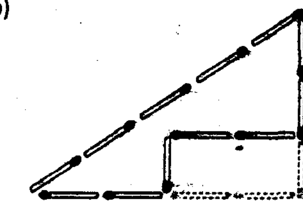


2. Observa que las áreas de las figuras pedidas se calculan por diferencia de áreas.

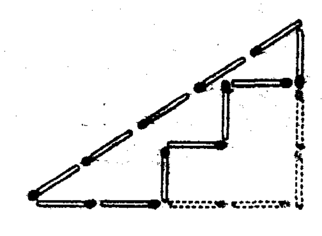
a)



b)

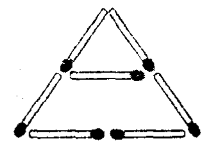


c)

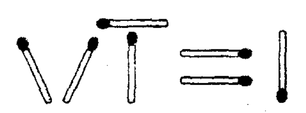


3.

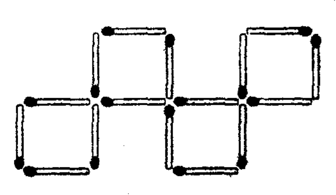
4.



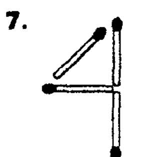
5.



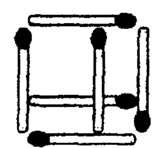
6.



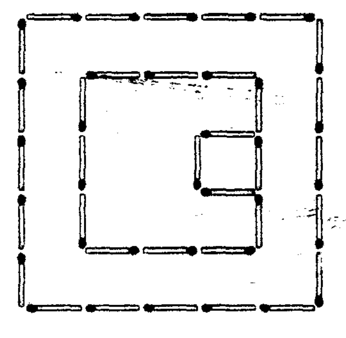
7.



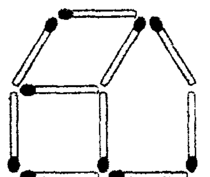
8.



9.

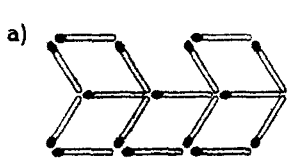


10.

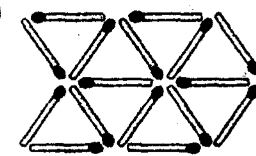


11.

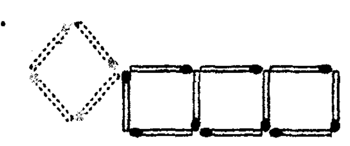
a)



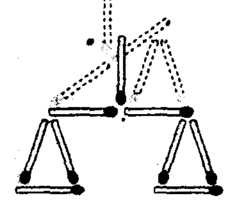
b)



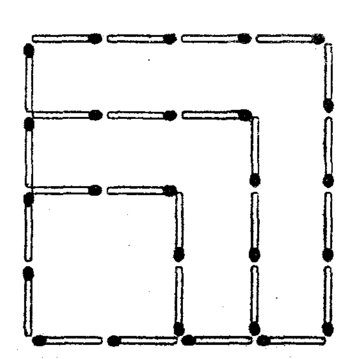
12.



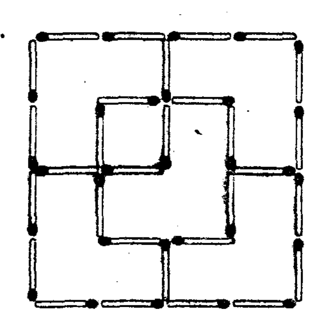
13.



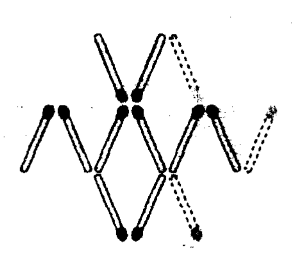
14.



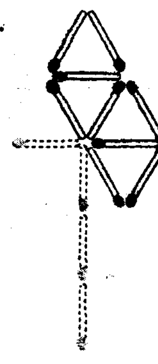
18.



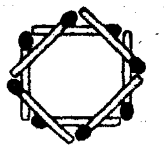
15.



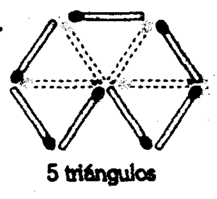
19.



16.



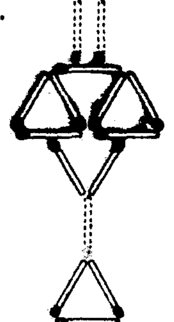
17.



5 triángulos

15 triángulos

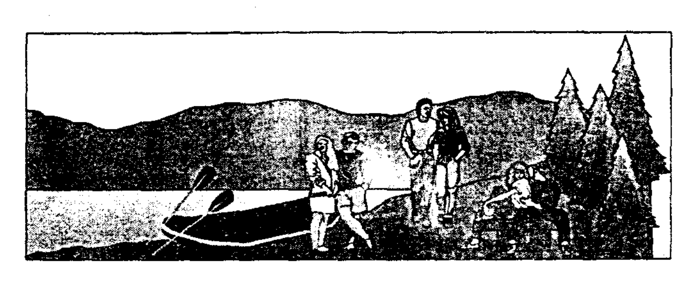
20.



Como puedes apreciar, las soluciones son muy sencillas en algunos casos y en otros, un tanto más elaboradas; pero todas presentan, en menor o mayor grado, dosis de ingenio y creatividad.

II. SITUACIONES DIVERSAS

Los esposos inseparables.



Tres parejas de esposos se fueron de excursión a Loreto. En uno de sus paseos, llegaron a la orilla de un río y acordaron cruzarlo. Disponían para ello de una balsa inflable con capacidad máxima para dos personas. Sin embargo, un obstáculo por poco impidió hacerlo: las esposas se negaban rotundamente a quedarse en compañía de otros que no fuesen sus esposos; manteniéndose inflexibles en este requerimiento. Aceptada la condición, las seis personas pasaron a la otra orilla utilizando el bote disponible. ¿Cómo lo hicieron?

Iniciamos con este problema la sección de situaciones lógico–recreativas en la cual tratamos ejercicios de diferentes tipos que requieren para su resolución de matemáticas elementales, reflexión y persistencia. El objetivo: ejercitar tu poder de análisis.

Veamos ahora la solución de este primer ejercicio.

Denominemos A; B; C; a *los esposos y* a; b; c; a las *esposas, respectivamente.*

Tenemos:

Primera orilla	Segunda orilla
A B C	. . .
a b c	. . .

1. Primero cruzan el río dos esposas.

A B C	. . .
. . c	a b .

2. Una de ellas regresa y luego cruza el río con la tercera esposa.

A B C	. . .
. . .	a b c

3. Regresa una de las esposas y se queda con su cónyuge; los otros dos esposos cruzan el río.

. . C	A B .
. . c	a b .

4. Uno de los esposos vuelve con su esposa a la primera orilla, la deja en ella y regresa a la segunda orilla con el tercer esposo.

. . .	A B C
. b c	a . .

5. La esposa **a** cruza el río y recoge a una de las esposas en la otra orilla (digamos por ejemplo a **b**).

. . .	A B C
. . c	a b .

6. Finalmente, el esposo C recoge a su esposa.

. . .	A B C
. . .	a b c

Ejemplo 1

Si "n es la cantidad de meses del año que contiene 30 días, ¿cuál es el valor de n^2?

Resolución:

¿Acaso nos están diciendo que "n" es el número de meses que tiene exactamente 30 días? ¡Pues no!

El ejercicio está indicando que "n" es el número de meses que **contiene 30 días** y no el número de meses que exactamente contienen 30 días.

Por lo tanto, excepto el mes de febrero, todos los meses contienen 30 días (algunos exactamente 30 días y otros 31 días). Luego n = 11

$$\therefore\ n^2 = 121$$

Ejemplo 2

En cierto código secreto para descifrar mensajes en claves, por cada consonante se escribe la consonante inmediata anterior y cada vocal se cambia por la vocal inmediata posterior.

Por ejemplo: José se escribirá como Huri

¿Qué palabra daría origen a "**examen**"?

Resolución:

J	O	S	E		E	X	A	M	E	N
Const. Ant.	Vocal Post.	Const. Ant.	Vocal Post.	⇄	Vocal Post.	Const. Ant.	Vocal Post.	Const. Ant.	Vocal Post.	Const. Ant.
↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	U	R	I		Ⓐ	Ⓨ	Ⓤ	Ⓝ	Ⓐ	○

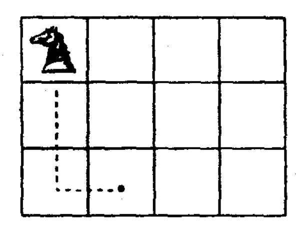
Luego:

En el lugar vacío debe ir la consonante Ñ.

Ejemplo 3

Se tiene el tablero mostrado y una pieza de ajedrez. Empezando del lugar indicado, se debe recorrer con el caballo todos los casilleros de un solo intento, sin que éste pise, es decir, que se detenga más de una vez, un mismo casillero. Recuerda que el desplazamiento del caballo de ajedrez es en forma de "L". ¡Adelante! ...

Con líneas punteadas te damos un ejemplo de a dónde puede llegar el caballo con el movimiento indicado.



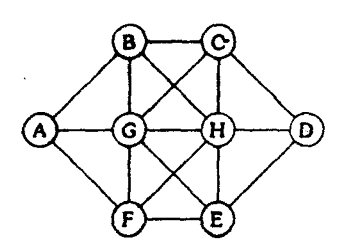
Resolución:

Existe más de una solución, para este ejercicio. Te presentamos una de ellas. Para mejor comprensión hemos enumerado cada movimiento en forma ordenada y de manera creciente.

	3°	6°	9°
11°	8°	1°	4°
2°	5°	10°	7°

Ejemplo 4

En el esquema mostrado, reemplaza cada letra por un número escogido del 1 al 8, de modo que no aparezcan dos números consecutivos en dos círculos conectados directamente por una línea. Dar como respuesta la suma de los valores de B, C, E, F.



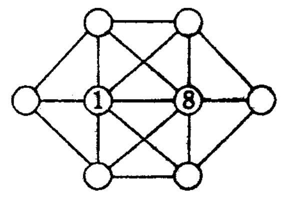
Al distribuir : 1,2,3,4,5,6,7,8

existe más de una distribución, pero una sola respuesta.

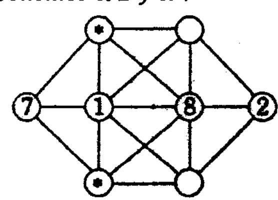
Resolución:

Si colocamos una de las cifras en cualquiera de los casilleros de la periferia, quedarían más de dos casilleros libres para colocar los consecutivos de dicho número. Pero si colocamos un dígito en uno de los 2 casilleros centrales (El casillero G por ejemplo), quedaría un solo casillero libre para colocar el consecutivo de dicho número (casillero D para el ejemplo). Por tanto se concluye que en los casilleros G y H debemos ubicar los dígitos 1 y 8 (pues tienen un solo consecutivo que son el 2 y el 7, respectivamente).

Veamos:

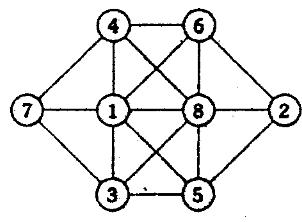


Luego ponemos el 2 y el 7



Como puedes ver nos quedan solamente 2 lugares adecuados para colocar el consecutivo de 2, que es 3, en la gráfica está señalado con asteriscos. Elegimos, de ellos, por ejemplo el de la parte inferior izquierda y ubicamos lo faltante.

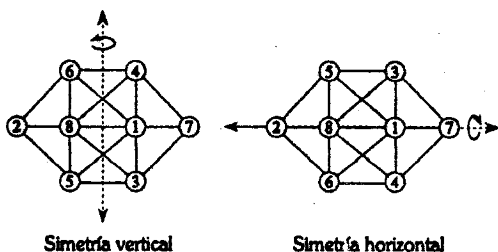
Finalmente, completando la solución tenemos:



Luego: calculando lo que nos piden tendremos:

$$B + C + E + F = 4 + 6 + 5 + 3 = 18$$

Las demás distribuciones se obtienen por simetría, ya sea vertical u horizontal, como te mostramos a continuación:



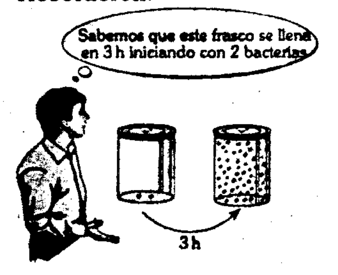
Simetría vertical   Simetría horizontal

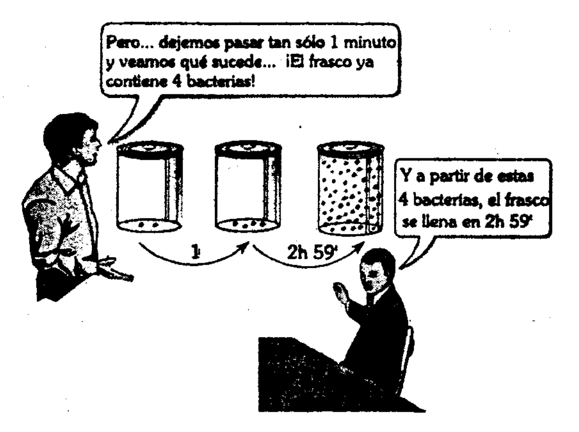
y las que se obtienen combinando ambos movimientos.

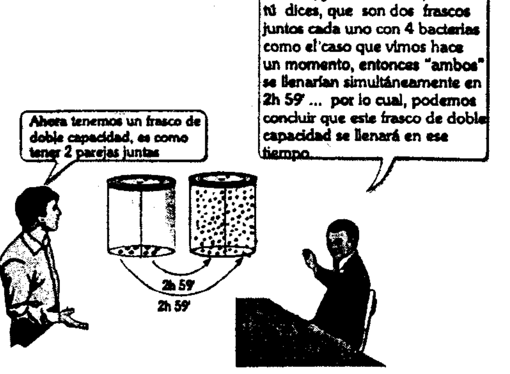
Ejemplo 5

Un frasco contiene dos bacterias, otro frasco, de doble capacidad, tiene ocho bacterias y se sabe que dichas bacterias se duplican en cada minuto transcurrido. Si el primer frasco tardó 3 horas en llenarse completamente. ¿Cuánto tardará el segundo frasco en llenar su capacidad total?

Resolución:







Luego, el segundo frasco se llenará completamente en 2h59'

Ejemplo 6

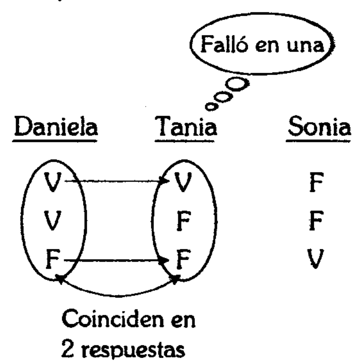
Tres alumnas: Daniela, Tania y Sonia responden verdadero (V) o falso(F) en un examen de tres preguntas de la siguiente manera:

	Daniela	Tania	Sonia
1ra. Pregunta	V	V	F
2da. Pregunta	V	F	F
3ra. Pregunta	F	F	V

Se sabe que una de ellas contestó todas correctamente; otra falló en todas y la otra sólo falló en una pregunta. ¿Quién acertó todas las preguntas?

Resolución:

Según la condición del problema, una acertó en todas y otra falló en todas; entonces la respuesta en cada pregunta de estas dos personas deberán ser contrarias y esto se cumple con Daniela y Sonia. Además como la alumna restante (en este caso Tania) sólo falló en una, debe coincidir, por lo tanto, en dos respuestas con la que contestó todas acertadamente y concluimos que esto se da entre Tania y Daniela.

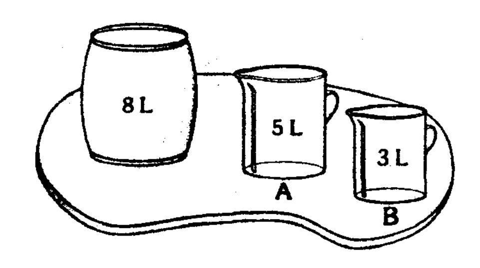


Luego: Daniela acertó en todas sus preguntas, Sonia falló en todas las preguntas y Tania falló en una pregunta.

∴ Daniela acertó en todas las preguntas.

Ejemplo 7

Un barril contiene 8 litros de vino, los cuales deben ser divididos en dos partes iguales, empleando solamente el barril y dos jarros vacíos de 5 y 3 litros de capacidad, (los 3 recipientes no tienen marcas que permitan hacer mediciones). ¿Cuántos trasiegos (traspaso de uno a otro) se deben hacer, como mínimo, para lograr que e. barril y el jarro de 5 litros, contengan cada uno 4 litros de vino?



Resolución:

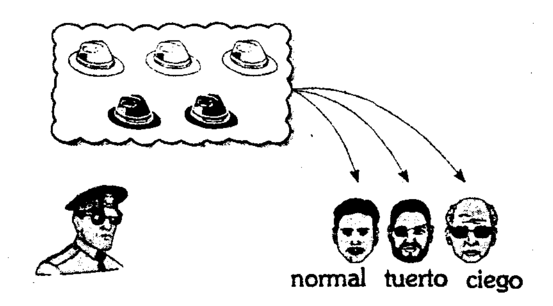
No es posible vaciar exactamente 4 litros del barril al jarro "A", puesto que no hay forma de medirlo; sin embargo es posible hacerlo y para ello presentamos el procedimiento en el siguiente esquema:

	Contenido en vino de cada recipiente							
	Inicio	1ro.	2do.	3ro.	4to.	5to.	6to.	7mo.
arril (8 litros	8	3	3	6	6	1	1	4
arra (5 litros	0	5	2	2	0	5	4	4
arra (3 litros	0	0	3	0	2	2	3	0

Respuesta: 7 trasiegos

Ejemplo 8

De tres prisioneros que se hallaban en una cárcel, uno tenía visión normal, el otro era tuerto y el tercero era ciego. El carcelero ordenó a los prisioneros que de un conjunto de 5 sombreros (3 blancos y 2 negros), podían elegir 3 al azar, y luego colocárselas sobre sus cabezas.



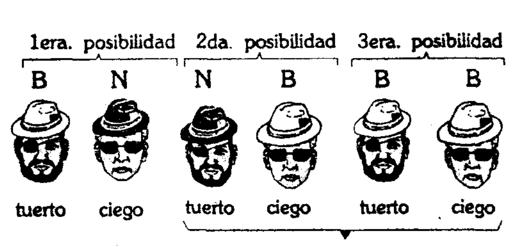
Se prohibió a cada uno de ellos ver el color del sombrero sobre su propia cabeza, pero se les permitió ver el de los otros. El carcelero ofreció libertad a aquel que acertara el color del sombrero que llevaba en su cabeza, con la condición de que el afortunado explique cómo llegó a la respuesta, razonando y no por pura suerte. Se le preguntó al prisionero de visión normal y falló; por ello fue devuelto a su celda. Se preguntó luego al tuerto y también falló; finalmente se le preguntó al ciego y respondió acertadamente, con lo cual, este último logró su ansiada libertad. ¿Cuál fue el razonamiento del ciego y cuál fue su respuesta?

Resolución:

El ciego razonó de la siguiente manera:

"Tenemos 5 sombreros en total: 3 blancos y 2 negros. El carcelero ha escogido al azar 3 de ellos y los ha colocado sobre nuestras cabezas, pero mis dos compañeros han fallado. ¿Por qué falló el primero?"

"¡Humm ...!, veamos, él tenía visión normal así que pudo ver el color del sombrero del segundo compañero y el color del mío también. Si hubiera visto dos sombreros negros no habría fallado porque sólo hay 2 sombreros de ese color y hubiera concluido que el suyo era blanco. Pero ... ¡falló!, lo cual quiere decir que no vio dos sombreros negros. ¿Qué vio entonces? Lo que él vio fue una de estas 3 posibilidades:



Por eso es que el primero falló; porque tuvo dudas sobre el color de su sombrero. Pero el segundo también falló a pesar de que tenía visión en un ojo. ¿Por qué razón falló el segundo? Analizando he llegado a establecer que sólo pueden darse las posibilidades mencionadas arriba".

"Sin embargo, la primera posibilidad es fácil de eliminar, veamos por qué: Habiendo fallado el primero, le tocaba el turno al tuerto quien pudo mirar el color del sombrero que estaba sobre mi cabeza; y si él hubiera visto un sombrero de color negro, hubiera dicho:

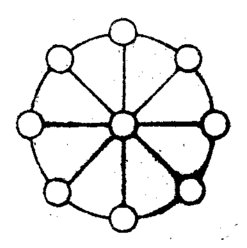
"*Veo que el ciego tiene un sombrero negro y si el* mío también fuera negro, el primer compañero, viendo dos sombreros negros, no se hubiera equivocado y estaría libre, entonces mi sombrero debe ser de color blanco".

Razonando así, en base a la primera posibilidad, el tuerto no hubiera fallado y en estos momentos estaría libre. Pero se equivocó porque tuvo dudas, lo que vio sobre mi cabeza no fue un sombrero negro, sino uno blanco.

¡En conclusión, mi sombrero es de color blanco!".

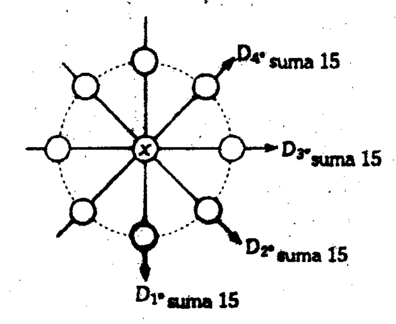
Ejemplo 9

Las cifras del 1 al 9 hay que distribuirlas en la rueda de la figura, una cifra debe ocupar el centro del círculo y las demás los extremos de cada diámetro, de manera que tres dígitos de cada diámetro sumen siempre 15.



Resolución:

Llamemos x al número que va a estar ubicado en el centro.



Notamos que hay 4 diámetros y todos ellos comparten el número central, siendo la suma de los tres números distribuidos en cada uno de ellos siempre 15 (por dato).

Si sumamos todos los números de los cuatro diámetros; como cada diámetro tiene 3 números estaremos sumando doce números en total, pero sólo tenemos nueve (los dígitos son desde 1 hasta 9). Esto quiere decir que uno de los números (en este caso evidentemente el central) se está tomando 3 veces más, luego:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+3x$$

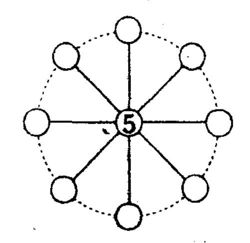
$$15 \quad 15 \quad 15 \quad 15$$

$$60 = 45 + 3x$$

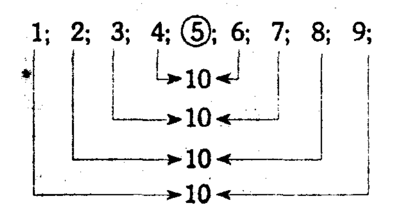
$$15 = 3x$$

$$5 = x$$

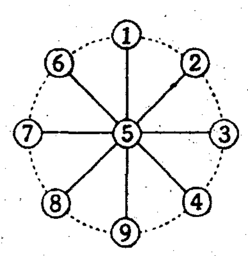
Así, el número 5 va en el centro de la "rueda", faltando colocar los demás. La suma de los números de los extremos de cada diámetro deberá ser 10, veamos:



Observa como se obtiene la suma 10:



Entonces queda :



Ejemplo 10

El patio de una cárcel tiene dos puertas una de las cuales da a la calle y la otra conduce nuevamente a las celdas. Las puertas están vigiladas por dos guardianes: uno que dice siempre la verdad y otro que siempre miente. Tito está preso y tiene la oportunidad de salir, si acierta con la puerta que da al exterior, para ello le está permitido hacer una única pregunta a cualquiera de los dos guardianes, pero no sabe cuál de ellos es el mentiroso. Luego de un rato, acercándose a uno le preguntó: "¿Qué puerta me indicaría tu compañero si le preguntase por la puerta que da a la calle?". Si con la respuesta recibida logró salir, ¿cuál fue la puerta que eligió y cuál fue su razonamiento?

Resolución:

Designemos con "A" la puerta que da a la calle y con B, la que da a las celdas.

Tito se acercó a uno de los guardianes, pero no se sabe a quién. Hay dos posibilidades: el guardián es mentiroso o el guardián es sincero; y ambas deben de ser analizadas por Tito antes de formular su pregunta.

1ra. Posibilidad:

Se acercó al guardián mentiroso (aunque Tito ignora si es mentiroso o sincero) y le hizo la pregunta dada.

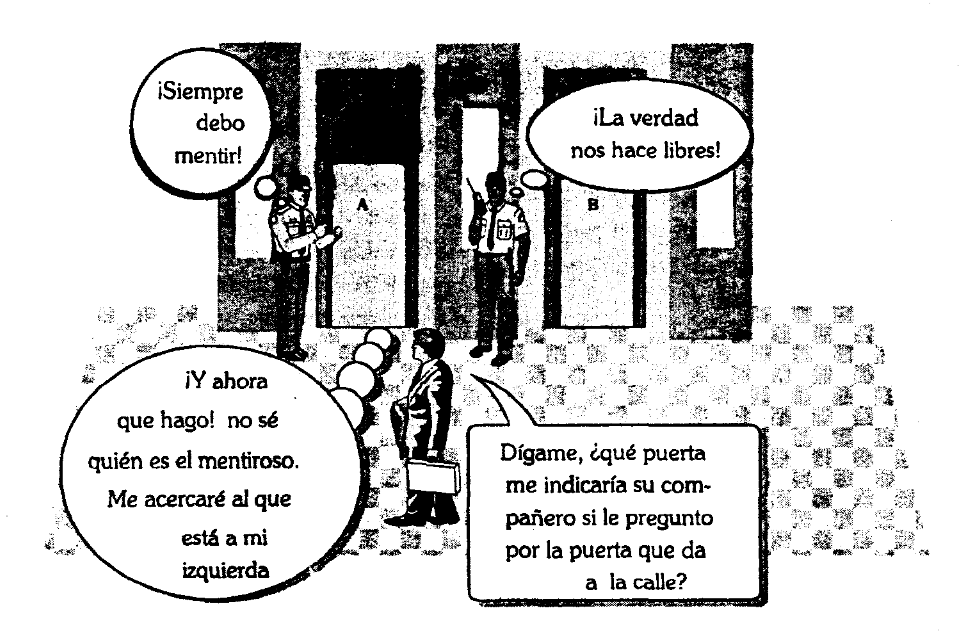
Como el guardián es mentiroso – pero Tito no lo sabe– le dirá una mentira. "Mi compañero te va a contestar que la puerta que da a la calle es la puerta B", (gran mentira y si Tito le hiciera caso volvería a las celdas!)

2da. Posibilidad:

Sin saberlo, se acercó al guardián sincero y le hizo la pregunta dada. ¿Qué puerta me indicaría tu compañero si le pregunto por la puerta que da a la calle?

Como dicho guardián siempre dice la verdad – pero repetimos: Tito no lo sabe–, lo que él diga será cierto. Su pensamiento sería: "Mi compañero es un guardián mentiroso y le va a decir a este muchacho que la puerta que da a la calle es la puerta B. Debo, pues, decirle a este joven la verdad"; y, en efecto, el guardián sincero al hablar diría: "Mi compañero te indicaría que la puerta que da a la calle es la puerta B".

En cualquiera de las 2 posibilidades analizadas, Tito recibiría la misma respuesta: "La puerta que da a la calle es la B", ¡justo la que conduce a las celdas es la B!; luego, para salir tendría que elegir la otra puerta, es decir, la puerta "A".



III. PROBLEMAS SOBRE PARENTESCOS

Muchos problemas de lógica recreativa nos presentan situaciones de relaciones familiares (parentescos) en los cuales, por lo general, se aprecian enunciados de difícil comprensión por lo "enredado" de su texto; por este motivo se requiere de una atención adecuada para llevar a cabo el proceso lógico – deductivo que nos conduzca a la solución.

Debemos tener presente, al momento de realizar la resolución, que cada uno de los integrantes de la familia puede desempeñar en un mismo problema papeles diferentes; así por ejemplo, una persona puede ser al mismo tiempo, y según se indique: padre, hijo, hermano, cuñado, esposo , abuelo, etc. En el problema de esta clase deberemos asumir que básicamente la familia la componen padres e hijos, pero hay problemas en los cuales es necesario "extender" dicha composición incluyendo a los hermanos de nuestros padres (tíos) y los hijos de éstos (nuestros primos); abuelos; bisabuelos etc.

CLASES

Usualmente las interrogantes más frecuentes versan sobre un tipo específico de relación familiar entre algunos componentes de la familia; sobre el número de integrantes que la componen o el rol que desempeñan.

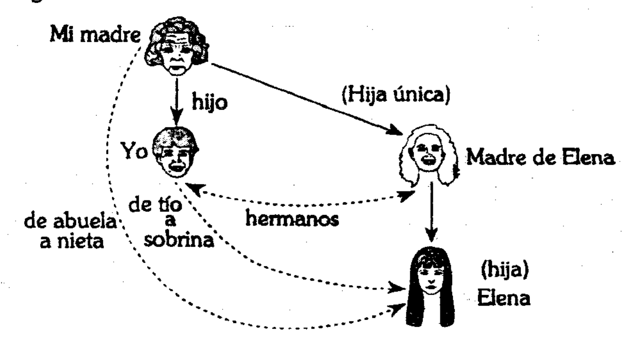
A. PROBLEMAS SOBRE UN TIPO ESPECÍFICO DE RELACIÓN FAMILIAR

Ejemplo 1
¿Qué parentesco tiene conmigo Elena, si se sabe que su madre fue la única hija de mi madre?

Resolución:
En el texto encontramos a los siguientes integrantes.

- Elena
- Madre de Elena
- Mi madre
- Yo

Observación:
La madre de Elena es hija única de mi madre.



La líneas punteadas nos señalan las relaciones que estamos deduciendo según el enunciado.

Luego, el parentesco que tenemos Elena y yo es de tío – sobrina

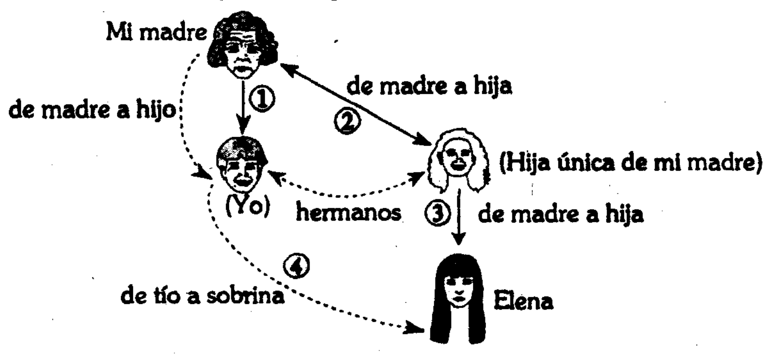
Otro método

Consiste en fijarnos atentamente en todo el enunciado que nos dan y enumerar ciertas partes, veamos:

"¿Qué parentesco tiene conmigo Elena (4), si se sabe que su madre (3) es hija única de (2) mi madre (1)?"

A propósito, hemos reproducido aquí el texto del ejemplo con las líneas visualmente separadas y hemos numerado algunas partes del mismo. Pero, ¿cómo se sabe qué parte del texto se debe numerar? Además ¿por que la numeración se hace de manera decreciente en el sentido en que hacemos la lectura? Bueno, demos respuesta a estas interrogantes.

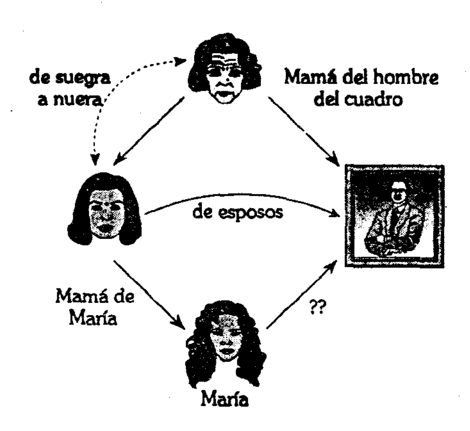
En principio, las partes numeradas resaltan a los integrantes de la familia identificados en el texto como en el método anterior. Ahora la numeración se realiza del modo y sentido indicado por razón de su utilidad en la construcción del siguiente diagrama:



En este método estamos trabajando directamente con el texto del problema dado, subrayando sus partes.

Ejemplo 2

Observa el siguiente diálogo



Resolución:

Al analizar la afirmación dada por María, podemos establecer el siguiente diagrama:

Por la respuesta de María, inferimos que su madre y el hombre del cuadro **son esposos**.

Entonces, María concluye:

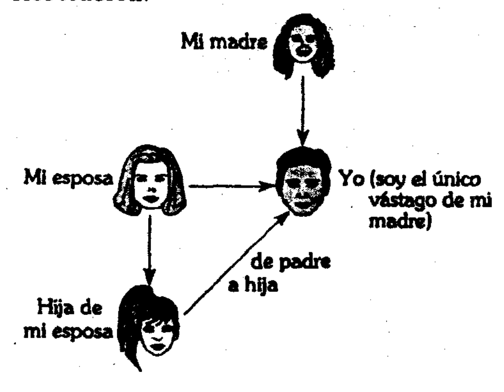
"Ese hombre es mi padre"

∴ La relación de parentesco entre María y el hombre del cuadro es **de hija a padre**.

Ejemplo 3

¿Qué parentesco tiene conmigo una mujer que es la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

Resolución:

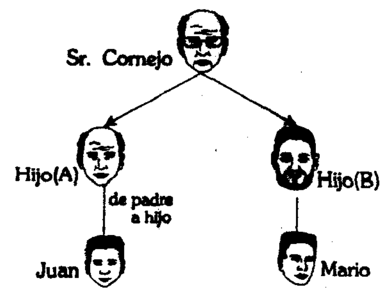


Del diagrama deducimos que dicha "mujer" es mi hija.

Ejemplo 4

El señor Cornejo tiene 2 hijos únicamente, éstos a su vez son padres de Juan y Mario, respectivamente. ¿Quién es el único sobrino del padre del primo hermano del hijo del padre de Mario?

Resolución:



Analizando en bloques desde la parte final:

.... del padre del primo hermano del hijo del padre de Mario → Mario

- Único sobrino del padre del primo hermano d Mario → Juan
- Único sobrino del padre de Juan → (A)
- Único sobrino de A → Mario

∴ Rpta: Mario

Ejemplo 5

Juan es el padre de Carlos, Óscar es hijo de Pedro y a la vez hermano de Juan. ¿Quién es el padre del tío del padre del hijo de Carlos?

Resolución:

De la condición se deduce que Óscar es tío de Carlos.

Analizando la pregunta:

¿Padre del tío del padre del hijo de Carlos? → Carlos

¿Padre del tío de Carlos? → Óscar

∴ La respuesta es: Pedro

Ejemplo 6

¡Atención a este interesante ejercicio!

Yo tengo un hermano únicamente. ¿Quién es el otro hijo del padre del tío del hijo de la mujer del hijo de mi padre que, sin embargo, no es mi hermano?

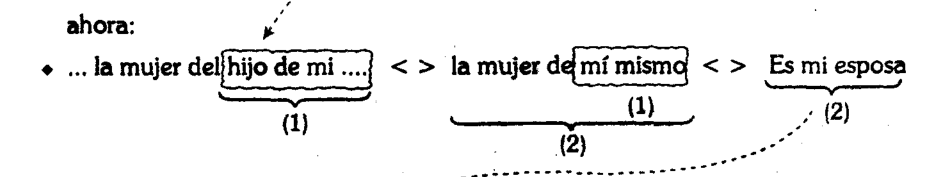
Resolución:

Del texto se sabe que somos únicamente 2 hermanos (Yo soy uno de ellos); ahora, intentemos desenredar este embrollo, empezando por la parte final y "retrocediendo" en el texto.

- el **hijo de mi padre que, sin embargo, no es mi hermano** <> Soy yo **mismo.**

(1)

ahora:



- **el tío del hijo de la mujer de .. <> tío del hijo de mi esposa <> Es mi hermano**

  mi esposa (3)

- **... el otro hijo del padre del tío del .. <> el otro hijo del padre de mi hermano <> Soy yo**

  mi hermano — es mi padre

∴ **La respuesta es:** Soy yo

Ejemplo 7

La comadre de la madrina **del sobrino de mi única hermana**, ¿qué es de mí?

Resolución:

Escribamos el texto para analizarlo.

La comadre de la madrina **del sobrino de mi única hermana.**

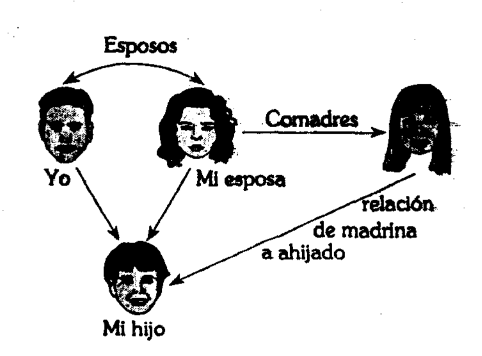
mi hijo

La comadre de la madrina de mi hijo

mi esposa

La persona buscada es mi *esposa*, *sencillo ¿no?*

También podemos hacer el esquema:



Ejemplo 8

Mi nombre es Rocío y mi hermana es Yuli, además mi abuela tuvo un hijo solamente. ¿Qué parentesco tiene conmigo la hija de la nuera **de la** mamá de mi madre?

Resolución:

... hija de la nuera de la mamá de mi madre

mi abuela

... **hija de la nuera de mi abuela**

mi mamá

<> hija de mi mamá

Luego, la pregunta se vería reducida a ¿qué parentesco tiene conmigo la hija de mi mamá? ¡Bueno, ... somos hermanas!

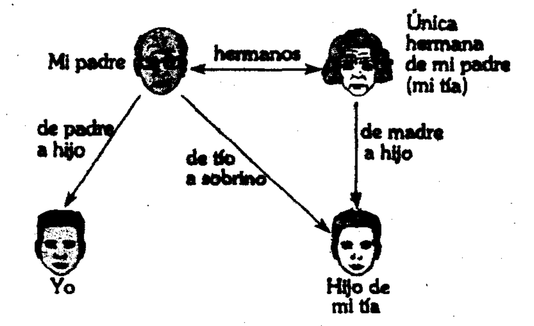
∴ Yuli es mi hermana.

Ejemplo 9

Mi nombre es Daniel, ¿qué parentesco tiene conmigo el tío del hijo de la única hermana de mi padre?

Resolución:

Hagamos un gráfico.



Del cuadro, se deduce que **mi padre** es el tío del hijo de su hermana.

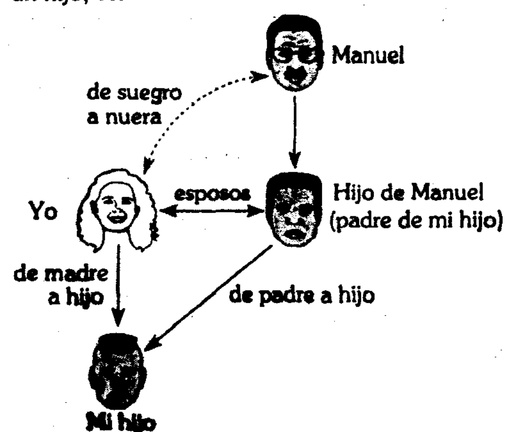
∴ Es mi padre.

Ejemplo 10

Si **el hijo de** Manuel es el padre mi hijo, ¿qué parentesco tengo con Manuel?

Resolución:

Deducimos del texto: "... el hijo de Manuel es el padre de mi hijo", que yo soy mujer y que tengo un hijo, así:



∴ Es mi suegro.

B. PROBLEMAS SOBRE CANTIDAD DE INTEGRANTES DE LA FAMILIA

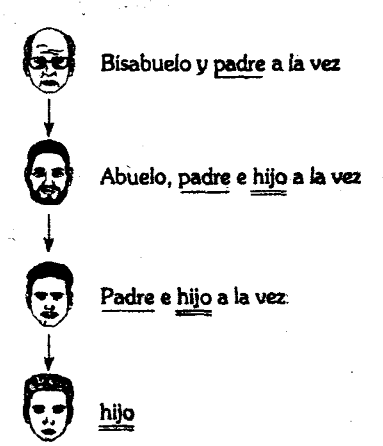
En esta clase de problemas, usualmente se pide la cantidad mínima de personas que integran un grupo familiar. Debemos de atribuir a cada persona la mayor cantidad posible de características dadas en el texto para que, así, el número de personas se reduzca al mínimo.

Ejemplo 1

En una fábrica trabajan tres padres y tres hijos. ¿Cuál es el menor número de personas que pueden trabajar en esa fábrica?

Resolución:

En primer lugar, no nos olvidemos de atribuir las mayores características a las personas para que su número sea mínimo.



∴ Respuesta: 4 personas.

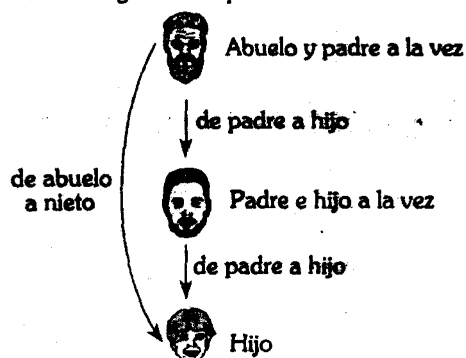
Ejemplo 2

En una cena familiar se encuentran 2 padres, 2 hijos y 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo están compartiendo la cena?

Resolución:

Quizá pensamos que hay 5 personas pero no ocurre así, pues buscamos la cantidad mínima de personas.

Veamos el siguiente esquema:



Observamos que hay 2 padres, 2 hijos y 1 nieto, según lo estipulado.

Luego: la cantidad mínima de personas que cumplen con las características mencionadas es tres.

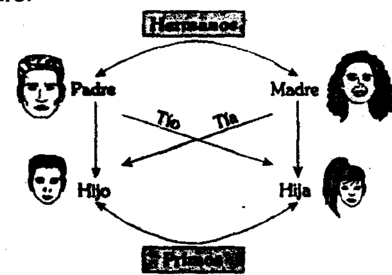
∴ Respuesta: tres personas.

Ejemplo 3

Atendiendo un almuerzo el mozo de un restaurante preguntó a una familia: "¿Cuántos son?" El papá contestó: "Somos: padre, madre, tío, tía, hermano, hermana, sobrino, sobrina, y dos primos". ¿Cuál es el mínimo número de personas en dicha familia?

Resolución:

Aparentemente se trata de una familia numerosa; pero... ¡cuidado!..., piden la cantidad mínima, no se deje llevar por la apariencia, pues son solamente 4, ¿por qué? Observa el siguiente esquema, la resolución se aprecia mejor con un cuadro.

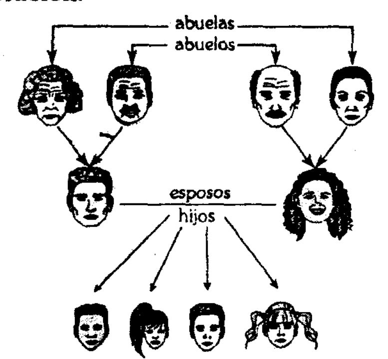


∴ Respuesta: 4 personas.

Ejemplo 4

En una familia están presentes 2 abuelos, 2 abuelas, 3 padres, 3 madres, 3 hijos, 3 hijas, 2 suegras, 2 suegros, 1 yerno, 1 nuera, 2 hermanos y 2 hermanas. ¿Cuántas personas se encuentran presentes como mínimo?

Resolución:



∴ Respuesta: 10 personas.

Ejemplo 5

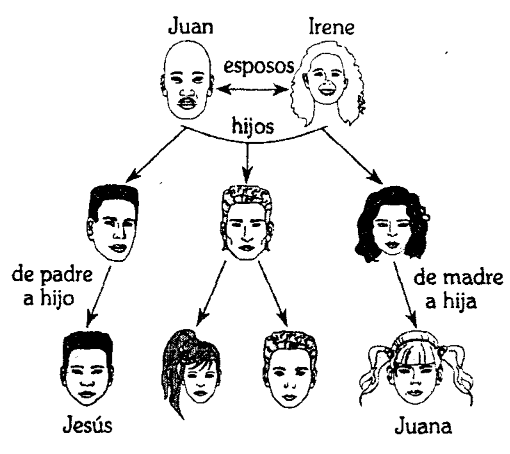
El matrimonio Irene y Juan tuvo 3 hijos: Jesús es hijo del hijo de Juan. Juana es hija de la hija de María. Si los hijos del otro hijo de Juan son 2:

a) ¿Cuántos primos en total tiene estos últimos?

b) ¿Cuántos primos tiene Juana?

Resolución:

Hagamos un esquema:



Luego : a) Tienen 2 primos.

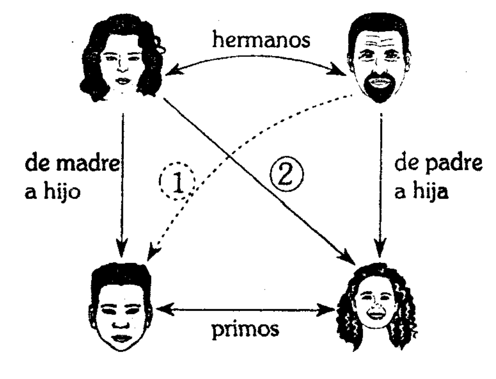
b) Juana tiene 3 primos.

Ejemplo 6

En un almuerzo estaban presentes; padre, madr tío, tía, hermano, hermana, sobrino, sobrina y primos. ¿Cuál es el menor número de person presentes?

Resolución:

Haciendo un esquema:

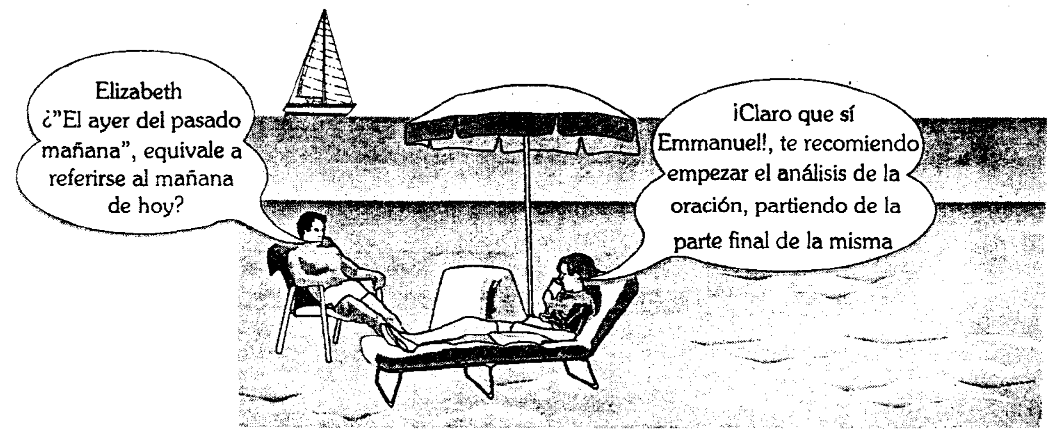


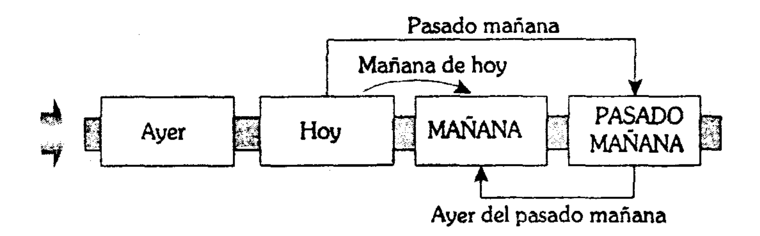
① De tía a sobrino ② De tío a sobri

∴ Deben estar presentes mínimamente personas.

IV. PROBLEMAS SOBRE RELACIÓN DE TIEMPOS

"Escuchemos el siguiente diálogo y observemos, a continuación, el esquema que se deriva de él.





Vemos que nuestro discurrir nos conduce, en efecto, al mañana de hoy.

Al momento de resolver problemas de este tipo se sugiere tener en consideración el criterio de analizar las condiciones partiendo de la parte final y siguiendo un procedimiento regresivo, en forma análoga a lo que se hizo en problemas sobre parentescos.

Ejemplo 1

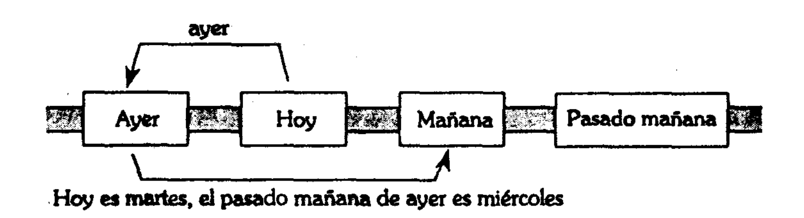
Siendo miércoles el pasado mañana de ayer, ¿qué día será el mañana del anteayer de pasado mañana?

Resolución:

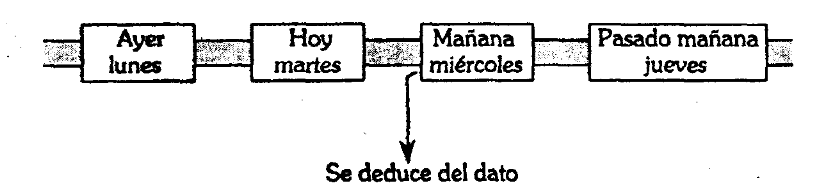
¡Presta mucha atención! ... en principio, ubicamos linealmente en forma horizontal el devenir del tiempo: *ayer; hoy; mañana, etc.*

Del dato: El pasado mañana de ayer <> Es miércoles

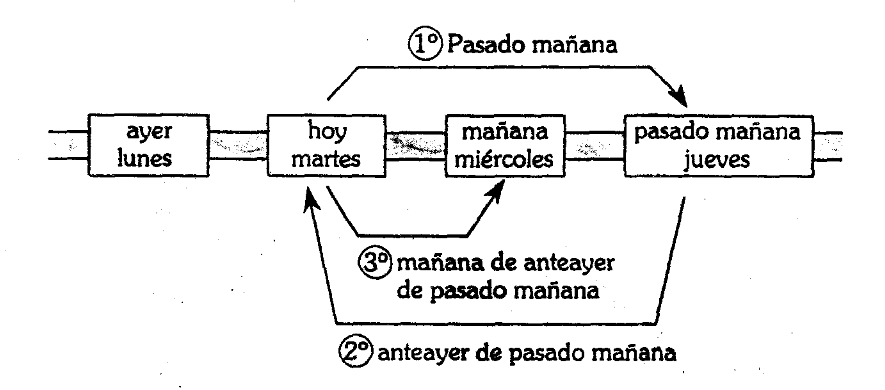
Tenemos:



entonces hoy es martes y completando el esquema anterior tendríamos:



Ahora, nos piden averiguar qué día será "el mañana del anteayer de pasado mañana", utilizando el segundo esquema daremos respuesta a la pregunta, veamos:

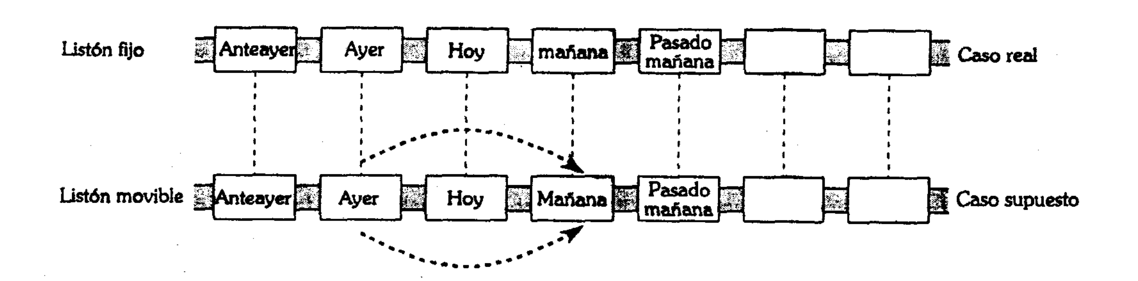


Entonces, el día pedido es miércoles.

Ejemplo 2
Si el día de ayer fuese como mañana, faltarían 4 días para ser sábado. ¿Qué día de la semana fue anteayer?

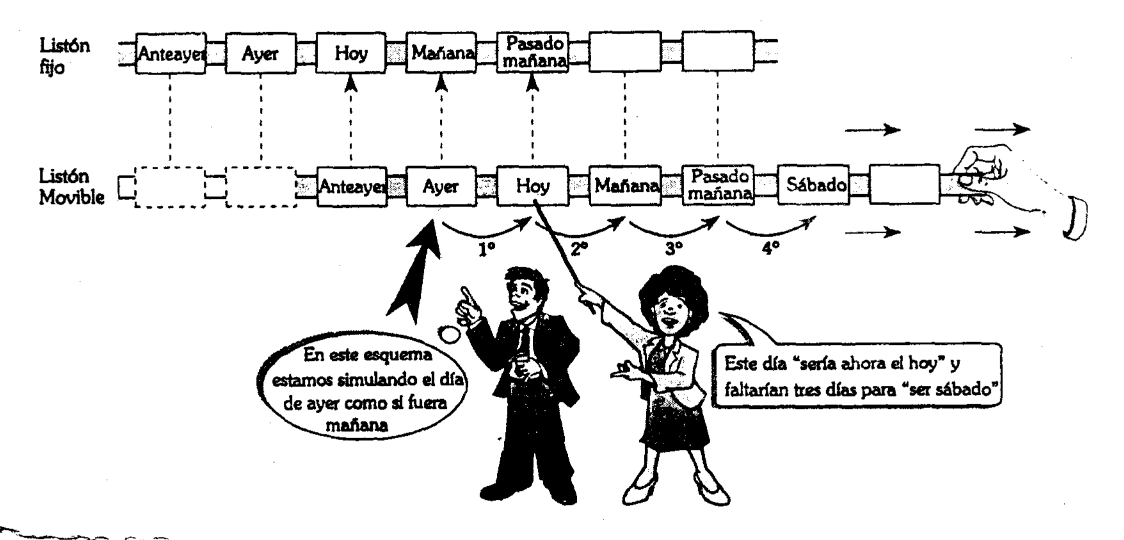
Resolución:

Imaginamos que tenemos 2 listones de papel uno fijo y otro movible en los cuales ubicamos el transcurrir de los días como sigue:

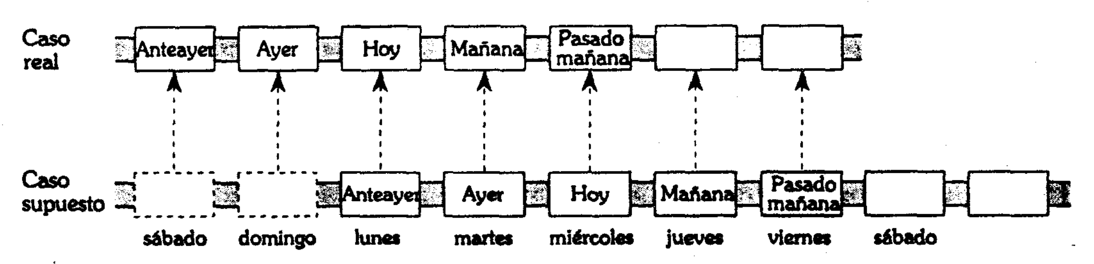


El listón fijo representará el verdadero transcurrir de los días (el cual no se altera), mientras que el listón movible se va a adecuar a la situación descrita en el problema simulando el "desplazamiento" de los días: ... "si el día de ayer fuese como mañana ..."

Vamos, pues, a "desplazar" el ayer hasta el mañana:



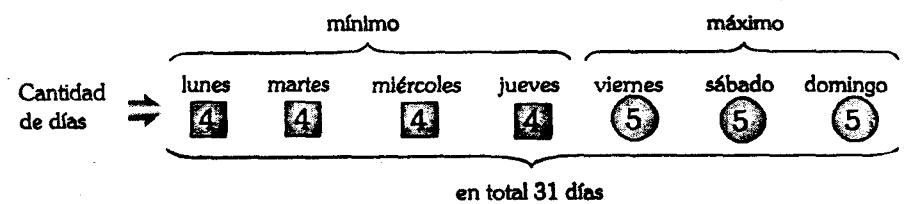
Completando el esquema, a partir del dato del día sábado, tendremos:



Luego, el "hoy" verdadero es lunes y, por lo tanto, la respuesta es: anteayer fue sábado.

Ejemplo 3
En un determinado mes existen 5 viernes, 5 sábados y 5 domingos. ¿Qué día de la semana caerá el 23 de dicho mes y cuántos días tiene?

Resolución:
Sabemos que un día cualquiera de la semana se presenta como mínimo 4 veces y como máximo 5 veces en un mes, y como el dato menciona que hay 5 viernes, 5 sábados y 5 domingos, entonces la cantidad de días lunes, martes, miércoles y jueves, será mínimo; es decir, cuatro de cada uno de ellos.
Así:



Luego, confeccionamos el mes que cumple esta condición: Un mes de 31 días.

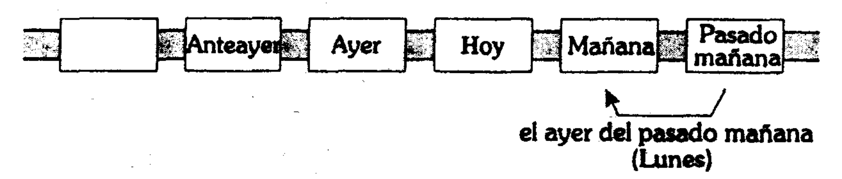
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Como ves, hay 5 viernes, 5 sábados y 5 domingos

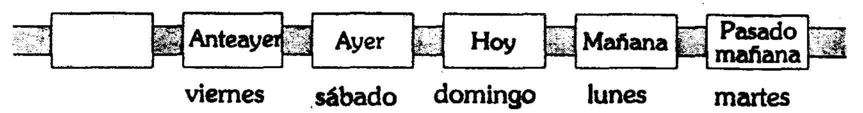
∴ El 23 de este mes cae sábado.

Ejemplo 4
Si el ayer de pasado mañana es lunes, ¿qué día será el mañana de ayer de anteayer?

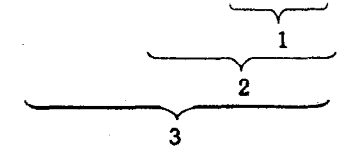
Resolución:
Dato: el ayer de pasado mañana es lunes.
Hagamos un esquema para ubicar el hoy y a partir de ahí, averiguar el ayer de pasado mañana.

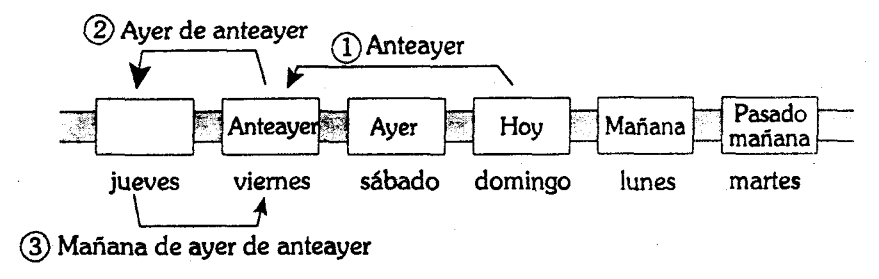


Luego, se completan los días de la semana.



Ahora, sobre este esquema podemos encontrar la respuesta a la interrogante planteada. Veamos:
¿Qué día será el mañana de ayer de anteayer?





∴ Será día viernes

Ejemplo 5
Se sabe que mi cumpleaños es el 27 de este mes y el mes pasado tuvo más días viernes, sábados y domingos. Además, la fecha del penúltimo viernes del mes pasado, sumada a la fecha del último sábado del mes que viene, es 46. Determinar qué día de la semana caerá mi cumpleaños dentro de 3 años, si el año pasado fue bisiesto.

Resolución:
Según el enunciado el mes pasado hubo más días viernes y no sábados y domingos. Esto nos indica que el mes comenzó un día viernes y que duró 31 días; podemos reconstruir entonces el mes pasado y afirmar que el mes actual empieza un día lunes (pero no sabemos cuándo termina).

Mes pasado

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Mes actual

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Mes próximo

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

Del dato que nos dan y del cuadro anterior deducimos :

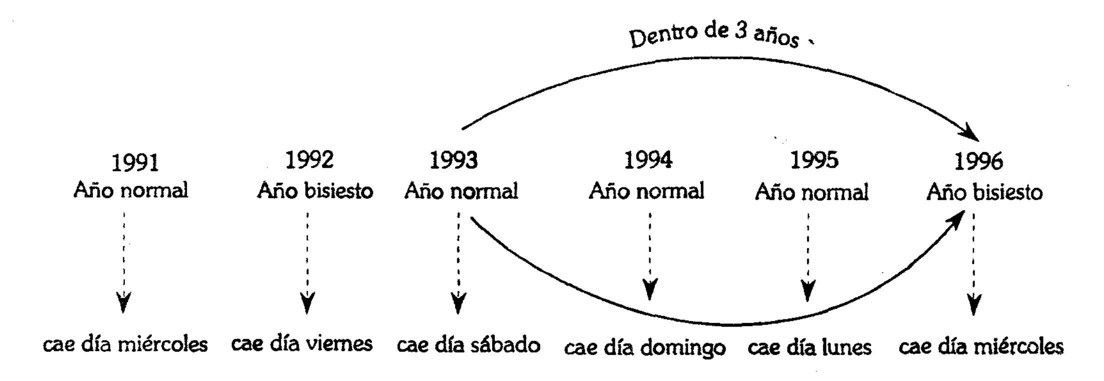
$$\begin{pmatrix}\text{Penúltimo viernes del}\\ \text{mes pasado}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Último sábado}\\ \text{del mes que viene}\end{pmatrix} = 46$$

$$22 \quad + \quad x \quad = 46$$

$$\Rightarrow \quad x = 24$$

El valor de $x = 24$ nos indica que esa será la fecha del último sábado del mes próximo; de aquí deducimos que el último día de dicho mes será el viernes 30 y además, ese mes comenzará un día jueves. Si el próximo mes comienza un día jueves, entonces el último día del presente mes será miércoles 31, pues al comienzo deducimos que nuestro mes actual se inició un lunes 1.

Luego, como mi cumpleaños es el 27 de este mes, ese día cae sábado y además el año **pasado fue** bisiesto (podríamos tomar como referencia, por ejemplo, el año 1 992). Entonces tendríamos:

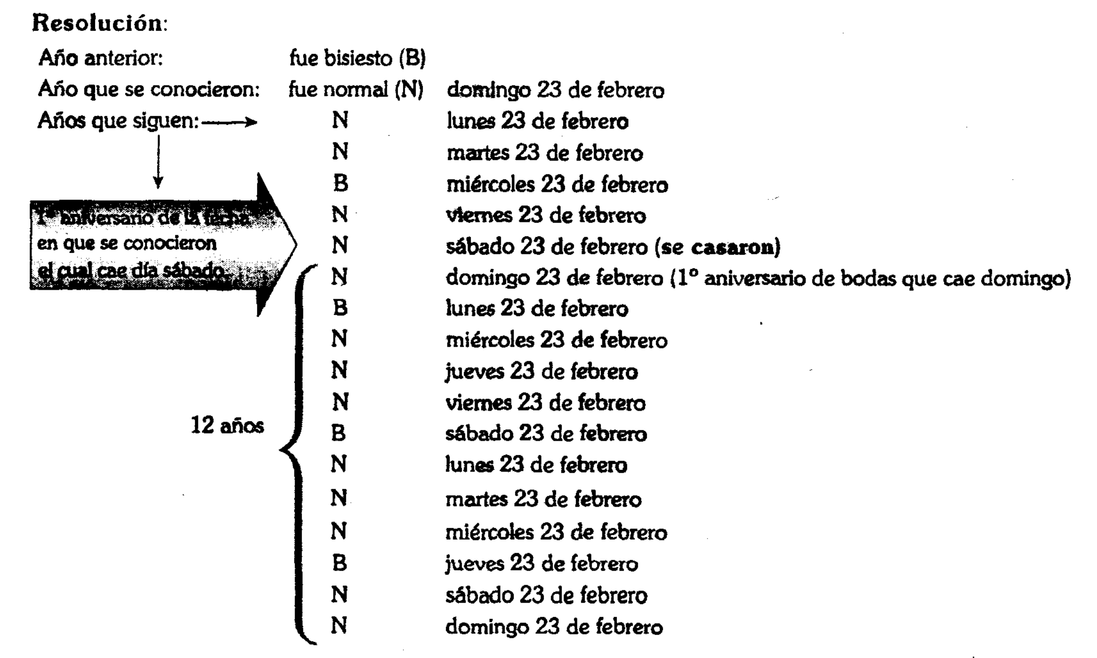


∴ Luego, dentro de tres años, mi cumpleaños caerá un día miércoles.

Ejemplo 6

Antonio y Paola se conocieron un domingo 23 de febrero de un año no bisiesto (el año anterior había sido bisiesto) y se casaron cuando el aniversario de la fecha en que se conocieron fue, por primera vez, un día sábado. Si hoy están celebrando el día de su boda y es la segunda vez que cae un día domingo, ¿cuántos años han pasado desde que se casaron?

Resolución:



Año anterior:	fue bisiesto (B)	
Año que se conocieron:	fue normal (N)	domingo 23 de febrero
Años que siguen: →	N	lunes 23 de febrero
	N	martes 23 de febrero
	B	miércoles 23 de febrero
	N	viernes 23 de febrero
	N	sábado 23 de febrero (**se casaron**)
	N	domingo 23 de febrero (1° aniversario de bodas que cae domingo)
	B	lunes 23 de febrero
	N	miércoles 23 de febrero
	N	jueves 23 de febrero
	N	viernes 23 de febrero
	B	sábado 23 de febrero
	N	lunes 23 de febrero
	N	martes 23 de febrero
	N	miércoles 23 de febrero
	B	jueves 23 de febrero
	N	sábado 23 de febrero
	N	domingo 23 de febrero

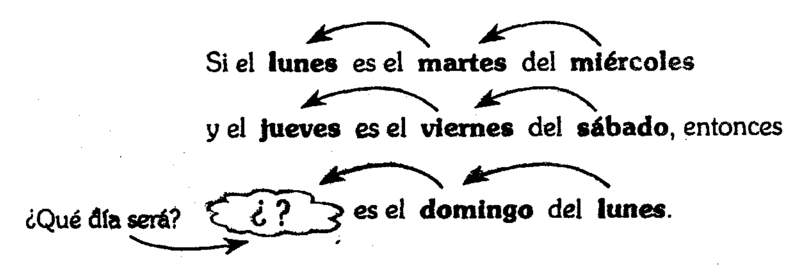
∴ Han transcurrido 12 años desde que se casaron.

Ejemplo 7

Si el lunes es el martes del miércoles y el jueves es el viernes del sábado, entonces, ¿qué día será el domingo del lunes?

Resolución:

Escribamos el texto, línea por línea, y nos daremos cuenta de lo que ocurre:



Es evidente que los días mencionados en una misma línea son consecutivos por lo tanto el día que va en la nube es sábado.

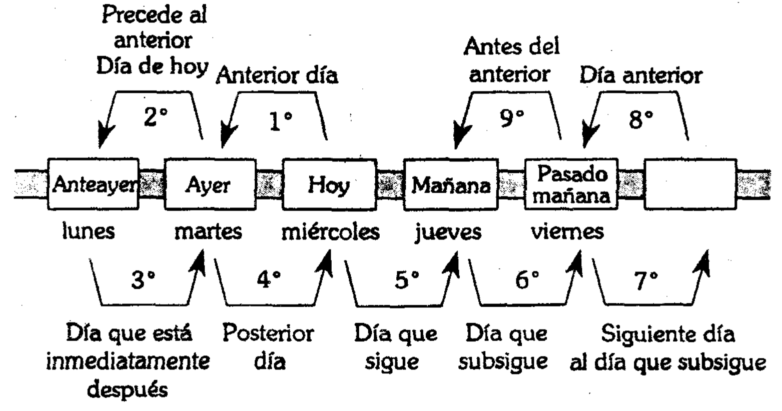
∴ Respuesta: sábado

Ejemplo 8

¿Cuál es el día que está antes del anterior al siguiente día que subsigue al posterior día que está inmediatamente después del día que precede al anterior día de hoy miércoles?

Resolución:

Dato: hoy es miércoles. No olvidemos empezar por la parte final del texto. Además haremos un esquema como los anteriores donde empezaremos a trabajar a partir del día de hoy. Entonces tendríamos:



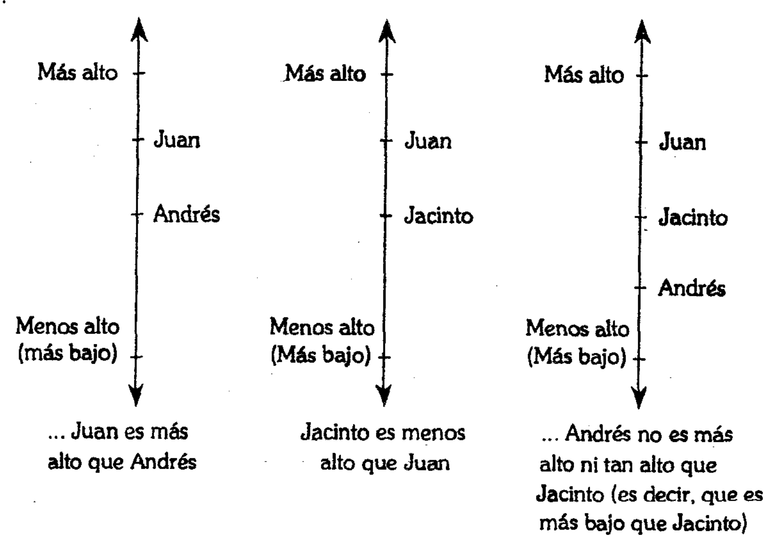
∴ El día pedido resulta ser el día de mañana, jueves.

V. ORDEN DE INFORMACIÓN

Observemos la siguiente escena:

Según la respuesta de Norma, María pudo deducir la respuesta. ¿Cuál fue?

Resolución:



De acuerdo a los esquemas mostrados podemos concluir que el más alto es Juan y el más bajo es Andrés. El orden, según el tamaño, sería el del esquema de la derecha.

En esta sección hay una gran diversidad de problemas y para poder estudiarlos los agruparemos, según sea la forma de ordenar la información, en:

A. Ordenamiento lineal (se ordena en fila o columna).
B. Ordenamiento circular (se ordena alrededor de un objeto).
C. Ordenamiento en tablas de doble entrada.

A. ORDENAMIENTO LINEAL

En este caso el orden de la información se realiza ubicando los datos en forma vertical u horizontal según sea el caso.

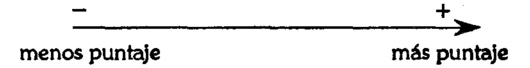
Ejemplo 1
Cinco personas rinden un examen. Si se sabe que:

- B obtuvo un punto más que D
- D obtuvo un punto más que C
- E obtuvo dos puntos menos que D
- D obtuvo dos puntos menos que A

Ordena de manera creciente, e indica quién obtuvo el mayor puntaje.

Resolución:
Tengamos presente dos sugerencias importantes, que nos permitan afrontar con éxito esta parte:

1° Tomar una orientación.
Por ejemplo si dibujamos una línea, entonces hacia el lado derecho consideraremos más puntaje y hacia el lado izquierdo menos puntaje, así:



2° Colocar toda información en función de esa orientación.
Veamos:

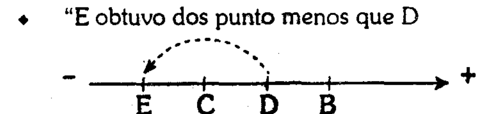
- "B obtuvo un punto más que D"

– D B +

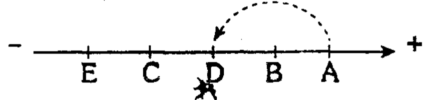
- "D obtuvo un punto más que C"

– C D B +

- "E obtuvo dos punto menos que D



- "D obtuvo dos puntos menos que A"



En el diagrama final podemos observar que quien obtuvo más puntaje fue "A".

Ejemplo 2
En cierta prueba, Rosa obtuvo menos puntos que María; Laura, menos puntos que Carla; Noemí, el mismo puntaje que Sara; Rosa, más puntaje que Ana; Laura, el mismo que María y Noemí, más que Carla. ¿Quién obtuvo el menor puntaje?

Resolución:
1ro. La orientación:

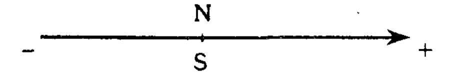
2do. Ubicar la información:

I. "Rosa obtuvo menos puntos que María"

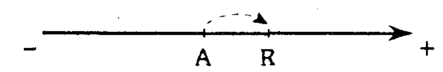
II. "Laura menos puntos que Carla"

– L C +

III. "Noemí, el mismo puntaje que Sara"

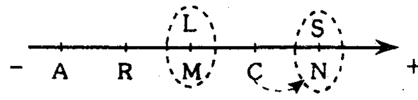


IV. "Rosa, más puntaje que Ana"



V. "Laura, el mismo que María; Noemí, más que Carla"

De (I) y (II) deducimos :



∴ Ana obtuvo el menor puntaje.

Ejemplo 3

María está al Noreste de Juana. Esther está al Sureste de María y al Este de Juana. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) María está al Noreste de Esther

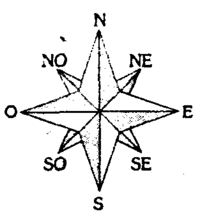
B) Juana está al Este de Esther

C) Juana está al Oeste de Esther

D) Esther está al Suroeste de María

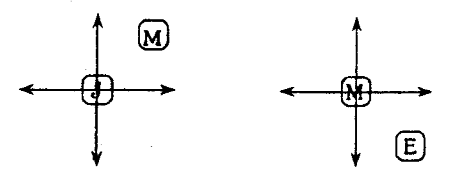
Resolución:

Consideremos las orientaciones cardinales siguientes:

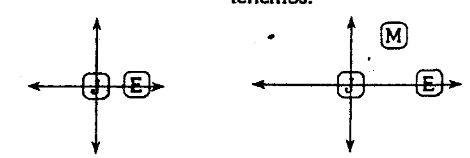


Entonces, del texto tendremos :

"María al "NE" de Juana": "Esther al "SE" de María"



"Esther al "E" de Juana": Conjugando los tres casos tenemos:



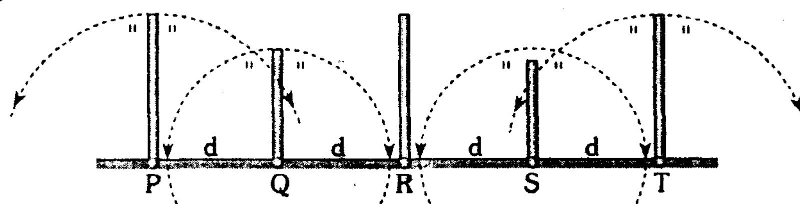
∴ La afirmación C es la correcta.

Ejemplo 4

Cinco varillas P, Q, R, S y T, tienen sus bases alineadas en el orden nombrado y a igual distancia. Si cada varilla puede oscilar alrededor de su base y al empujarlas, de los extremos hacia las otras, las varillas Q y S caen, pero no R; entonces, ¿cuál de las varillas es más grande: P o Q?

Resolución:

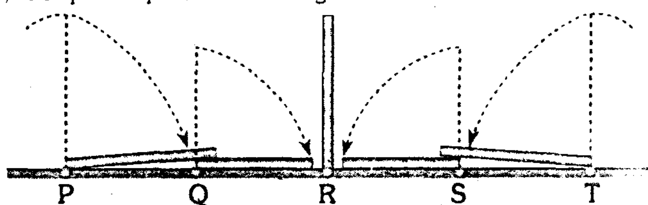
Si la varilla Q cae es porque la varilla P la ha tocado (su longitud será mayor que la distancia que lo separa de Q). Ahora ; si la varilla R no cae es porque la altura de Q es inferior a la distancia que lo separa de R



Análogamente razonamos con respecto a T y S.

En la gráfica se muestran las oscilaciones y caída de P (que llega a tocar a Q) y de Q la cual al oscilar y caer no toca a R).

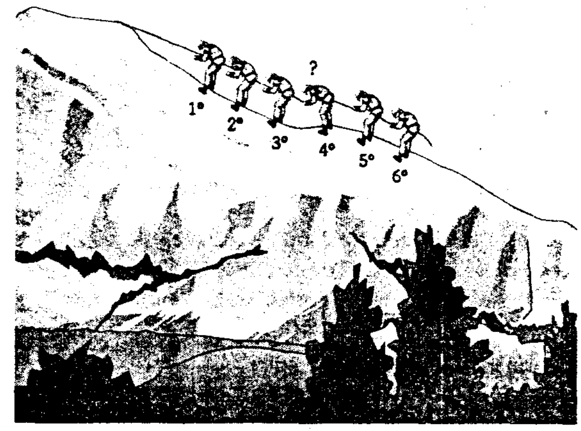
Luego de las caídas, el esquema quedaría como sigue:



Finalmente, señalamos que en tamaño P es mayor que Q y T es mayor que S.

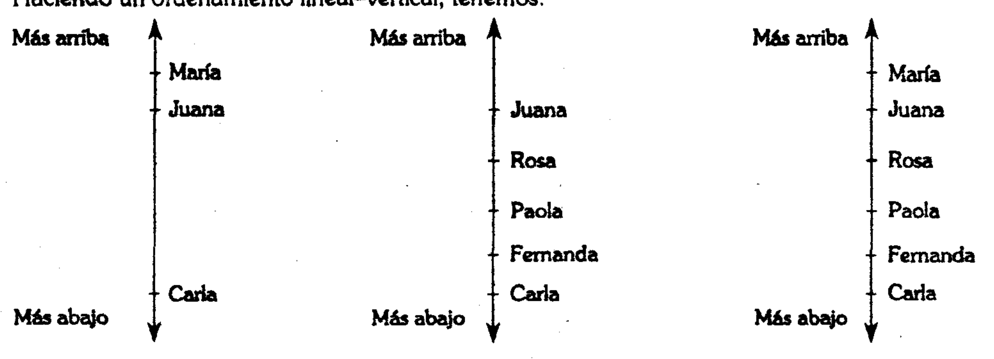
Ejemplo 5

Seis chicas están escalando una montaña. Carla está más abajo que Juana quien se encuentra un lugar más abajo que María, Fernanda está más arriba que Carla, pero un lugar más abajo que Paola, quien está más abajo que Rosa, esta última se encuentra entre Juana y Paola. ¿Quién está en el cuarto lugar del ascenso?



Resolución:

Haciendo un ordenamiento lineal–vertical, tenemos:



"Carla está más abajo que Juana quien se encuentra un lugar más abajo que María..."

"... Fernanda está más arriba que Carla, pero un lugar más abajo que Paola quien está más abajo que Rosa, esta última se encuentra entre Juana y Paola.

Ubicación final, deducida de las conclusiones anteriores

Luego: Paola está ubicada en el cuarto lugar del ascenso.

Ejemplo 6

Sobre la misma fila de un tablero de ajedrez, se tiene, 6 piezas dispuestos de la siguiente manera:

- El alfil está a la izquierda de la reina.
- El caballo está a la derecha de todos los demás y junto al peón.
- La torre está a la derecha de la reina y junto a un lugar vacío.

Además: entre el rey y el peón sólo hay un lugar. Entonces, la alternativa verdadera es:

A) Entre la torre y la reina hay dos lugares vacíos

B) El alfil no está a la izquierda de todos los demás.

C) Entre el rey y la reina está el alfil.

D) Hay un lugar vacío a la derecha del peón

E) El peón está a la derecha de la torre.

Resolución:

Las piezas a ubicar son, en total, seis. Veamos:

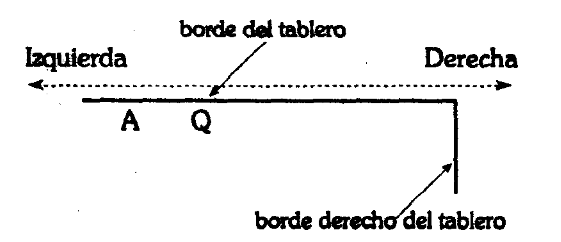
Alfil	:	A
Reina	:	Q
Caballo	:	C
Peón	:	P
Torre	:	T
Rey	:	K

Se deduce que 2 lugares han de quedar vacíos.

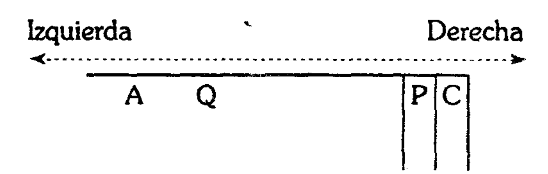
Consideremos la siguiente orientación:

Izquierda ←-------→ Derecha

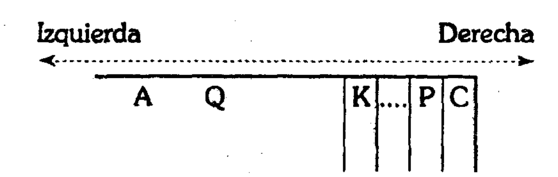
- "El alfil (A) está a la izquierda de la reina (Q)"



- "El caballo (C) está a la derecha de todos los demás y junto al peón (P)".



- "... Entre el rey (K) y el peón sólo hay un lugar vacío"



- "La torre (T) está a la derecha de la reina (Q) y junto a un lugar vacío"

Hay dos posibilidades, veamos:

1°

2° A | Q | ... | T | K | ... | P | C

Considerando estas dos posibilidades, analicemos las alternativas:

a) Entre la torre (T) y la reina (Q) hay dos lugares vacíos .... (Falso)

b) El alfil (A) no está a la izquierda de todos los demás .... (Falso)

c) Entre el rey (K) y la reina (Q) está el alfil (A) .... (Falso)

d) Hay un lugar vacío a la derecha del peón(P) .... (Falso)

e) El peón (P) está a la derecha de la torre (T) .... (Verdadero)

∴ **La alternativa E es verdadera.**

Ejemplo 7

Ana, Bertha, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. José los mira y dice: "Bertha está al lado de Carlos", "Ana está entre Bertha y Carlos". Pero sucede que las dos afirmaciones hechos por José son falsas. En realidad Bertha está en la silla número 3. ¿Quién está en la silla número 2?

Resolución:

Consideremos lo siguiente :

Ana (A) ; Bertha (B) ; Carlos (C) ; Diana (D).

Dato : Bertha esta sentada en la silla número 3.

1	2	3	4
		B	

1° Afirmación falsa: "Bertha está al lado de Carlos", esto nos indica que realmente Carlos no está sentado al lado de Bertha ni en la silla 2, ni en la silla 4; entonces está, en la primera silla.

1	2	3	4
C		B	

2° Afirmación falsa: "Ana está entre Bertha y Carlos", como esta afirmación es falsa; Ana está en la silla 4 y, por lo tanto, Diana está en la silla 2.

Luego:

1	2	3	4
C	D	B	A

∴ Diana está en la silla 2.

Ejemplo 8

En una carrera de 5 amigos, Dino llegó antes que Demetrio, este último llegó en cuarto lugar. Si Dennis llegó inmediatamente después que Daniel y Danilo, quien es el otro participante; para determinar el orden exacto de llegada de los 5 amigos, ¿cuál de las dos siguientes informaciones es necesario conocer?

I. Daniel llegó antes que Danilo

II. Dennis llegó antes que Dino

Resolución:

Dato: "Demetrio llegó en 4to. lugar".

Ubicando se tiene :

Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
	Demetrio			

- "Dennis llegó inmediatamente después que Daniel"

  Para ubicarlo hay 2 posibilidades

  1ra. Posibilidad:

  Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
	Demetrio	Dennis	Daniel	

  2da. Posibilidad:

  Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
	Demetrio		Dennis	Daniel

  El orden de estos 2 corredores es consecutivo, por lo que ninguno de ellos ocupa el 5° lugar ni el 4° lugar, que ya está ocupado por Demetrio; entonces Dennis y Daniel ocupan dos de los 3 primeros lugares, es por ello que hay dos posibilidades.

- "Dino llegó antes que Demetrio"

  1ra. Posibilidad:

  Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
	Demetrio	Dino	Dennis	Daniel

2da. Posibilidad:

Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
	Demetrio	Dennis	Daniel	Dino

- "Danilo es el otro participante"

1ra. Posibilidad:

Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
Danilo	Demetrio	Dino	Dennis	Daniel

2da. Posibilidad:

Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
Danilo	Demetrio	Dennis	Daniel	Dino

La primera información: "Daniel llegó antes que Danilo" sólo confirma ambas posibilidades mostradas y no descarta ninguna de ellas.

La 2da. información: "Dennis llegó antes que Dino" es determinante y descarta la segunda posibilidad; quedándonos tan sólo la primera posibilidad como válida.

Luego: el orden final será:

Línea de meta

5°	4°	3°	2°	1°
Danilo	Demetrio	Dino	Dennis	Daniel

∴ Es necesario conocer la segunda información.

Ejemplo 9

Las familias Alva, Baca, Cornejo, Díaz, Enríquez y Fernández, viven en un edificio y cada una de ellas tiene una particularidad especial:

1. Mucho antes de comprar su departamento, al señor Alva, le prohibieron subir escaleras por razones de salud.
2. La familia Cornèjo y sus vecinos de piso hacen mucha bulla los sábados y al bailar perturban a los Alva.
3. Al cuarto piso suelen subir dos jóvenes enamorar a dos hermanas.
4. La señora Fernández ha reclamado al dueño de la finca que instale un ascensor.
5. Huguito es hijo único de los Baca y tiene que subir más de 1 piso para visitar a los Fernández.
6. Hay un piso desocupado debajo de los Fernández.
7. La familia Enríquez es gente muy tranquila.
8. A los Alva les gustaría que los Cornejo cambiaran de piso con los Enríquez o Baca.
9. Dos familias comparten el mismo piso.

¿En qué piso vive cada familia?

Resolución:

Haremos un ordenamiento lineal vertical.

De la primera afirmación se deduce que los Alva viven en el primer piso (pues el señor Alva no puede subir las escaleras) y de la segunda afirmación deducimos que los Cornejo deben vivir en el 2do. piso sobre los Alva pues "*... al bailar perturban a los Alva*".

Luego; veamos la figura (1):

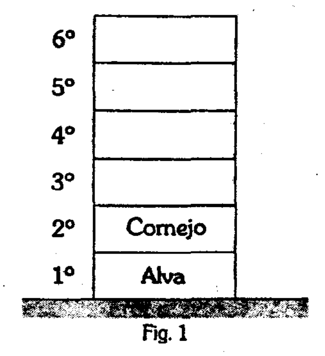


Fig. 1

De la tercera afirmación concluimos que en el cuarto piso vive una familia con 2 hijas jóvenes y como en la quinta información se afirma que Huguito es hijo único de los Baca, entonces los Baca, viven en el tercero, quinto o sexto piso, pero; ¡cuidado! Huguito debe subir más de un piso para visitar a los Fernández entonces los Baca no viven ni en el quinto ni en el sexto piso sino en el tercero (ver figura 2).

6°
5°
4° → Ocupado con una familia con 2 hijas
3° Baca
2° Cornejo
1° Alva

Fig. 2

- De la cuarta y la sexta información se desprende que los Fernández viven en el sexto piso, pues hay un piso desocupado debajo de ellos y el único que puede estar desocupado es el quinto piso (ver figura 3).

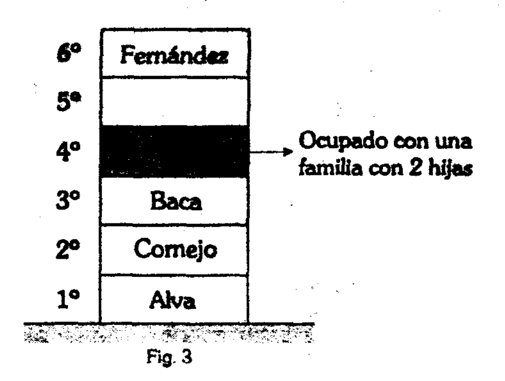


Fig. 3

Recordemos que la segunda afirmación es que "los Cornejo tienen vecinos" y la novena información es dos familias comparten el mismo piso", entonces los Enríquez viven en el cuarto o en el segundo piso.

El séptimo dato señala que "los Enríquez son gente muy tranquila; entonces no pueden ser vecinos de los Cornejo, pues éstos y sus vecinos son muy bulliciosos; de donde concluimos que los Enríquez, ocupan el cuarto piso (ver figura 4).

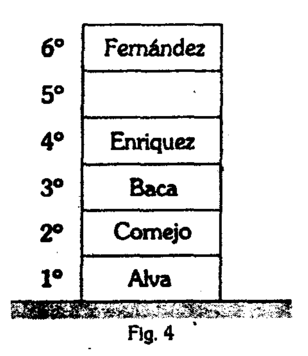


Fig. 4

Como los Cornejo tienen vecinos; entonces dichos vecinos deben ser los Díaz. En consecuencia, el orden queda como se ve en la figura 5.

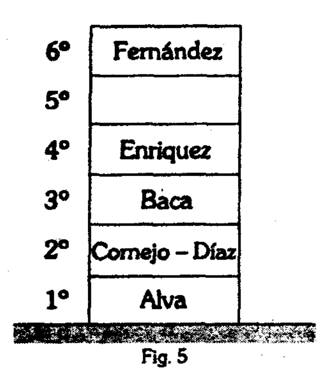


Fig. 5

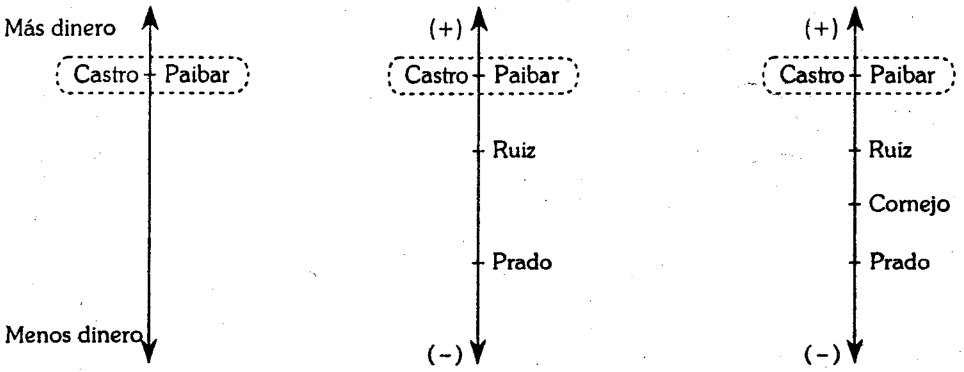
Ejemplo 10

El señor Paibar y el señor Castro tienen la misma cantidad de dinero; Paibar, sin embargo, es más rico que el señor Ruíz quien es más rico que el señor Prado. El señor Cornejo, que es más pobre que Paibar, pero más rico que Prado, no es tan rico como Ruíz. El señor Castro es más pobre que el señor Pérez. Si el más pobre tiene S/. 500, además, entre lo que tiene cada uno de ellos, hay una diferencia de S/. 1 000; ¿cuánto tiene el señor Pérez?.

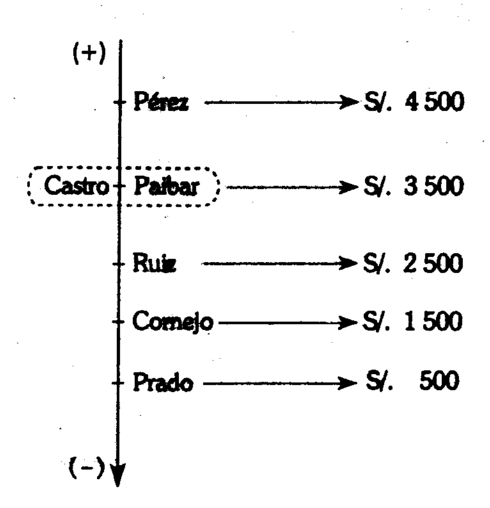
Resolución:

Son seis los personajes: Paibar, Castro, Ruíz, Prado, Cornejo y Pérez.

De los datos:



Finalmente, como "Castro es más pobre que Pérez", la ordenación final quedaría cómo sigue:



Según los datos el más pobre tiene S/. 500 y que sus cantidades se diferencian en S/. 1 000; lo que cada uno tendría se indica a la derecha de los apellidos.

Luego: el señor Pérez es más rico que el resto y posee S/. 4 500.

B. ORDENAMIENTO CIRCULAR

En algunos problemas se presenta la información indicándose que se ubican los datos dados alrededor de un objeto formando así una línea cerrada (circunferencia).

Veamos:

Ejemplo 1

Aníbal invita a cenar a sus amigos: Betty, Celinda, Daniel, Eduardo y Felipe; este último, por razones de fuerza mayor, no pudo asistir. Se sientan alrededor de una misma mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente.

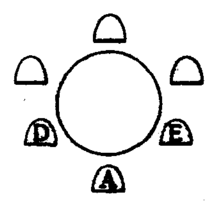
Si:

- Aníbal se sienta junto a Eduardo y Daniel.
- Frente a Eduardo se sienta Betty.
- Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.

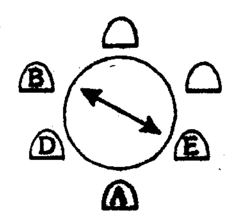
¿Entre quiénes se sienta Eduardo?

Resolución:

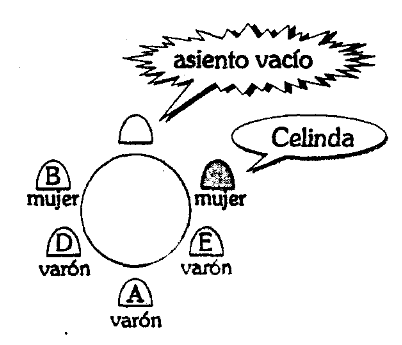
- "Aníbal se sienta junto a Eduardo y Daniel"



- **"Frente a Eduardo se sienta Betty"**



- **"Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío". Entonces, dicho asiento está ubicado entre las dos mujeres; luego:**



∴ Eduardo se sienta entre Aníbal y Celinda.

> **Nota:**
>
> Podemos observar que el ordenamiento se realiza alrededor de un objeto, los elementos están formando una línea cerrada, por ello a esta forma de disponerlos se le denomina **ordenamiento circular**. Los problemas de esta sección requieren de mayor concentración y minucioso análisis.

Ejemplo 2

Seis amigos A, B, C, D, E y F se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente.

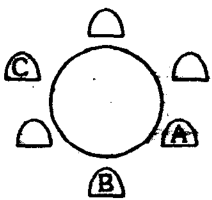
Si se sabe que:

- **A se sienta junto y a la derecha de B y frente a C.**
- **D no se sienta junto a B.**
- **E no se sienta junto a C.**

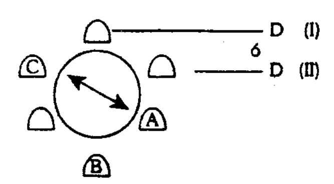
¿Entre quiénes se sienta F?

Resolución:

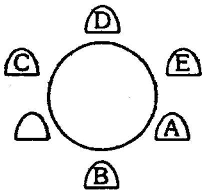
- **"A se sienta junto y a la derecha de B y frente a C".**



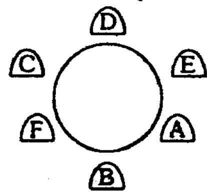
- "D no se sienta junto a B".



- "E no se sienta junto a C"; esto descarta la posibilidad (II) y tendríamos :



Luego, terminando de completar :



∴ F está entre B y C.

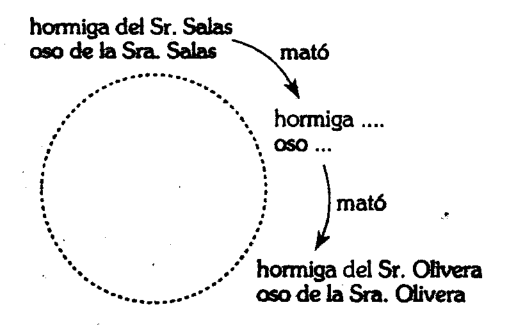
Ejemplo 3

Los señores Salas, Sarmiento, Ruíz, García y Olivera, cinco viejos aficionados a la crianza de hormigas, estaban indignados por la depredación de sus animalitos por efecto de cinco osos hormigueros, pertenecientes a cinco mujeres solteras (cada mujer tiene su respectivo oso). Con la "esperanza" de controlar a los osos, se casaron las dueñas de los osos. Pero tiempo después cada oso victima la hormiga favorita de cada hombre. El oso de la señora Salas mató a la hormiga de quien se casó con la señora dueña del oso que mató a la hormiga del señor Olivera. La hormiga del señor Salas fue victimada por el oso de la señora Sarmiento. La hormiga del señor García fue muerta por el oso de la dama que se casó con el dueño de la hormiga que fue muerta por el oso de la señora Ruíz.

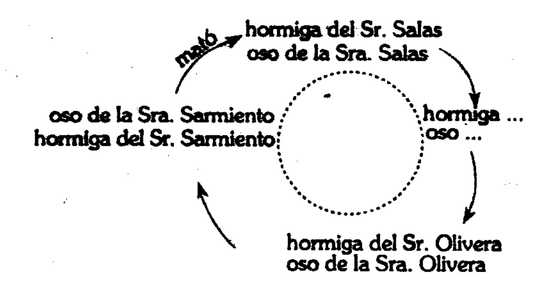
¿Quién era el dueño de la hormiga muerta por el oso de la señora García?

Resolución:

" ... El oso de la señora Salas mató a la hormiga de quien se casó con la señora dueña del oso que mató a la hormiga del señor Olivera ..."

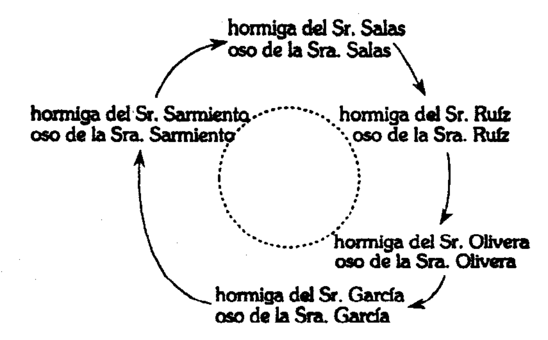


" ... La hormiga del señor Salas fue victimada por el oso de la señora Sarmiento ..."

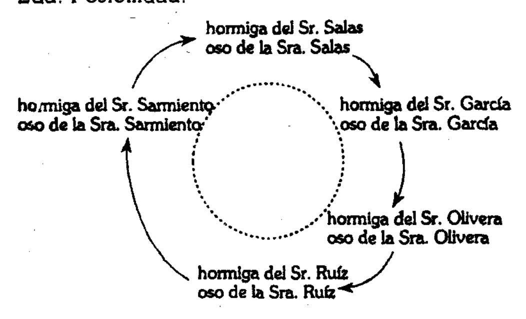


Están ubicados ya 3 familias: Sarmiento, Salas y Olivera, falta determinar la ubicación de los Ruíz y los García, para ello hay dos posibilidades:

1ra. Posibilidad:



2da. Posibilidad:

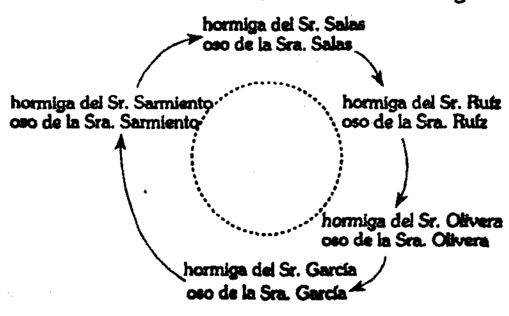


Sin embargo el siguiente texto elimina una de las posibilidades mostradas:

" ... la hormiga del señor García fue muerta por el oso de la dama que se casó con el dueño de la hormiga que fue muerta por el oso de la señora Ruíz ... ".

Esto descarta la segunda posibilidad, pues de ello lo que se deduce es lo siguiente: " La hormiga de García fue muerta por el oso de la señora Salas cuyo esposo, el señor Salas, tuvo una hormiga la cual fue victimada por el oso de la señora Sarmiento" lo cual no es compatible con la información dada.

Entonces, la primera posibilidad es la única que verifica todas las afirmaciones hechas. Luego:



Finalmente, el dueño de la hormiga que fue muerta por el oso de la señora García es el señor Sarmiento.

Ejemplo 4

Seis amigos se ubican alrededor de una fogata. Toño no está sentado al lado de Nino ni de Pepe. Félix no está sentado al lado de Raúl ni de Pepe. Nino no está al lado de Raúl ni de Félix. Daniel está junto a Nino, a su derecha. ¿Quién está sentado a la izquierda de Félix?

Resolución:

Sabemos que son seis amigos: Toño, Nino, Pepe, Félix, Raúl y Daniel. Empecemos por la afirmación final: "... Daniel está junto a Nino, a su derecha ..."

Veamos la figura (1)

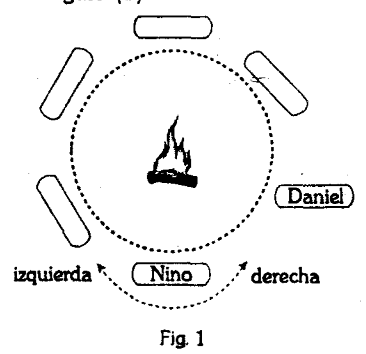


Fig. 1

Como "Nino no está al lado de Raúl ni de Félix" y además:

"Toño no está sentado al lado de Nino ni de Pepe"; deducimos que ni Raúl, ni Félix, ni Toño están sentados al costado izquierdo de Nino por lo que el único que puede estar sentado ahí es Pepe (ver figura 2).

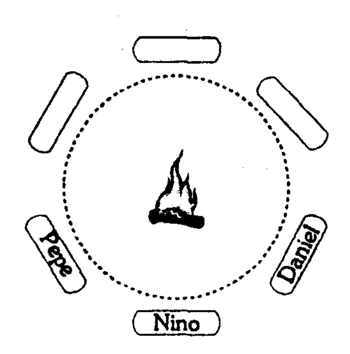


Fig. 2

Ahora, de las afirmaciones: "Toño no está sentado al lado de Nino **ni de Pepe**" y " Félix no está sentado al lado de Raúl **ni de Pepe**" se deduce que al lado izquierdo de Pepe no están sentado, ni Félix ni Toño, por lo que deducimos que el único que puede sentarse ahí es Raúl (ver figura 3).

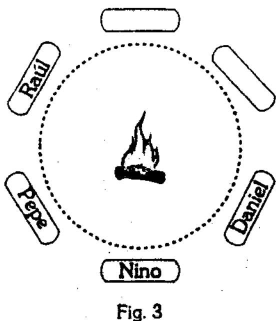


Fig. 3

Además, también de la afirmación "Félix no esta sentado al lado de Raúl ni de Pepe" deducimos que Félix está al lado de Daniel (ver figura 4).

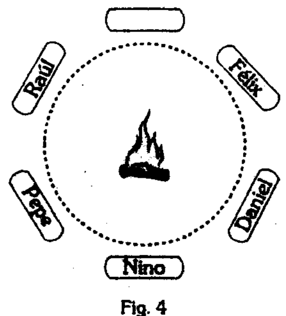


Fig. 4

Finalmente, la última ubicación está ocupada por Toño, quedando el orden circular como sigue:

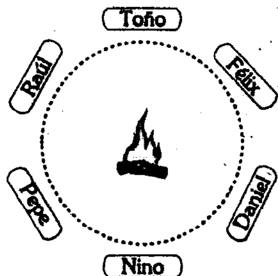


Fig. 5

Luego; a la izquierda de Félix está sentadoToño.

Ejemplo 5

Rosa invitó a tomar el té a cinco amigas.

Los nombres de las 6 mujeres que se sentaron alrededor de una mesà circular eran: Ana, Vicky, Carmen, Doris, Elena y Rosa; una de ellas era sorda; otra, sumamente charlatana; otra, terriblemente gorda; otra odiaba a la señora Doris; otra tenía una deficiencia vitamínica y otra era la dueña de la casa.

La mujer que odiaba a la señora Doris se sentó frente de la señora Vicky. La mujer sorda se sentó frente de la señora Carmen quien a su vez se sentó de la mujer que tenía una deficiencia vitamínica y la mujer que odiaba a la señora Doris. La mujer gorda se sentó frente de la señora Ana, junto a la mujer sorda y a la izquierda de quien odiaba a la señora Doris. La mujer que tenía deficiencia vitamínica se sentó entre la señora Carmen y la mujer que se sentó frente de la mujer que odiaba a la señora Doris. La señora Rosa, que era buena amiga de todas, se sentó junto a la mujer gorda y frente a la dueña de casa.

¿Puede usted identificar a cada una de estas encantadoras mujeres?

Resolución:

Nombres de las personas	Características (no necesariamente en el orden de las personas)
Ana	sorda
Vicky	charlatana
Carmen	muy gorda
Doris	odiosa
Elena	deficiencia vitamínica
Rosa	dueña de casa

"La mujer que odiaba a Doris se sentó frente a Vicky" (figura 1)

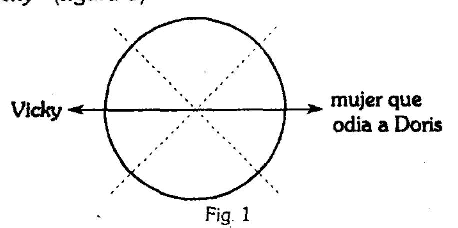


Fig. 1

"La mujer sorda se sentó frente a la señora Carmen quien a su vez se sentó entre la mujer que tenía una deficiencia vitamínica y la mujer que odiaba a la señora Doris"

1ra. Posibilidad

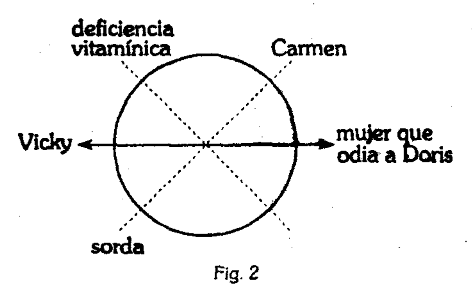


Fig. 2

2da. Posibilidad

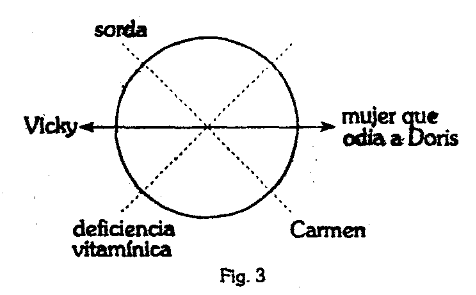


Fig. 3

Ahora, "La mujer gorda se sentó frente a la señora Ana, junto a la mujer sorda y a la izquierda de quien odiaba a la señora Doris". Esta premisa elimina la 2da. posibilidad, ya que aquí la mujer gorda estaría a la derecha de la mujer que odia a a la señora Doris, por lo tanto, nos quedamos con la primera posibilidad (ver figura 4).

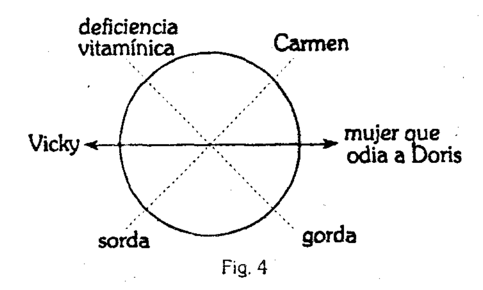


Fig. 4

Asimismo, la mujer gorda está sentada entre la sorda y la odiosa y frente a la señora Ana. El orden quedaría como se ve en la figura:

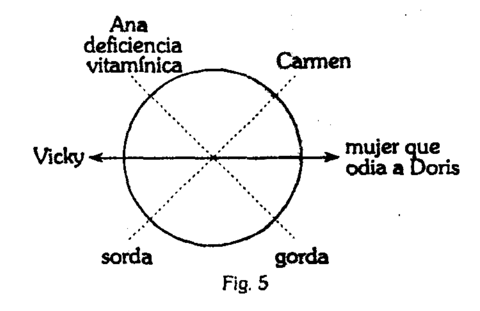


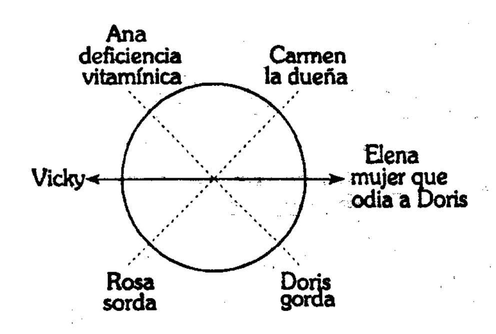
Fig. 5

La afirmación: "La mujer que tenía deficiencia vitamínica se sentó entre la señora Carmen y la mujer que se sentó frente a la que odiaba a Doris" se confirma en la figura.

Ahora, leamos la siguiente afirmación.

"La señora Rosa que era **buena amiga de todas, se** sentó junto **a la mujer gorda** y frente a la dueña de casa"

De este enunciado deducimos que Rosa no puede ser la mujer que odia a Doris, ni tampoco la mujer gorda; entonces, ella es la sorda y como se sentó frente a la dueña de casa, Carmen es precisamente la dueña (ver figura). Además, "la mujer que **odia a Doris** no puede ser Doris, por lo que la gorda es Doris".



Finalmente, la mujer que odia a Doris sólo puede ser Elena y la charlatana, Vicky.
Luego:

Ana tiene deficiencia vitamínica
Vicky es charlatana
Carmen es la dueña de la casa
Doris es la gorda
Elena es la mujer que odia a Doris
Rosa es la sorda

C. ORDENAMIENTO EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

En ocasiones la existencia de una diversidad de datos en algunos problemas, hace necesario la construcción de una tabla, en la cual se relacionen y ubiquen dichos datos. Generalmente en la 1° entrada se escriben los nombres de las personas, animales y cosas y en la 2° entrada las características de los sujetos, aunque a decir verdad la ubicación depende de la persona que construye y emplea el cuadro. A continuación se procede a marcar una × o un **No** en cada casilla correspondiente a una imposibilidad definida y a colocar ✓ (es un visto bueno) o un **Sí** en la casilla que corresponda a un dato confirmado. Además se debe verificar tanto en cada fila horizontal y vertical la existencia de un solo sí a menos que las condiciones del problema afirmen lo contrario o señalen características especiales de los datos.

Ejemplo 1

A una reunión asistieron tres amigos: Marcos, Hugo y Carlos; y tres damas: Pilar, Nora y Sara. Terminada la actividad, cada uno de ellos salió acompañado por una dama. Hugo salió con la amiga de Nora. Pilar, que no simpatiza con Nora, salió antes que Marcos.

¿Quién acompañó a Sara y con quién salió Marcos?

Resolución:

¡Atención!... Vamos a resolver, de una manera sencilla, un problema de ingenio muy especial. Analizando las premisas:

- ***"Hugo salió con la amiga de Nora"***

  Se deduce que Hugo no salió con Nora, pudo haber salido con Pilar o Sara.

	Nora	Pilar	Sara
Marcos			
Hugo	✗		
Carlos			

- ***"Pilar no simpatiza con Nora"***

  Se deduce entonces que Pilar no es amiga de Nora, entonces Hugo no salió con Pilar (por el caso anterior).

  Luego, Hugo salió con Sara, lo cual señala que Sara no salió ni con Marcos ni con Carlos.

	Nora	Pilar	Sara
Marcos			✗
Hugo	✗	✗	✓
Carlos			✗

- ***"Pilar salió antes que Marcos"***

  Se deduce que Pilar no salió con Marcos, tampoco con Hugo, pues éste salió con Sara; entonces, ella salió con Carlos.

	Nora	Pilar	Sara
Marcos		✗	✗
Hugo	✗	✗	✓
Carlos		✓	✗

Finalmente, Nora salió con Marcos.

	Nora	Pilar	Sara
Marcos	✓	✗	✗
Hugo	✗	✗	✓
Carlos	✗	✓	✗

Luego: Hugo acompaña a Sara y Marcos salió con Nora.

Ejemplo 2

Almorzaban juntos 3 políticos: El señor Blanco, El señor Rojo y el señor Negro, uno de ellos llevaba corbata blanca, otro roja y el otro, negra, pero no en el mismo orden.

En un corto diálogo, se escucha que:

1. El señor de la corbata roja dice: "Es curioso, a pesar de que nuestros apellidos son los mismos que los colores de nuestras corbatas, ninguno lleva su correspondiente".
2. El señor Blanco responde: "Tiene Ud. razón".

¿De qué color es la corbata de cada político?

Resolución:

Según (1):

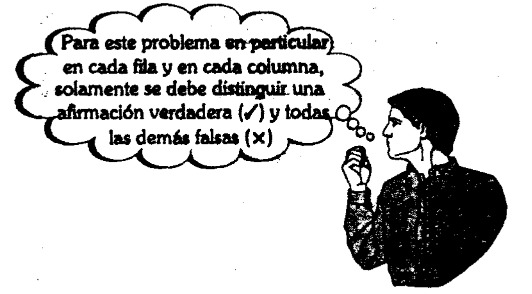
Nombres \ Corbatas	blanca	roja	negra
Sr. Blanco	✗		
Sr. Rojo		✗	
Sr. Negro			✗

Según (2) : el Sr. Blanco responde al señor de corbata Roja.

Nombres \ Corbatas	Blanca	Roja	Negra
Sr. Blanco	✗	✗	
Sr. Rojo		✗	
Sr. Negro			✗

El señor de la corbata roja es de apellido Blanco o Negro, pero como le está contando el señor Blanco; entonces el personaje de la corbata roja se apellida Negro.

Apellido \ Color	Corbata blanca	Corbata roja	Corbata negra
Sr. Blanco	✗	✗	(✓)
Sr. Rojo	(✓)	✗	✗
Sr. Negro	✗	(✓)	✗



Además, deducimos que el señor de apellido Blanco tiene corbata negra, pues su corbata no puede ser blanca, y esto nos lleva a concluir que el señor Rojo tiene corbata blanca.

Así:

Señor	**Corbata**
Blanco	negra
rojo	blanca
Negro	roja

Ejemplo 3

María, Lucía e Irene viven en tres ciudades diferentes: Lima, Cusco y Tacna, estudian una carrera distinta: Educación, Derecho y Arquitectura, no necesariamente en ese orden.

Se sabe que:

I. María no vive en Cusco.

II. Lucía no vive en Tacna.

III. La que vive en Cusco no estudia Derecho.

IV. Quién vive en Tacna estudió Arquitectura.

V. Lucía no estudia Educación.

¿Dónde vive Irene y qué estudia?

Resolución:

De I, II, III, V

Sí Sí Sí No

	Lima	Cuzco	Tacna	Arquit.	Derec.	Educ.
María		✗				
Lucía			✗	✗	(✓)	✗
Irene						

Observamos que Lucía no estudia Aquitectura, porque no vive en Tacna; por lo tanto, estudia Derecho.

Sí Sí Sí No

	Lima	Cuzco	Tacna	Arquit.	Derec.	Educ.
María	✗	✗	(✓)	(✓)	✗	✗
Lucía	(✓)	✗	✗	✗	(✓)	✗
Irene	✗	(✓)	✗	✗	✗	(✓)

Observamos que Lucía no vive en Cusco porque estudia Derecho; por lo tanto, vive en Lima.

Luego: Irene vive en el Cuzco y estudia Educación.

Ejemplo 4

Tres amigos tiene cada uno un animal diferente, se sabe que:

I. El perro y el gato peleaban.

II. Juan le dice al dueño del gato que el otro amigo tiene un canario.

III. Julio le dice a Luis que su hijo es veterinario.

IV. Julio le dice al dueño del gato que éste quiso comerse al canario.

¿Qué animal tiene Luis?

Resolución:

"Juan le dice al dueño del gato que el otro amigo tiene un canario".

De aquí deducimos que Juan no es dueño del gato ni del canario; es decir, que es dueño del perro, lo cual elimina como dueños en este animal a Julio y Luis.

	Perro	Gato	Canario
Juan	✓	✗	✗
Julio	✗		
Luis	✗		

"Julio le dice al dueño del gato que éste quiso comerse al canario"

Entonces, Julio no es dueño del gato, y por el dato anterior no es dueño del perro; entonces, es dueño del canario.

	Perro	Gato	Canario
Juan	(✓)	✗	✗
Julio	✗	✗	(✓)
Luis	✗	(✓)	✗

Finalmente, Luis es dueño del gato.

Ejemplo 5

Arnaldo, Juan, Andrés y Hermógenes tienen diferentes ocupaciones:

I. Arnaldo y el carpintero están enojados con Hermógenes.
II. Juan es amigo del electricista.
III. El comerciante es familiar de Hermógenes.
IV. El sastre es muy amigo de Andrés y del electricista.
V. Arnaldo desde muy joven se dedica a vender abarrotes.

¿Cuál es la ocupación de cada uno de ellos?

Resolución:

Personajes: Arnaldo, Juan, Andrés, Hermógenes.

Ocupaciones: carpintero, electricista, sastre, comerciante.

Construimos una tabla de doble entrada con los elementos dados y empezamos ubicando la última información: "Arnaldo desde muy joven se dedica a vender abarrotes", lo cual nos dice que la ocupación de Arnaldo es comerciante (cuadro 1) y los demás no ejercen dicha ocupación.

	Carpintero	Electricista	Sastre	Comerciante
Arnaldo	No	No	No	Sí
Juan				No
Andrés				No
Hermógenes				No

Cuadro 1

De la afirmación: "Juan es amigo del electricista" deducimos que Juan **no es** electricista. (Cuadro 2) Además de: "El sastre es muy amigo de Andrés y del electricista", se concluye que Andrés **no es** sastre ni electricista (cuadro 2).

Entonces tendríamos:

	Carpintero	Electricista	Sastre	Comerciante
Arnaldo	No	No	No	Sí
Juan		No		No
Andrés		No	No	No
Hermógenes				No

Cuadro 2

Observando el cuadro 2 se nota que el único que puede ser electricista es Hermógenes y Andrés sólo puede ser carpintero; por lo que el cuadro quedaría así:

	Carpintero	Electricista	Sastre	Comerciante
Arnaldo	No	No	No	Sí
Juan	No	No		No
Andrés	Sí	No	No	No
Hermógenes	No	Si	No	No

Finalmente, el sastre tendrá que ser Juan; con lo cual el orden final será así:

	Carpintero	Electricista	Sastre	Comerciante
Arnaldo	No	No	No	Sí
Juan	No	No	Sí	No
Andrés	Sí	No	No	No
Hermógenes	No	Sí	No	No

Luego: Arnaldo es comerciante. Juan es sastre.
Andrés es carpintero. Hermógenes es electricista.

Ejemplo 6

Manuel, Pedro y Alberto tienen diferentes aficiones y gustos en fútbol (Cristal, U, Alianza); literatura (novela, poesía, periodismo); licores (gin, pisco, cerveza) y cigarrillos (Ducal, Winston, Norton) se sabe que:

I. Pedro no simpatiza con la "U".
II. Al socio del Cristal le gusta el gin.
III. El que fuma Ducal es periodista.
IV. El hincha de Alianza trabaja en "La República".
V. Manuel disfruta cuando juega Cristal o lee a Neruda.
VI. Alberto fuma Winston.
VII. El hincha de la "U" bebe cerveza.

Mencione las aficiones de Manuel.

Resolución:

De las afirmaciones I, V y VI deducimos:

	Fútbol			Literatura			Licores			Cigarros		
	SC	U	AL	Novela	Poesía	Period.	Gin	Pisco	Cerveza	Ducal	Winston	Norton
Manuel	Sí				Sí							
Pedro		No										
Alberto											Sí	

Entonces, Manuel es socio del Cristal, y por la afirmación II, le gusta el gin; además, como Manuel lee a Neruda (quien se destacó más en la poesía) no es aficionado a la novela ni al periodismo.

Colocando todas estas deducciones en el cuadro, y completando convenientemente tenemos:

	Fútbol			**Literatura**			**Licores**			**Cigarros**		
	SC	U	AL	Novela	Poesía	Period.	Gin	Pisco	Cerveza	Ducal	Winston	Norton
Manuel	Sí	No	No	No	Sí	No	Si	No	No		No	
Pedro	No	No			No		No				No	
Alberto	No				No		No			No	Sí	No

Ahora la 4ta. afirmación dice: "El hincha de Alianza trabaja en La República, lo cual indica que su afición es el periodismo; además por la 3ra. afirmación: "El que fuma Ducal es periodista". Entonces con respecto a dicha persona tenemos:

Su nombre: (?)

Sus aficiones:
- es hincha Alianza → Puede ser Pedro o Alberto
- es periodista
- fuma Ducal → Sólo puede ser **Pedro**, pues Alberto fuma Winston

Luego: Pedro es hincha de Alianza, es periodista y fuma Ducal; anotando estos datos en la tabla tendríamos:

	Fútbol			**Literatura**			**Licores**			**Cigarros**		
	SC	U	AL	Novela	Poesía	Period.	Gin	Pisco	Cerveza	Ducal	Winston	Norton
Manuel	Sí	No	No	No	Sí	No	Si	No	No	No	No	
Pedro	No	No	Sí	No	No	Sí	No			Sí	No	No
Alberto	No		No		No	No	No			No	Sí	No

Del cuadro se deduce que: Alberto es hincha de la (U) y, por la 7ma. afirmación, **bebe cerveza**; además **lee novela** y fuma Winston. Colocando en columna estas últimas observaciones tendríamos:

	(I)	(II)	(III)
Nombre:	**Alberto**	**Manuel**	**Pedro**
Aficiones	Es hincha de U. Lee novela. Bebe cerveza. Fuma Winston.	Es hincha de Cristal. Lee poesía. Bebe gin. Fuma Norton.	Es hincha de Alianza Es periodista Bebe pisco Fuma Ducal
		del cuadro	(Se deduce de las columnas I y II)

SITUACIONES DIVERSAS

1. ¿Cuántas "palabras" no varían en su lectura original observándolas reflejadas en un espejo?

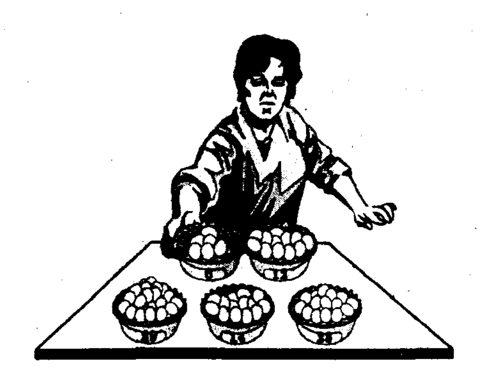
- OTOTO
- OSO
- IMONOMI
- MAMA
- LOLOL
- AMA
- AHUHA
- EMME
- HAMITIMAH

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

2. En cierto sistema de comunicaciones para descifrar claves, se sabe que: por cada consonante se pondrá la vocal inmediata posterior y por cada vocal se pondrá la consonante inmediata anterior. Así por ejemplo: LIMA se escribira como OHOZ.
¿Qué palabra daría origen a HUARAZ?

A) ITZUZA B) TZUIZA C) ZUZAIT
D) ETZIZA E) TZUZAA

3.



Las cestas que se ven en la figura contienen huevos; en una de éstas hay huevos de gallinas, en las otras, de pato. Su número está indicado en cada cesta. "Si vendo esta cesta –meditaba la vendedora– me quedarán el doble de huevos de gallina, que de pato".

¿A qué cesta se refiere la vendedora? (Dar como respuesta el número que se indica en ella).

A) 12 B) 6 C) 29
D) 14 E) 23

4. En cierto pueblo se celebra un juicio en el que hay tres acusados de asesinato. Uno es culpable y siempre miente y los otros dicen la verdad, además uno de ellos es extranjero y no habla el idioma del pueblo, por lo que el Juez decide tomar como intérpretes a los otros dos acusados. El Juez le pregunta al extranjero: "¿Es Ud. culpable?", el extranjero responde en su idioma. Luego, pregunta a los interpretes qué fue lo que dijo. El segundo acusado responde que ha dicho que no. El tercer acusado responde que ha dicho que sí. ¿Quién es el culpable?

A) el primero B) el tercero C) el juez
D) el segundo E) el juez es injusto

5. Se encuentran 5 señoritas. Dos tienen ojos negros y dicen siempre la verdad; tres tienen ojos azules y siempre mienten. Éstas son: Yolanda, Esther, María, Jesús y Rosa. A tres de ellas se les hizo una pregunta a cada una.

- A Yolanda se le pregunta. ¿De qué color son tus ojos?, y ésta contestó en ruso, idioma que sólo conocían dichas señoritas.
- A Esther se le preguntó: ¿Cuál es la respuesta que dio Yolanda ?, y ésta contestó, ella dijo que sus ojos son de color azul.
- A María se le preguntó: ¿De qué color son los ojos de Yolanda y Esther?, y ésta contesto la primera tiene ojos negros y la segunda ojos azules.

Determinar quiénes tienen ojos negros?

A) Yolanda – Rosa
B) María – Rosa
C) Esther – María
D) Yolanda – María
E) Jesús – Rosa

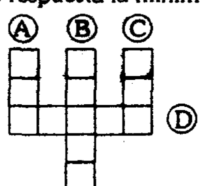
6. Cuatro sospechosas de haber atropellado con su auto a un peatón, hicieron las siguientes afirmaciones cuando fueron interrogadas por la policía:

- María: –Fue Lucía.
- Lucía: –Fue Leticia.
- Irene: –Yo no fui.
- Leticia: –Lucía miente.

Si sólo una de ellas miente; ¿quién atropelló al peatón?

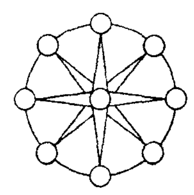
A) Lucía B) Leticia C) Irene
D) Yamilet E) María

7. Distribuya en las casillas de la figura los números del 1 al 13, de tal manera que la suma de los números en cada una de las tres columnas (A, B y C) y la fila D sea la misma. Dar como respuesta la mínima suma.



A) 30 B) 25 C) 26
D) 24 E) 27

8. Distribuye los números del 1 al 9; uno en cada casillero, de tal manera que la suma de los números ubicados en casilleros, diametralmente opuestos, tenga el mismo resultado (3 soluciones). Dar como respuesta la suma de los números que pueden ser ubicados al centro.



A) 10
B) 14
C) 15
D) 16
E) 11

9. Pedro y Sara realizan una encuesta entre sus amigos Abel, Julio y Darío, obteniendo las siguientes respuestas:

	Abel	Julio	Darío
¿Eres Profesional	Sí	Sí	No
¿Tienes carro?	No	No	Sí
¿Te gusta ir al cine?	Sí	No	No

Pero, luego, recordaron que uno de ellos siempre miente, otro miente sólo una vez y el último siempre dice la verdad. Además, si todos hubiesen dicho la verdad, tendrían la misma respuesta. ¿Quién miente siempre?

A) Abel B) Darío C) Julio
D) Sara E) Pedro

10. El Juez escuchó con curiosidad a cuatro conocidos timadores.

- "Están ustedes mintiendo", dijo: "Pretenden hacerse pasar por mejor de lo que son".
- El policía se echó a reír y dijo: "Da la casualidad de que sé que uno de ellos dice la verdad".
- El Juez preguntó bruscamente: "Muy bien. ¿Qué tienen que decir en su defensa?".
- "Uno de nosotros miente", dijo Alberto.
- "No, se lo aseguro. Dos de nosotros mienten", afirmó Benito.
- "Hágame caso a mi, –intervino Claudio"–, tres de nosotros mienten".

- "No, no es cierto le desmintió Darío–. Los cuatro decimos la verdad".

¿Cuál de ellos decía la verdad, si se sabe que el policía tenía razón?

A) Alberto B) Benito C) Claudio
D) Darío E) Juez

11. El novio de Ana mentía indefectiblemente los días martes, jueves y sábado. Los demás días decía la verdad, cierto día conversaban:

- –Ana salgamos a pasear hoy–, le ofreció el novio.
- –No–, fue la respuesta de ella.
- –¿Porqué no, si hoy es sábado?
- –No ... tal vez mañana.
- –Mañana no podremos, porque será miércoles, y tengo que estudiar–.

A) lunes B) jueves C) sábado
D) martes E) viernes

12. Un profesor está armando un equipo de investigación que deberá contar con 4 miembros a escogerse entre los hombres: F, G y H; y las mujeres X, Y, Z, W. Con las siguientes condiciones:

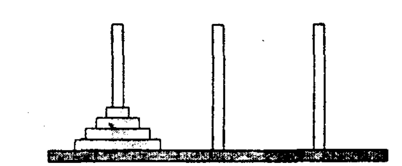
I. Deberá haber por lo menos dos hombres en el grupo.
II. "F" no quiere trabajar con "Y" y viceversa.
III. "G" no quiere trabajar con "W".
IV. "Y" no quiere trabajar con "Z".

Si "Y" es elegida, ¿quiénes más conformarán el equipo?

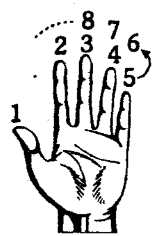
A) F, G, X B) G, H, W C) G, H, Z
D) F, H, W E) G, H, X

13. Un juego consiste en trasladar los discos de madera del primer eje al tercero. ¿Cuántos movimientos, como mínimo, se deberán realizar para lograrlo, sabiendo que un disco grande no puede situarse sobre uno pequeño?

A) 18
B) 14
C) 15
D) 16
E) 17



14. Si contamos los dedos de la mano de la siguiente manera:



¿A qué dedo corresponderá el mayor cuadrado perfecto de 4 cifras que termina en 4 ?

A) pulgar B) índice C) anular
D) meñique E) medio

15. Un juego consiste en sacar bolas, de una en una y al azar, de una caja que contiene bolas rojas y blancas. Para ganar se deben sacar 2 bolas rojas consecutivas o sacar 2 bolas blancas sin importar el orden. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ganar dicho juego?

A) 6 B) 8 C) 4
D) 7 E) 5

16. Rosa, su hermano, su hija y su hijo, todos ellos jugadores de tenis, están a punto de empezar un partido de dobles (juego entre parejas).

- El hermano de Rosa se enfrenta directamente, al otro lado de la red, con la hija de ésta.
- Su hijo está situado diagonalmente al otro lado de la red, con respecto al peor jugador.
- El mejor jugador y el peor jugador ocupan el mismo lado de la red.

¿Quién es el mejor jugador?

A) Rosa
B) El hermano de Rosa
C) La hija de Rosa
D) El hijo de Rosa
E) Todos juegan igual

17. Durante un juego de naipes, en una de las rondas, se distribuye tres grupos de igual número de cartas. Si el primero totaliza 37 puntos; el segundo 35; el tercero 24; y en total hay cuatro cartas de 11 puntos, cuatro de 12 puntos y cuatro "ases" (A). Entonces el último grupo tiene:
Observación: considerar al valor de la carta "A" = 1 punto.

A) tres cartas del mismo valor.
B) solamente ases.
C) dos ases.
D) una carta de 12 puntos.
E) solamente una carta de 11 puntos.

18. En un campeonato de fútbol participan 8 equipos. En cada partido se disputan 2 puntos y todos juegan contra todos, además cuando hay empate se distribuyen los dos puntos en disputa.
¿Cuál fue el máximo número de partidos empatados si el campeón absoluto resultó con 8 puntos?

A) 21 B) 29 C) 20
D) 27 E) 30

19. Una arañita sube durante el día 5 metros de una torre y resbala durante las noches 3 metros. ¿Cuántos días demora en llegar a la cúspide si la torre tiene 145 metros de altura y cuántos metros ascendió en total?

A) 73 – 355 B) 72 – 355 C) 71 – 355
D) 70 – 356 E) 75 – 356

20. Si de cada 10 mujeres, 5 son solteras. ¿Cuántas casadas habrán de 100 que no sean casadas?

A) 200 B) 50 C) 150
D) 100 E) 75

21. Yéssica decía a menudo:
"El hombre con quien me he de casar ha de ser alto, simpático, más o menos corpulento, extranjero, que use lentes y que sea un poco cojo". Tuvo varios amigos: Andrés es alto, oscuro, extranjero, usa lentes, pero no es cojo. Pedro no es muy bajo de estatura, usa lentes cojea un poco, no es oscuro, es extranjero, pero no es flaco. David cojea un poco, tiene piel clara y es poco robusto, usa lentes y es ruso. ¿Con cuál de los tres se casaría Yéssica, si fuese su única oportunidad?

A) Andrés B) Pedro C) David
D) Ninguno E) Pablo

22. Una persona produce, mientras duerme, 680 calorías. ¿Cuántas calorías producirá si duerme desde las 9:30 p.m. hasta las 9:30 a.m.?

A) 700 B) 710 C) 680
D) 720 E) 690

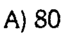
23. Cierta clase de microbio tiene la propiedad de duplicarse en cada minuto. Si hay un recipiente y lo llena por la mitad a los 28 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará el recipiente?

A) 56 B) 50 C) 29
D) 30 E) 52

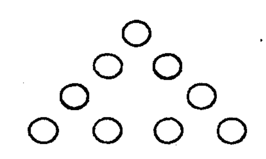
24. En un colegio enseñan abogados y profesores varios abogados son profesores y varios profesores son abogados. Si cinco profesores no son abogados y cinco abogados no son profesores, pero trabajan con cuatro profesores. ¿Cuántos abogados-profesores hay?

A) 5 B) 4 C) 15
D) 10 E) 14

25. Distribuir los números del 1 al 9 en los círculos del triángulo de tal manera que cada lado sume 20. Dar como respuesta el menor producto de los números que ocupan los vértices.



A) 80
B) 45
C) 38
D) 76
E) 120

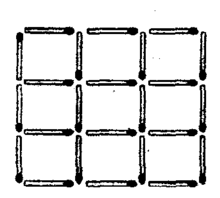


EJERCICIOS CON CERILLAS

26. En el siguiente gráfico, ¿cuál es el menor número de cerillo(s) que se deben cambiar de lugar para obtener una igualdad correcta?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

27. ¿Cuántos palitos deben retirarse, como mínimo, para obtener una figura formada por 5 cuadraditos iguales?



A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

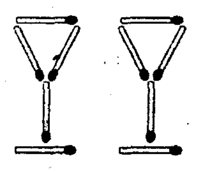
A continuación, trasladar cerillas para formar figuras determinadas:

28. Cambia la posición de "x" cerillas de tal modo que resulten tres cuadrados. Sin dejar cabos sueltos. (***Obs.:*** *"x" es la menor cantidad par de cerillas*).

A) 9
B) 7
C) 5
D) 3
E) 1

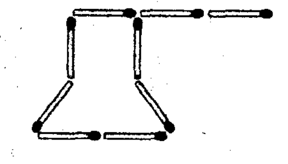
29. Se tienen "2 copas". Se pide cambiar de posición "x"cerillas para que resulte "una casa". Calcular *x*. (***Obs.:*** *"x" es la menor cantidad de cerillas*)

A) 4
B) 5
C) 3
D) 6
E) 7



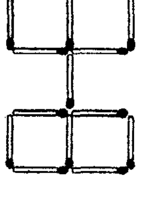
30. Mueve "x" cerillas y transforma "el hacha en 3 triángulos iguales. Calcular "x"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



31. Mueve "x" cerillas para obtener 5 cuadrados iguales. Calcular "x"

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMAS SOBRE PARENTESCO

32. ¿Qué representa para Miguel el único nieto del abuelo del padre de Miguel?

A) Él mismo B) El nieto C) Su hijo
D) Su papá E) Su abuelo

33. La mamá de Luisa es la hermana de mi padre. ¿Qué representa para mí el abuelo del mellizo de Luisa?

A) Mi hermano B) Mi sobrino C) Mí tío
D) Mi abuelo E) Mi hijo

34. Pedro se jactaba de tratar muy bien a la suegra de la mujer de su hermano ¿Por qué?

A) Es su hermana
B) Es su hija
C) Es su tío
D) Es su mamá
E) Es su abuela

35. Una familia consta de dos padres, dos madres, cuatro hijos, dos hermanos, una hermana, un abuelo, una abuela, dos nietos, una nieta, dos esposos, una nuera. ¿Cuántas personas como mínimo conforman dicha familia?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

36. "Los parentescos son curiosos –observó Andrés – Jaime tiene el mismo parentesco contigo que el que yo tengo con tu hijo.
"Así es, –respondió Carlos– y tú tienes el mismo parentesco conmigo que Jaime contigo".
¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

A) Padre – hijo
B) tío – sobrino
C) Son hermanos
D) Nieto – abuelo
E) Son primos

37. ¿Qué parentesco tengo con la madre del nieto de mi padre, si soy hijo único?

A) Soy su hijo
B) Soy su hermano
C) Soy su esposo
D) Soy su sobrino
E) Soy su nieto

38. Los esposos Ramírez tienen 4 hijos varones. Cada hijo tiene una hermana y cada hermano tiene 3 sobrinos. ¿Cuál es el número mínimo de personas que conforman esta familia?

A) 9 B) 8 C) 10
D) 11 E) 12

39. Una familia está compuesta por 4 parejas de hermanos, 4 tíos, 2 padres, 2 madres, 2 sobrinos, 2 sobrinas, 2 primos, 2 primas. ¿Cuál es el mínimo número de personas que la conforman?

A) 8 B) 7 C) 9
D) 10 E) 11

40. El hermano de Carla tiene un hermano más que hermanas. ¿Cuántos hermanos más que hermanas tiene Carla?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

41. ¿Cuántas personas como mínimo forman una familia que consta de 1 abuelo, 1 abuela, 2 padres, 2 madres, 2 sobrinos, 1 tío, 1 tía, 1 nieta, 2 nietos, 1 nuera, 1 suegra, 1 suegro?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

42. En una reunión se encuentran 2 padres, 2 hijos y 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo se encuentran en dicha reunión?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. La señorita Janeth, al mirar el retrato de un hombre le dijo a su padre (es hijo único). "La madre de ese hombre era la suegra de mi madre". ¿Qué parentesco hay entre la señorita Janeth y el hombre del cuadro?

A) sobrina – tío
B) hija – padre
C) prima – primo
D) nieta – abuelo
E) suegra – yerno

44. El parentesco que existe entre el tío del hijo del tío de Alejandro y el hijo del hijo del tío de Alejandro, es: (Obs: Alejandro tiene un sólo tío).

A) tío – abuelo
B) son primos
C) nieto abuelo
D) padre – hijo
E) son hermanos

45. Si Jhon es nieto del papá de Jaime y no es hermano de Jaime. ¿Qué parentesco existe entre Jaime y Jhon?

A) madre B) hija C) suegra
D) sobrina E) nieta

46. ¿Qué parentesco tiene conmigo una mujer que es la hija de la esposa del único y vástago de mi madre?

A) madre B) hija C) suegra
D) sobrina E) nieta

47. La hermana del hijo de la hermana del hi; del hermano de mi padre es mi...

A) hija B) madre C) nieta
D) sobrina E) primo

PROBLEMAS SOBRE RELACIÓN DE TIEMPOS

48. Si hoy es domingo, ¿qué día será el ayer del pasado mañana de hace dos días?

A) jueves B) viernes C) sábado
D) domingo E) martes

49. Si el anteayer de mañana es lunes. ¿Qué día de la semana será el mañana de anteayer?

A) lunes B) martes C) domingo
D) sábado E) martes

50. Si el día de mañana fuese como pasado mañana, entonces faltarían 2 días a partir de hoy para ser domingo. ¿Qué día de la semana será el mañana del ayer de hoy?

A) sábado B) viernes C) domingo
D) jueves E) miércoles

51. Se sabe que mi cumpleaños es el 27 de este mes y el mes pasado tuvo más días viernes, sábados y domingos. Además, la fecha del penúltimo viernes del mes pasado sumado a la fecha del último viernes del mes que viene es 46. Determinar qué día de la semana caerá mi cumpleaños dentro de tres años. (Año actual 1 991)

A) viernes B) sábado C) miércoles
D) jueves E) lunes

52. Hace 2 días se cumplía que el anteayer del ayer de mañana era martes.
¿Qué día de la semana será, cuando a partir de hoy transcurran tantos días como los días que pasan desde el ayer de anteayer hasta el día de hoy?

A) sábado B) lunes C) martes
D) jueves E) domingo

53. En un determinado mes existen 5 lunes, 5 martes y 5 miércoles, se pide hallar qué día de la semana cae 25 y ¿cuántos días trae dicho mes?

A) martes , 30
B) sábado , 31
C) miércoles , 31
D) jueves , 30
E) jueves, 31

54. En un año *bisiesto*, ¿cuántos días lunes y martes habrá como máximo y en qué día debe terminar dicho año?

A) 51 y lunes
B) 52 y martes
C) 53 y martes
D) 60 y domingo
E) 61 y lunes

55. Si ayer del anteayer de mañana es lunes, ¿qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

A) lunes B) sábado C) miércoles
D) jueves E) domingo

56. Si anteayer Jaimito tuvo un año y el próximo año cumplirá 4 años, entonces ¿en qué fecha nació Jaimito?

A) 2 de enero
B) 1 de enero
C) 29 de diciembre
D) 30 de diciembre
E) 31 de diciembre

57. Si el anteayer del pasado mañana de anteayer es viernes, ¿qué día será el ayer del pasado mañana de ayer?

A) domingo B) lunes C) martes
D) jueves E) sábado

58. Si el anteayer de mañana de pasado mañana es viernes, ¿qué día fue ayer?

A) miércoles B) lunes C) sábado
D) jueves E) martes

59. Ayer tenía 20 años, el próximo año tendré 21 años. Si el día de mañana cumplo años. ¿Qué fecha será?

A) 01 de enero
B) 31de diciembre
C) 02 de enero
D) 30 de diciembre
E) 29 de diciembre

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN LINEAL

60. X es el niño más alto del aula, en la misma aula, Y es más alto que Z y más bajo que W.
¿Cuáles afirmaciones son correctas?
I. Y, Z y W son más bajos que X.
II. X es más alto que W y más bajo que Z.
III. Z es el más bajo que todos.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II
D) I y III E) II y III

61. Se tiene un edificio con cuatro pisos y en cada piso vive una familia. La familia Martínez vive un piso más arriba que la familia González. La familia Dávila vive más arriba que la familia Pravia, y la familia Martínez más abajo que la familia Pravia, ¿en qué piso vive la familia Martínez?

A) 1er. piso B) 2do. piso C) 3er. piso
D) 4to. piso E) 5to. piso

62. Cinco amigos están sentados en una banca en el cine, ubicados uno a continuación de otro. Zenaida y Pedro se ubican en forma adyacente. Pedro no está al lado de Silvia ni de Juan. Zenaida está en un extremo.
Si Silvia y Manuel están peleados, ¿quién se sienta al lado de Silvia?

A) Zenaida B) Pedro C) Juan
D) Manuel E) José

63. Seis amigas están escalando una montaña, Carla está más abajo que Juana, quien se encuentra un lugar más abajo que María.
Daniela está más arriba que Carla pero un lugar más abajo que Tania, quien está más abajo que Rosa, que se encuentra entre Juana y Tania. ¿Quién está en el cuarto lugar del ascenso?

A) María B) Juana C) Carla
D) Tania E) Daniela

64. Jesús, Elvis y Mario son 3 profesionales, uno de ellos es médico, otro, es ingeniero, y otro, abogado; los tres tienen sus oficinas en el mismo edificio, cada uno en un piso diferente. Sus secretarias se llaman: Martha, Julia y Ofelia.

- El abogado tiene su oficina en la planta baja.
- Para dar la contra a la costumbre que indica que las secretarias se cautivan con sus jefes, Julia ésta comprometida con Mario, con quien almuerza todos los días.
- Todas las mañanas Martha sube a desayunar con la secretaria de Elvis.
- Jesús, por una emergencia, hizo descender a su secretaria hasta la oficina del médico.

¿Quién es el médico y quién es el abogado?

A) Elvis y Mario
B) Jesús y Mario
C) Mario y Jesús
D) Elvis y Jesús
E) Jesús y Elvis

65. María es mayor que Sara, Ana es menor que Sara, pero mayor que Ñataly, y Nataly es menor que Vanessa. ¿Cuál de las cinco es la menor de todas?

A) Nataly B) Vanessa C) Sara
D) Ana E) María

66. Sabiendo que:
$x \uparrow y$ significa "*x* es más alta que *y*"
$x \downarrow y$ significa "*x* es más baja que *y*"
¿Cuál de las siguientes alternativas representa: "A es más baja que B, y C es más baja que D, quién a su vez es más alta que B?

a) C ↑ D ↑ A ↑ B
b) D ↓ C ↓ B ↓ A
c) C ↓ D ↑ B ↑ A
d) C ↑ D ↑ B ↑ A

A) a y b B) b y d C) sólo a
D) sólo b E) sólo c

67. Cinco profesores: Miranda, Escalante, Mercado, Vera y Rabines están sentados en fila. Escalante estaba en el extremo de la fila y Mercado en el otro extremo. Vera estaba al lado de Escalante y Miranda al lado de Mercado. ¿Quién estaba en el medio?

A) Escalante B) Rabines C) Miranda
D) Mercado E) Vera

68. Se colocan en un estante seis libros de razonamiento matemático, aritmética, álgebra, física, historia y geometría. Si:

- El libro de aritmética está junto y a la izquierda del de álgebra.
- El libro de física está a la derecha del de aritmética y a la izquierda del de historia.
- El libro de historia está junto y a la izquierda del de geometría.
- El libro de razonamiento matemático está a la izquierda del de álgebra.

De derecha a izquierda, el cuarto libro es de:

A) Raz. Mat. B) Física C) Álgebra
D) Aritmética E) Geometría

69. En cierto examen, Rosa obtuvo menos puntos que María, Laura menos puntos que Lucía, Noemí el mismo puntaje que Sara; Rosa más que Sofía; Laura el mismo puntaje que María y Noemí más que Lucía. ¿Quién obtuvo menos puntaje?

A) Laura B) María C) Rosa
D) Sofía E) Sara

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN CIRCULAR

70. Un abogado invitó a 5 personas a una conferencia. Los nombres de las 6 personas que se reunieron alrededor de una mesa circular eran: Andrés, Luis, Guillermo, Carlos, Eduardo y Marcos. Las profesiones de estos eran: médico, psicólogo, ingeniero, sociólogo, profesor y abogado. El profesor, que tenía discrepancias con Carlos, se sentó frente a Andrés. El médico se sentó frente a Luis. Luis se sentó entre el sociólogo y el profesor. Marcos se sentó a la derecha del ingeniero y frente al abogado. El ingeniero se sentó frente a Eduardo, junto al médico y a la izquierda del profesor. ¿Quién tenía discrepancias con Carlos?

A) Eduardo B) Luis C) Marcos
D) Guillermo E) Andrés

71. En un comedor, 8 comensales se sientan en una misma mesa circular. Las 8 personas son estudiantes de diversas especialidades: el de ingeniería está frente al de educación y entre los de economía y farmacia, el de periodismo está a la izquierda del de educación y frente al de economía. Frente al de farmacia está el de derecho; éste a su vez a la siniestra del de arquitectura. ¿Cuál es la profesión del qué está entre el de biología y educación?

A) Periodismo B) Economía C) Derecho
D) Ingeniería E) Farmacia

72. El señor "X" invita a almorzar a sus amigos P, D, F, G, J y N. El señor "X" está en buenas relaciones con los seis, pero:

I. "P" y "F" no se hablan desde niños.
II. "G" , "P" y "D" son hinchas de equipos rivales.
III. "J" le debe dinero a "N"
IV. "G" le quitó la novia a "F"
V. "J" y "F" son de diferentes tendencias políticas
VI. "N" y "G" han reñido por asuntos laborales.

El señor "X" quiere sentarse con sus amigos alrededor de una mesa circular tal que cada comensal tenga a ambos lados personas con las que esté en buenas relaciones y además el señor "X" quiere tener a su lado a D y sentar juntos a J y a P. ¿De qué manera los ubica? (Indicar quien está entre F y P)

A) X B) G C) J
D) D E) N

73. En un comedor, 8 comensales se sientan en una mesa circular, cada uno es de distritos diferentes. El de Chorrillos está al frente del que vive en Miraflores y entre los que viven en Barranco y Surco. El que vive en La Molina está a la izquierda del que vive en Miraflores y frente al que vive en Barranco. Frente al que reside en Surco está el que reside en San Isidro, quien a su vez está a la siniestra del que vive en Vitarte. ¿En dónde reside el que está entre los que viven en Santa Anita y Miraflores?

A) Barranco B) Chorrillos C) Molina
D) Surco E) San Isidro

PROBLEMAS SOBRE ORDEN DE INFORMACIÓN EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

74. Juana tiene un amigo en cada una de las ciudades siguientes: Lima, Cusco e Iquitos; pero cada uno tiene caracteres diferentes: tímido, agresivo y liberal:

- Marcos no está en Lima.
- Luis no está en el Cuzco.
- El que está en Lima no es tímido.
- Luis no es liberal, ni tímido.

Se quiere saber: en qué ciudad vive Víctor, que es uno de los amigos y qué carácter tiene.

Además se sabe que quien vive en Iquitos es agresivo.

A) Lima ; liberal
B) Lima ; agresivo
C) Cuzco ; tímido
D) Cuzco ; liberal
E) Iquitos ; agresivo

75. "A", "B", "C" y "D" corresponde a lo nombres: Roberto, Gerardo, Manuel y Jesús (No necesariamente en ese orden).

- Roberto, "C" y "D" fueron al teatro juntos.
- Gerardo, "A" y "B" trabajan en la misma fábrica.
- "A", "C" y Manuel concurren a los juegos mecánicos con regularidad.
- "D", "B" y Jesús juegan en el mismo equipo.
- "C" es moreno, en cambio, Gerardo es de tez blanca.

Determinar quién es moreno y quién es "A".

A) Jesús; Roberto
B) Jesús; Gerardo
C) Manuel; Roberto
D) Manuel; Gerardo
E) Roberto; Gerardo

76. Un estudiante, un médico y un abogado comentan que cada uno de ellos ahorra en un banco diferente:

- Yo ahorro en Interbanc, dice el médico a Jacinto.
- Tito comenta: "El banco que más intereses paga es el Latino"
- El abogado dice: "Mi secretaria lleva mi dinero al Banco de Lima".
- El tercer personaje se llama José.

¿Cómo se llama el estudiante?

A) José B) Jacinto C) Tito
D) Pedro E) Alex

77. Ana, Betty, Carol y Dina son 4 señoritas cuyas ocupaciones son: enfermera, profesora, secretaria y actriz (aunque no en ese orden necesariamente). Se sabe lo siguiente:

- Ana y Betty son vecinas y se turnan para llevarse el auto al trabajo.
- Betty gana más dinero que Carol.
- Ana le gana siempre a Dina jugando casino.
- La actriz no vive cerca de la casa de la profesora.
- La enfermera camina siempre a su trabajo.
- La única vez que la secretaria vio a la actriz detuvo su auto para pedirle un autógrafo.
- La actriz gana más dinero que la profesora o la secretaria, pero no tiene auto.

¿A qué ocupación se dedica Carol?

A) enfermera B) profesora C) secretaria
D) actriz E) contadora

78. José, Carlos, Manuel tienen diferentes aficiones y gustos en futbol (S.C., A.L. y "U"); en literatura (novela, poesía y periodismo); en licores (gin, pisco, cerveza) y en cigarrillos ("X", "Y" y "Z").

Se sabe que:

- Carlos no simpatiza con S.C.
- Al simpatizante de la "U" le gusta el pisco.
- El que fuma "X" es periodista.
- El simpatizante de S.C. toma cerveza.
- José disfruta cuando juega la "U" o lee a Bécquer.
- Manuel fuma "Y".
- El hincha de A.L. trabaja en el diario "El Saber".

Mencione los 4 gustos de José.

A) S.C. , cerveza, novela y "Y".
B) A.L., Gin, periodismo y "X".
C) "U", pisco, poesía y "Z".
D) S.C., pisco, novela y "X"
E) A.L., cerveza, novela y "Y"

79. Marcos, Janeth, Manuel y Magaly son hinchas de los siguientes equipos (no necesariamente en ese orden): Boys, Universitario, Cristal y Alianza. Marcos no es hincha de Boys y su amigo tampoco. Si sabemos que Magaly es hincha de Universitario y su enamorado es hincha de Cristal y es el único amigo de Marcos, ¿Marcos, hincha de qué equipo es?

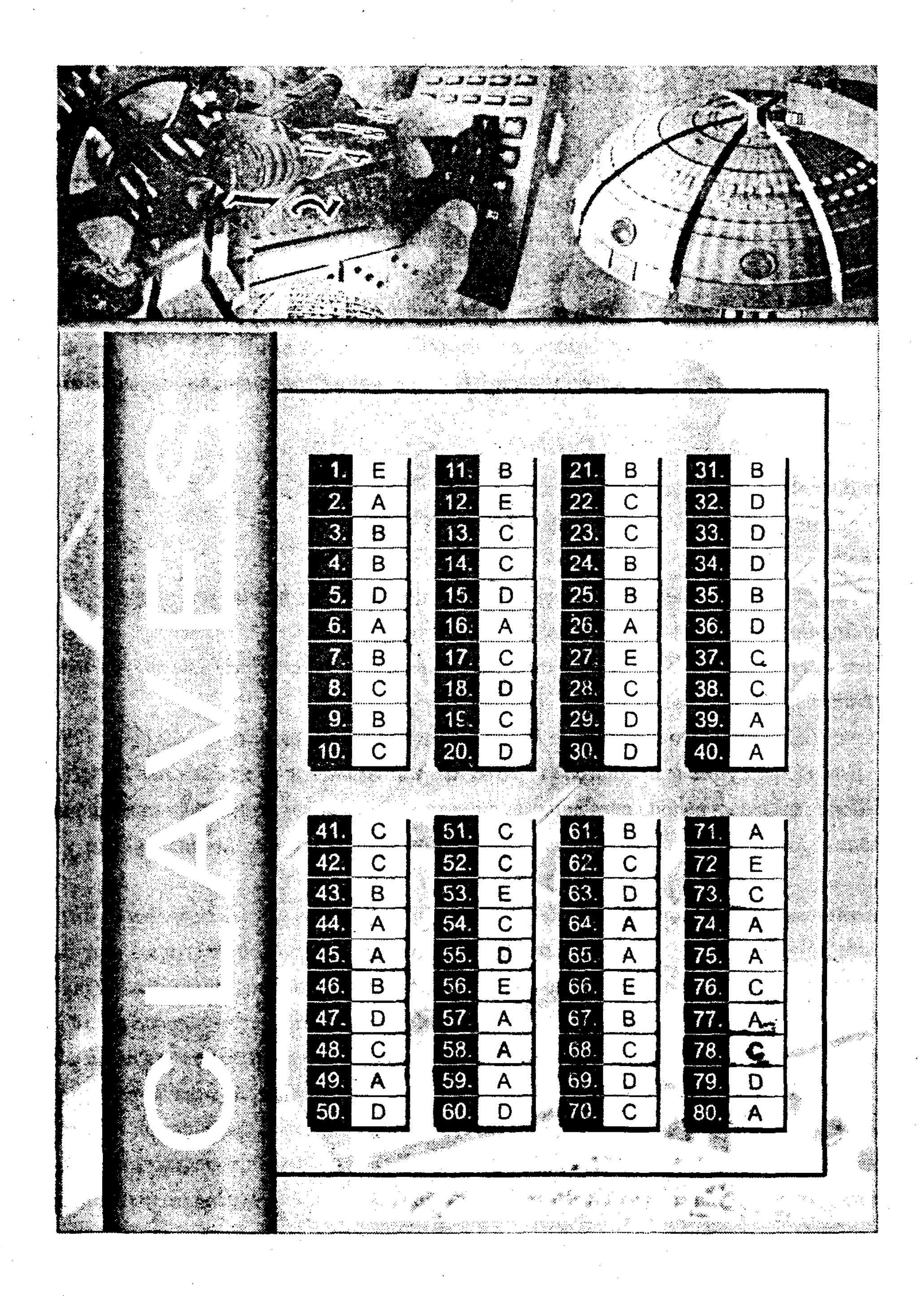
A) Universitario B) Boys C) Cristal
D) Alianza E) Boys y Cristal

80. Están en una sala de conferencia: un ingeniero, un contador, un abogado y un médico. Los nombres, aunque no necesariamente en ese orden, de los profesionales, son Pedro, Diego, Juan y Luis si se sabe que:

1. Pedro y el contador no se llevan bien.
2. Juan se lleva muy bien con el médico.
3. Diego es pariente del abogado y éste es amigo de Luis.
4. El ingeniero es muy amigo de Luis y del médico.

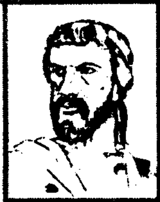
¿Quién es el médico?

A) Pedro B) Diego C) Juan
D) Luis E) Pablo



1.	E	11.	B	21.	B	31.	B
2.	A	12.	E	22.	C	32.	D
3.	B	13.	C	23.	C	33.	D
4.	B	14.	C	24.	B	34.	D
5.	D	15.	D	25.	B	35.	B
6.	A	16.	A	26.	A	36.	D
7.	B	17.	C	27.	E	37.	C
8.	C	18.	D	28.	C	38.	C
9.	B	19.	C	29.	D	39.	A
10.	C	20.	D	30.	D	40.	A

41.	C	51.	C	61.	B	71.	A
42.	C	52.	C	62.	C	72.	E
43.	B	53.	E	63.	D	73.	C
44.	A	54.	C	64.	A	74.	A
45.	A	55.	D	65.	A	75.	A
46.	B	56.	E	66.	E	76.	C
47.	D	57.	A	67.	B	77.	A
48.	C	58.	A	68.	C	78.	C
49.	A	59.	A	69.	D	79.	D
50.	D	60.	D	70.	C	80.	A



Thales de Mileto

Thales fue un ilustre geómetra griego que vivió aproximadamente entre los años 640 a 550 a.n.e. a quien se le conoce como el "Padre de las Matemáticas Griegas".

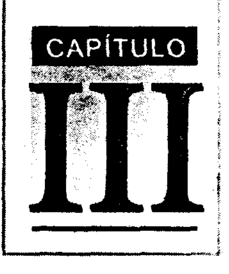
Es considerado uno de los "Siete sabios" de la antigüedad; se destacó tanto en filosofía como en matemática. A él se le atribuye muchos trabajos matemáticos que nos son familiares y que elevan a verdades generales lo que para los egipcios eran resultado de simples mediciones. Se le reconoce así las primeras "demostraciones" de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico; entre ellos podemos citar:

- *Todo diámetro biseca a la circunferencia.*
- *Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.*
- *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*
- *Dos triángulos que tienen dos ángulos y un lado respectivamente iguales son iguales.*
- *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*
- *El famoso Teorema de Thales: Los segmentos determinados por una serie de paralelas cortadas por dos transversales son proporcionales.*

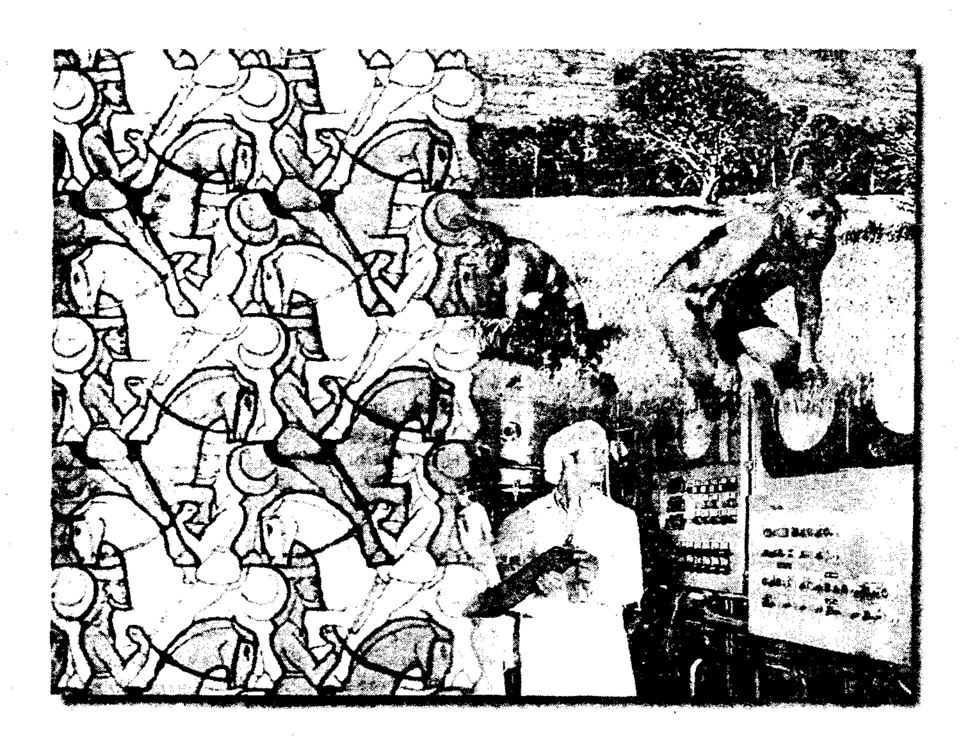
De joven fue un próspero mercader de Mileto, cuyos negocios le permitieron viajar por diversos lugares. Estando en Egipto le fascinaron la Aritmética y la Geometría practicada por los sacerdotes y fue allí donde se ideó un método para hallar la altura de las pirámides mediante la sombra que éstas proyectaban. Luego se retiró del comercio para dedicarse al estudio de las matemática y de la Filosofía.

Se cuenta muchas anécdotas acerca de Thales. Según Plutarco, era el típico sabio distraído, concentrado sólo en sus investigaciones astronómicas. Se dice que predijo el eclipse solar del año 585 a.n.e. y el cálculo del número correcto de días del año. Thales por sus interesantes y múltiples trabajos adquirió gran fama popular. Fue el famoso sabio que luego de caer en un pozo por mirar las estrellas escucho de una anciana: "Pretendes observar las estrellas y si nisiquiera ves lo que tienes a tus pies". También se atribuye a Thales la historia del mulo que cargaba sal y que se metía en el río para disolverla y aligerar su pesa; Thales le quitó esa mala costumbre cargándolo con esponjas.

Cuando le preguntaron a Thales qué recompensa quería por sus descubrimientos, contestó: "Me consideraría bien recompensado si los demás no se atribuyeran mis hallazgos y reconocieran que son míos".



INDUCCIÓN Y DEDUCCIÓN



Día a día nos enfrentamos a situaciones en las cuales debemos razonar inductiva ó deductivamente para poder resolverlos, ahora, para razonar inductivamente ó deductivamente se requiere buenas dotes de observación e imaginación. Las ventajas obtenidas de potenciar esta clase de razonamiento compensará con creces el tiempo que le dediquemos.

Lectura 3

Cuadrados Mágicos

Existe un libro chino muy antiguo llamado Yih King. Nadie sabe quién lo escribió. En el libro se cuenta la historia de una gran tortuga que apareció un día en el río Amarillo. En el dorso de su caparazón había extrañas marcas. Las marcas eran puntos que indicaban los números del 1 al 9. Estaban dispuestos de tal forma que, no importaba en qué dirección sumaran los números, la respuesta era siempre 15. Era un cuadrado mágico. Supongamos ahora que tenemos un tablero cuadrado que comprende 5 casillas por lado o sea 25 casillas en total; inscribamos en cada casilla uno de los números 1,2,3.....25, de forma que la suma de los números de una línea cualquiera, la de los números de una columna cualquiera o de una de las dos diagonales sean iguales. Un cuadrado así, se denomina cuadrado mágico de 5° orden (es un cuadrado de orden impar, puesto que 5 es un número impar), de forma general un cuadrado mágico de n casillas por línea comprenderá n casillas en total, y se llamará par o impar según la paridad de n; en cada casilla estará (una sola vez) uno de los números de la sucesión: 1, 2, 3,... n. La construcción de un cuadrado mágico es un problema teórico bastante difícil, los primeros estudios se remontan al bizantino Emanuel Moschopoulos en el siglo XIII. Damos, aquí, el método dado por Bachet de Meziriac en 1612, en su libro: Problemas Placenteros y Deleitables, este método es sólo válido para un cuadrado de orden impar (que supondremos de 5 casillas por línea, para simplificar la explicación).

1. Dibujar el cuadrado, trazando líneas paralelas a los lados.
2. Alargar las paralelas más alla de cada lado, y construir así, fuera del cuadrado unos pequeños cuadrados semejantes a los primeros y que vayan decreciendo siempre en número de dos hasta que terminen en un solo cuadradito de arriba".(ver la figura)
3. Inscribir la cifra 1 en "el cuadradito de arriba" después en diagonal inscribir los números en su orden natural: 1, 2, 3, 4, ... Se sitúan así dentro del gran cuadrado leyéndolos línea a línea los números 11, 7, 3 para la primera línea (separados por dos casillas blancas). Los números 12 y 8 para la segunda línea, etc.
4. Para terminar pasamos los números que "rebasan", dentro del cuadrado grande según lo siguiente: los de arriba van abajo, los de abajo van arriba, los de la derecha van a la izquierda y los de la izquierda van a la derecha, señalando que hay que llevar el número que se halla fuera del cuadrado a la misma fila donde se encuentra tantos lugares más adelante como unidades hay en el lado del cuadrado. En nuestro ejemplo, la cifra 1 debe bajarse 5 casillas puesto que el cuadrado tiene un lado de 5 unidades.

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

El número secreto en un cuadrado mágico de orden impar es el del centro. Multiplica este número por cinco para obtener los totales de las líneas. En este cuadrado mágico dicho total es 65

FUENTE : El mundo de los niños Tomo X

INDUCCIÓN - DEDUCCIÓN

Objetivos

1. *Desarrollar la capacidad de análisis para enfrentar situaciones de índole diversa.*
2. *Dotar al estudiante de herramientas metodológicas adecuadas para la resolución de problemas que exigen el uso de pensamiento creativo.*
3. *Ejercitar la capacidad de observación para establecer relaciones que permitan llegar a la solución de un problema empleando el razonamiento Inductivo – Deductivo.*

Introducción

En relación con el estudio de la matemática en nuestra sociedad, encontramos aún algunos prejuicios: unos dicen, por ejemplo: "sólo personas de gran talento, pueden dedicarse a la matemática", mientras que otros afirman que para ello es preciso tener una "memoria matemática" capaz de permitir recordar fórmulas y saber cómo y cuándo aplicarlas.

Las expresiones: "soy incapaz para la matemática", "no he nacido para los números", "me falta memoria para aprender todas las fórmulas", etc., etc., son un producto amargo del tipo de enseñanza memorística y mecanizada que hemos recibido desde nuestra infancia, debido a la falta de un sistema educativo adecuado, objetivo y verdaderamente científico capaz de satisfacer las expectativas de la gran mayoría de estudiantes y no sólo de un sector, cuyo beneficio obedece claramente a intereses egoístas.

En consecuencia, nos corresponde revertir esta situación, poniendo en práctica nuestra capacidad de raciocinio y análisis objetivo. Contribuiremos a ello, en esta parte del curso, desarrollando la parte inductiva –deductiva de nuestro razonamiento para lograr, de esta manera, un mayor grado de abstracción.

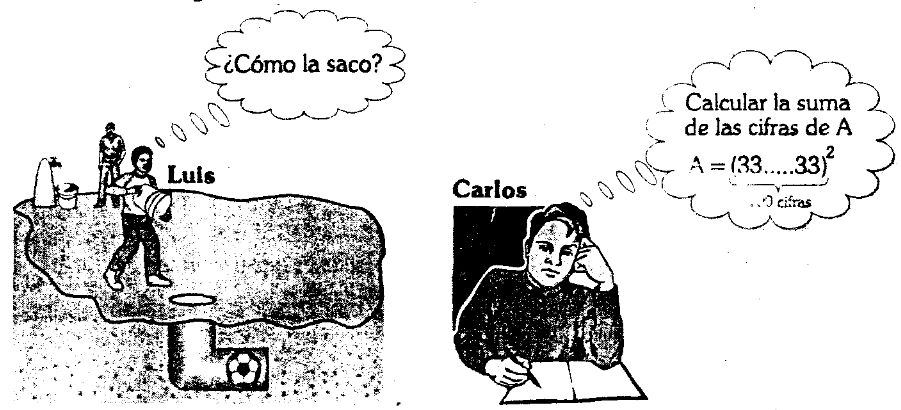
Quizá en algunas ocasiones, durante la búsqueda de la solución de alguna interrogante relacionada con nuestra vida diaria o al intentar resolver problemas netamente matemáticos, nos hayamos encontrado un tanto desorientados sobre cómo afrontarlos, entonces nos asaltó la duda y surgieron las eternas preguntas: "¿Por dónde empezar?, ¿Qué estrategia plantear y seguir?" Parte de culpa de estar en dicha situación la tiene el hecho de no tener en claro los conceptos de razonamiento, pensamiento creativo, lógica deductiva, lógica inductiva, etc.

El objetivo entonces del presente capítulo será estudiar los diversos conceptos y aplicarlos manejando criterios adecuados, desarrollando, además, ejemplos necesarios para un mejor desenvolvimiento dentro del curso de razonamiento matemático y actividades en general.

Recomendación final: Nunca olvides que el primer paso es comprender el problema, una vez logrado esto debes dar el siguiente paso: idear cómo afrontarlo; cada problema debe ser un reto, para ello debes leer atentamente la parte teórica y rescatar las mayores observaciones de cada ejemplo. "Después de haber resuelto un problema, debes valorar más el proceso inductivo –deductivo y no tanto la respuesta, ello te permitirá salir airoso en cada problema siguiente".

¿Qué es estrategia?

Analiza atentamente las siguientes situaciones :



En la primera de ellas una pelota ha caído por un estrecho orificio, no tan profundo, pero no al alcance de los brazos de Luis; él no dispone de palos ni varas para extraerla, Pedro que estaba sacando agua, observa la escena y se pregunta: "¿qué hará él para poder sacar la pelota?" En el siguiente caso Carlos está frente a un problema que se ve muy laborioso: "¿Cómo resolverlo?" En ambos casos será necesario pensar detenidamente sobre la situación y elaborar un plan que les permita conseguir sus objetivos; dicho plan recibe el nombre de **estrategia**.

La palabra estrategia proviene del griego "**strategia**" (generalato, aptitudes de general), que en el contexto de nuestro interés se entiende como el plan o técnica para dirigir un asunto o para conseguir un objetivo.

En la primera situación, una posibilidad sería buscar ayuda, traer herramientas y "ampliar el hueco lo cual no está mal, pero sería muy trabajoso y mostraría que no pensamos mucho sobre el asunto y estamos procediendo de manera mecánica. Otra posibilidad podría ser echar abundante agua por el orificio, la pelota flotará y podremos sacarla, lo cual sería una solución más razonada, ¿no crees?

Para resolver la segunda situación, deberemos aplicar la inducción y para ello hay que tener una idea de lo que es razonamiento inductivo–deductivo, nociones que estudiaremos más adelante.

¿Qué es inducción?

La palabra inducción proviene del latín "**Inductio**", ("**in**" : en y **ducere** : conducir); que es la acción y efecto de inducir. Es definido como un modo de razonar que consiste en sacar de los hechos particulares una conclusión general; así, la inducción desempeña un gran papel en las ciencias experimentales. –Más adelante podremos apreciar la forma de aplicar este modo de razonar en la resolución de problemas matemáticos.

¿Qué es deducción?

La deducción es la acción de deducir, también es la **conclusión** que se obtiene de un proceso deductivo. La palabra deducir, proviene del latín "**deducere**" que significa sacar consecuencias. En el presente estudio veremos cómo a partir de casos generales llegamos a establecer cuestiones particulares que nos interesan para la resolución de problemas.

Podemos decir, figurativamente, que la inducción y la deducción son como las dos caras de una misma moneda, estableciéndose como herramientas poderosas que han permitido el avance de la ciencia en general. ¿Cómo hizo Arquímedes para determinar, según él, el valor aproximado del número π y el cálculo de áreas de regiones sumamente complicados para su época? ¿Cómo llegó Kepler a establecer sus tres famosas leyes? ¿De que manera Galileo procedió para establecer la relación: $e = \frac{1}{2}gt^2$?

¿Sospechas, cómo llegó Newton a dar la ley de la gravitación universal a partir de hechos comunes contemplados por todos nosotros, pero que él supo observar atentamente para enunciar tan importante teoría? y ¿Lobatcheysky, para crear su geometría no euclideana? y ¿Einstein, con su Teoría de la Relatividad? . . . En fin, gran parte de lo establecido hasta ahora por la ciencia se ha hecho en base a la experimentación, a la aplicación de la inducción, y deducción, y al proceso de ensayo-error con el estudio y el análisis de todas las consecuencias que se derivan de ellos, los cuales ha permitido el avance de la ciencia en todos los campos.

MÉTODOS RAZONATIVOS: Lógica inductiva y lógica deductiva

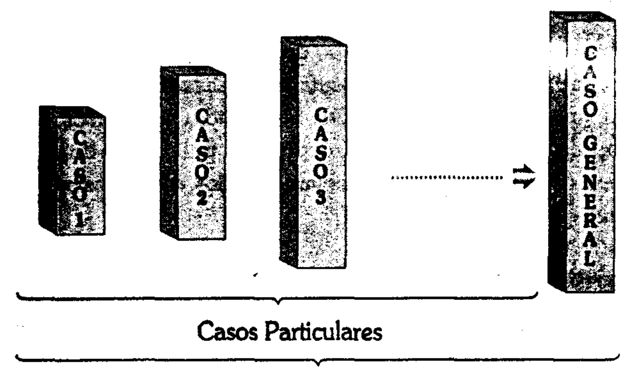
Al igual que Daniela, muchos estudiantes al empezar la resolución de un problema siempre se preguntan: "*¿Cómo resuelvo este problema?, ¿por dónde empiezo la resolución del problema?, ¿será éste el camino adecuado para su resolución?*"; indudablemente que para el ejemplo anterior, el contar uno por uno los palitos de fósforos del castillo no sería una resolución adecuada, ya que sería muy tedioso y agotador realizar dicha operación. Siempre que se busca la solución a un problema, debemos buscar los caminos más cortos para llegar a ella, debemos analizar nuestros datos e incógnitas y al relacionarlos debemos encontrar una "estrategia" de cómo afrontar el problema, "ser creativos y analistas" para buscar esa relación de datos con incógnitas. Justamente, a partir de estas ideas ("tener estrategia", "ser creativo y analista"), surgen dos herramientas importantes que nos permiten afrontar un problema: *la lógica inductiva y la lógica deductiva*.

Las lógicas inductiva y deductiva representan la base del razonamiento matemático, pilares sobre los cuales se construye esta hermosa disciplina, en base a la observación y el análisis.

LÓGICA INDUCTIVA (inducción)

Es un modo de razonar, en el que a partir de la observación de casos particulares, nos conduce al descubrimiento de leyes generales, con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.

Así:



El método del razonamiento inductivo es un método especial de demostración matemática que permite, en base a observaciones particulares, juzgar las regularidades generales correspondientes.

Ejemplo:

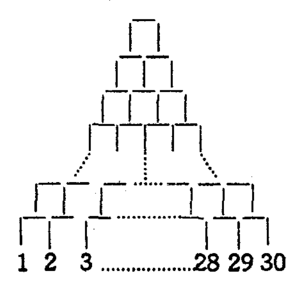
$(15)^2 = 225$
$(35)^2 = 1225$
$(85)^2 = 7225$
$(125)^2 = 15625$
} Casos particulares

"Podemos concluir que todo número que termina en 5, al elevarlo al cuadrado, su resultado termina en 25"
$(\ldots\ldots 5)^2 = \ldots\ldots 25$
} Conclusión general

} Razonamiento Inductivo

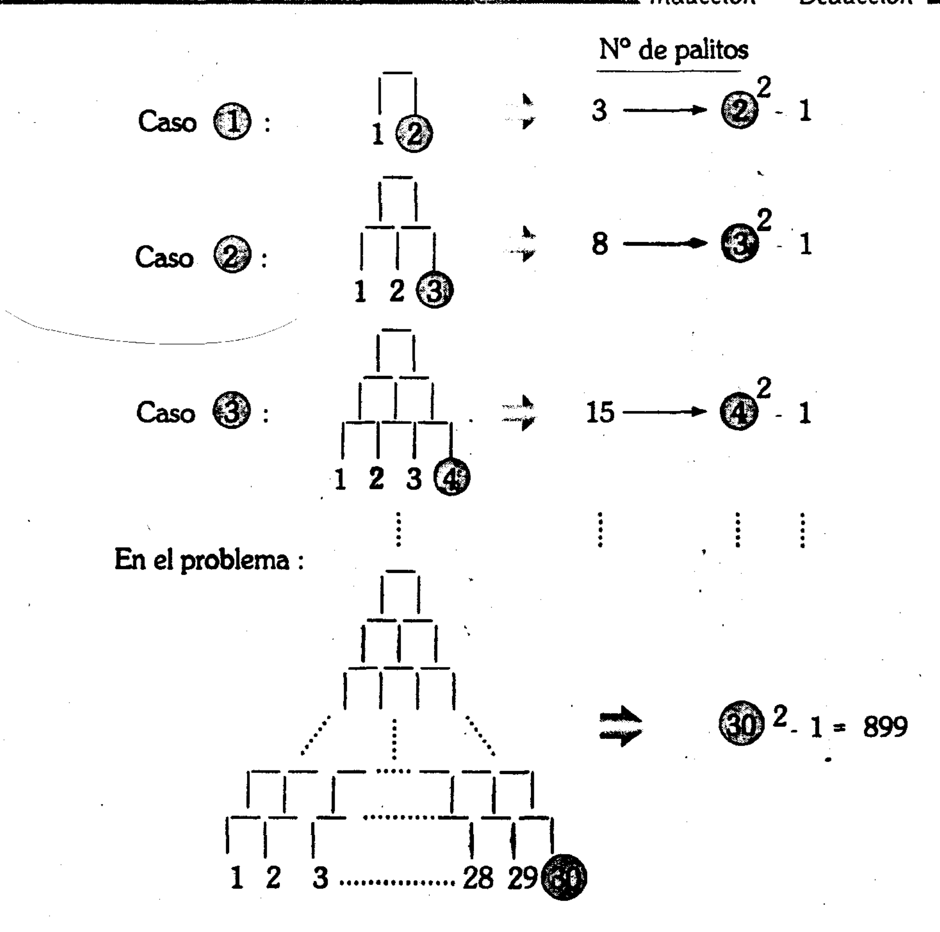
Ejemplo 1

Calcular el número total de palitos de fósforo que conforman la torre de la derecha.



Resolución:

Como se observa, contar los palitos uno por uno va a resultar una tarea bastante tediosa. Nos damos cuenta que la distribución de palitos en la torre obedece a una cierta formación (va aumentado *uniformemente por pisos*), *entonces aplicamos* inducción, analizando los 3 casos más simples que se puedan encontrar:



∴ N° de palitos = 899

Conclusiones:

- Cuando un ejercicio se presenta **muy operativo** y los casos se distribuyen respondiendo a una **formación** recurrente, entonces ensayamos un proceso inductivo.
- Generalmente es necesario y suficiente analizar convenientemente tres casos particulares, y sencillos, manteniendo la forma inicial (general) en que se presenta el ejercicio.

Ejemplo 2

Calcular el valor de "E" y dar como respuesta la suma de sus cifras.

$$E = (\underbrace{333\ldots334}_{101\text{ cifras}})^2$$

Resolución:

Elevar el número al cuadrado resulta muy operativo y tedioso, pero nos damos cuenta también que la base tiene **cierta formación** (la cifra 3 se repite constantemente); entonces recurrimos a la inducción, analizando los casos más simples, análogos al de la expresión "E"

$$\underbrace{(34)^2}_{2\text{ cifras}} = 1156 \Rightarrow \text{Suma de cifras} = 13 \rightarrow 6(2)+1$$

$$\underbrace{(334)^2}_{3\text{ cifras}} = 111556 \Rightarrow \text{Suma de cifras} = 19 \rightarrow 6(3)+1$$

$$\underbrace{(3334)^2}_{4\text{ cifras}} = 11115556 \Rightarrow \text{Suma de cifras} = 25 \rightarrow 6(4)+1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$E = (\underbrace{333\ldots3334}_{101\text{ cifras}})^2 = \underbrace{111\ldots11}_{101\text{ cifras}}\underbrace{55\ldots556}_{101\text{ cifras}} \Rightarrow \text{Suma de cifras} = 6(101)+1 = 607$$

$$\therefore \text{Suma de cifras} = 607$$

Ejemplo 3

Calcular el valor de: $E = \sqrt{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 + 1}$

Resolución:

Multiplicar, sumar y extraer la raíz cuadrada va a ser demasiado operativo. Observando detenidamente el problema nos damos cuenta que tiene una particularidad (producto de cuatro números consecutivos); entonces aplicamos inducción, analizando los casos mas simples sin que se pierda la forma original del problema.

$$\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1} = \sqrt{25} = 5 = \underbrace{1 \cdot 4}_{} + 1$$
→ producto del menor con el mayor

$$\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1} = \sqrt{121} = 11 = \underbrace{2 \cdot 5}_{} + 1$$
→ producto del menor con el mayor

$$\sqrt{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1} = \sqrt{361} = 19 = \underbrace{3 \cdot 6}_{} + 1$$
→ producto del menor con el mayor

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\therefore E = \sqrt{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 + 1} = \underbrace{97 \cdot 100}_{} + 1 = 9700 + 1 = 9701$$
→ producto del menor con el mayor

Nota:

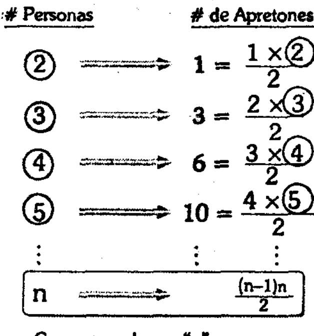
Recuerde que en un proceso inductivo es muy importante el análisis de lo particular a lo general (de lo sencillo a lo complejo), pues el grado de dificultad de un problema en estos casos se presenta gradualmente, conforme se desenvuelve la formación de las condiciones; inclusive, en ciertas ocasiones, hay necesidad de darle una forma más cómoda a los resultados de los casos que se van distribuyendo.

Ejemplo 4

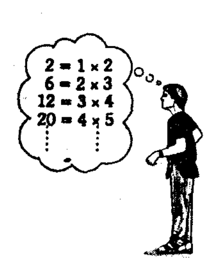
¿Cuántos apretones de manos se producirán al saludarse las 40 personas asistentes a una reunión?

Resolución:

Dado que la cantidad de apretones depende del número de personas, vamos a realizar un análisis inductivo de casos particulares, así:



Caso general para "n" personas



$\therefore$ Para 40 personas $\Rightarrow$ Respuesta: $\dfrac{39\times 40}{2} = 780$ apretones.

Ejemplo 5

Calcular:

$$E = (\underbrace{1111\ldots111}_{50\text{ cifras}} + \underbrace{222\ldots222}_{50\text{ cifras}} + \underbrace{333\ldots333}_{50\text{ cifras}})^2$$

Resolución:

Por inducción:

- $(1+2+3)^2 = 6^2 = 36$
- $(11+22+33)^2 = 66^2 = 4356$
- $(111+222+333)^2 = 666^2 = 443556$

$\vdots$

$$\therefore \quad E = \underbrace{44\ 4\ldots444}_{49\text{ cifras}}3\underbrace{555\ldots555}_{49\text{ cifras}}6$$

CURIOSIDADES SOBRE INDUCCIÓN

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

$111111^2 = 12345654321$

$1111111^2 = 1234567654321$

$11111111^2 = 123456787654321$

$111111111^2 = 12345678987654321$

Observando el resultado en el desarrollo de cada potencia vemos que, iniciando en la cifra 1, se ordenan de manera ascendente los *números naturales consecutivos*, hasta llegar a una cifra que coincida con la cantidad de cifras 1 de la expresión exponencial, para luego descender.

Observación:

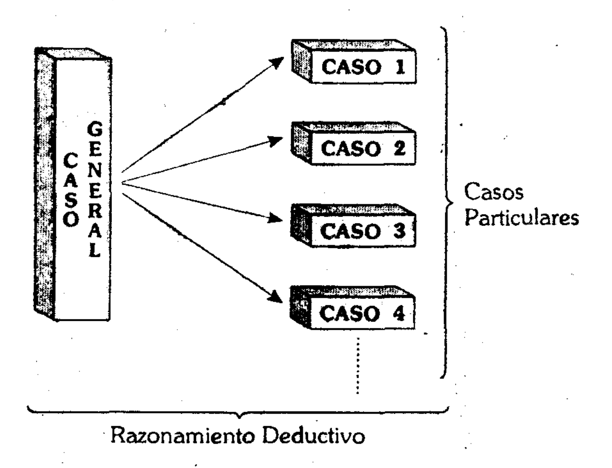
Esta curiosidad se cumple solamente hasta el caso en que la base tenga 9 cifras uno.
Si usted desea comprobarlo bastará con que halle :

$\underbrace{1111111111}_{10\ \text{cifras}}{}^2$ hágalo y se llevará una sorpresa.

24(101)	=	2424	***Análisis*** *(un caso particular)*
53(101)	=	5353	53 es un número de dos cifras y, además, entre 1 y 1 existen un cero (la cantidad de ceros entre "uno" y "uno" es uno menos que la cantidad de cifras del primer factor); entonces en el resultado se escribe el 53 tantas veces como cifras "unos" (1) existen.
53(10101)	=	535353	
53(1010101)	=	53535353	
524(1001)	=	524524	
524(1001001)	=	524524524	
5243(100010001)	=	524352435243	

Es un modo de razonar mediante el cual, a partir de informaciones, casos o criterios generales, se obtiene una conclusión particular.

Así :



Ejemplo:

- Todos los hijos de la señora Ana son valientes
- Pedro es hijo de la señora Ana

} Información general

Por lo tanto : Pedro es valiente} Conclusión particular

} Razonamiento deductivo

Observación:

- En esta parte se debe recordar las principales conclusiones básicas, ya aprendidas con anterioridad (criterios generales de la adición, sustracción, multiplicación, división, etc.), las cuales ayudarán a verificar los casos particulares.
- La deducción e inducción están íntimamente relacionadas. Generalmente, la deducción es el complemento de la inducción, y viceversa.

Ejemplo 1

La suma de los "n" primeros números impares es 900, por lo tanto, ¿cuál es el valor de "n"?

Resolución:

Para resolver este problema, primero hay que conocer a qué es igual la suma de los "n" primeros números impares (caso general), para luego verificar el valor de "n" cuando la suma sea 900 (caso particular).

- $1 + 3 = 4 = (2)^2$ (2 términos) ➡ # de términos

- $1 + 3 + 5 = 9 = (3)^2$ (3 términos) ➡ # de términos

- $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = (4)^2$ (4 términos) ➡ # de términos

$\vdots$

Conclusión general :

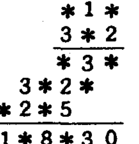
$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 \ldots\ldots}_{\text{"n" términos}} = n^2$$

Caso particular: $n^2 = 900$ . . . . *(Dato)*

$\therefore\ n = 30$

Ejemplo 2

Completar las cifras que faltan en la siguiente multiplicación, sabiendo que cada asterisco (∗) *representa un dígito cualquiera.*



Resolución:

Tengamos presente los criterios generales en la multiplicación para aplicarlo en este caso en particular:

```
     _ 1 _  ×            4 1 5  ×              4 1 5  ×
     3 _ 2               3 _ 2                 3 8 2
     _ 3 0      ➡        _ 3 0       ➡         _ 3 0
   3 _ 2 0             3 2 0                 3 3 2 0
 1 2 _ 5             1 2 _ 5               1 2 _ 5
 1 _ 8 _ 3 0         1 _ 8 _ 3 0           1 _ 8 _ 3 0
```

4 × 3 = 12

5 × 3 = ..5

415 × 8 = 3320

Finalmente, resolviendo las operaciones:

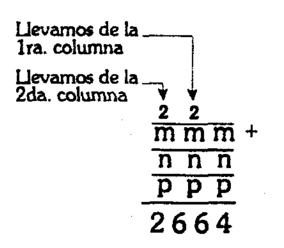
```
    4 1 5  ×
    3 8 2
    8 3 0
  3 3 2 0
1 2 4 5
1 5 8 5 3 0
```

Ejemplo 3

Calcular m × n × p; sabiendo que: m ≠ n ≠ p y además: $\overline{mmm} + \overline{nnn} + \overline{ppp} = 2664$

Resolución:

Ordenando los números en columna:



- **1ra. Columna**: m + n + p = ... 4
- **3ra. Columna**: m + n + p + 2 = 26

De la 1ra. y la 3ra. Columna, se deduce que: m + n + p = 24

Buscando tres dígitos diferentes cuya suma sea igual a 24, encontramos:

m = 7 ; n = 8 ; p = 9

∴ Respuesta: 7 × 8 × 9 = 504

Ejemplo 4

Hallar: $E = \overline{abcd} + \overline{mnpp} + \overline{xyzw}$, sabiendo que:

$$\overline{bd} + \overline{np} + \overline{yw} = 160$$
$$\overline{ac} + \overline{mp} + \overline{xz} = 127$$
$$\overline{ab} + \overline{mn} + \overline{xy} = 124$$

Resolución:

Considerando los criterios generales de la adición, ordenamos cada uno de los datos, así:

i)
$$\begin{array}{r} \overline{bd} + \\ \overline{np} \\ \overline{yw} \\ \hline 160 \end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{r} \overline{ac} + \\ \overline{mp} \\ \overline{xz} \\ \hline 127 \end{array}$$

iii)
$$\begin{array}{r} \overline{ab} + \\ \overline{mn} \\ \overline{xy} \\ \hline 124 \end{array}$$

De i) y iii) se deduce:

1ro. d + p + w = 20

2do. b + n + y = 14

En iii): Como : b + n + y = 14, entonces : a + m + x = 11

En ii): Como : a + m + x = 11, entonces : c + p + z = 17

Luego, hallando E:

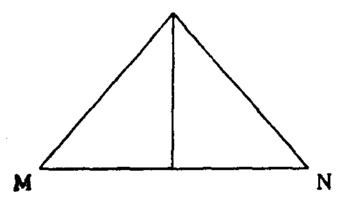
$$E = \overline{abcd} + \overline{mnpp} + \overline{xyzw} \Rightarrow \begin{array}{r} 1\,1\,2 \\ a\,b\,c\,d + \\ m\,n\,p\,p \\ x\,y\,z\,w \\ \hline 1\,2\,5\,9\,0 \end{array}$$

∴ E = 12590

Ejercicios Resueltos

EJERCICIO 1

Si a la siguiente figura le trazamos 50 rectas paralelas a $\overline{MN}$, ¿cuántos triángulos se contarán en total?



Resolución:

Sería muy laborioso el conteo si trazamos las 50 rectas de golpe, entonces aplicando lógica inductiva, iremos trazando dichas rectas uno por uno y analizando cada caso:

M 1 N ⇒ N° de triángulos = 6 = 3(2)

↳ N° de rectas trazadas + 1

M 2 1 N ⇒ N° de triángulos = 9 = 3(3)

↳ N° de rectas trazadas + 1

M 3 2 1 N ⇒ N° de triángulos = 12 = 3(4)

↳ N° de rectas trazadas + 1

⋮

Luego :

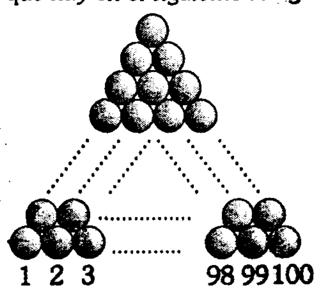
M 50 2 1 N ⇒ N° total de triángulos = 3(51) = 153

↳ N° de rectas trazadas + 1

∴ Respuesta : 153 triángulos

EJERCICIO 2

Calcular la cantidad total de esferas que hay en el siguiente arreglo triangular.



Resolución:

Debido a que la distribución de las esferas responde a una formación triangular, entonces analizaremos, recurriendo a la inducción, los casos iniciales a dicha formación:

Números triangulares

		# de esferas			
→ 1	⇒	1	$=$	**1**	$= \dfrac{1 \times 2}{2}$ (→ Nº esferas en la base)
→ 1, → 2	⇒	$1 + 2$	$=$	**3**	$= \dfrac{2 \times 3}{2}$ (→ Nº esferas en la base)
→ 1, → 2, → 3	⇒	$1 + 2 + 3$	$=$	**6**	$= \dfrac{3 \times 4}{2}$ (→ Nº esferas en la base)
→ 1, → 2, → 3, → 4	⇒	$1 + 2 + 3 + 4$	$=$	**10**	$= \dfrac{4 \times 5}{2}$ (→ Nº esferas en la base)
⋮				⋮	⋮

Luego :

1 2 ... 99 100

$$\Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

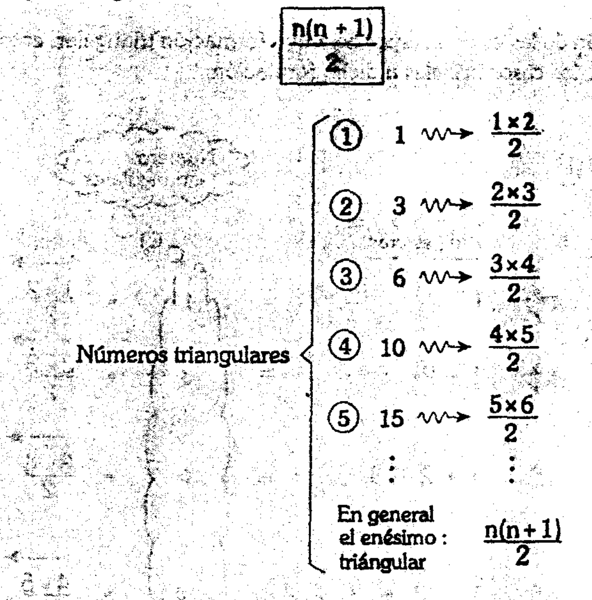
(→ Nº esferas en la base)

Observaciones:

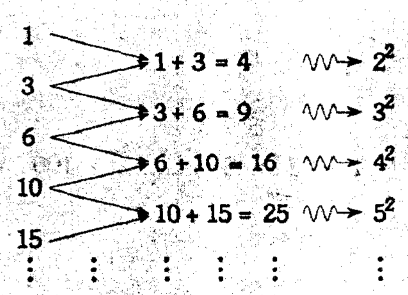
1. A partir del problema anterior concluimos que la suma de los "n" primeros naturales es igual al semiproducto del último por su consecutivo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Existe un conjunto de números, llamados triangulares, que representan el resultado de ir sumando números naturales, parcialmente desde la unidad; cuya forma general es :



3. La suma de dos números triangulares consecutivos nos resulta un número cuadrado perfecto, así:



EJERCICIO 3

Hallar la suma de todos los elementos de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 12 & 13 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \dots & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Sumar los 100 elementos que conforman la matriz va a ser demasiado operativo, aplicando inducción tendremos:

$[\,①\,] \Rightarrow$ suma $= 1 = (1)^3$ → # filas

$\begin{bmatrix} 1 & ② \\ ② & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ suma $= 8 = (2)^3$ → # filas

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & ③ \\ 2 & 3 & 4 \\ ③ & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ suma $= 27 = (3)^3$ → # filas

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & ⑩ \\ 2 & 3 & \dots & 11 \\ 3 & 4 & \dots & 12 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ⑩ & 11 & \dots & 19 \end{bmatrix}$ $\therefore$ suma $= (10)^3 = 1000$ → # filas

$\therefore$ suma $= 1000$

EJERCICIO 4

Calcular "n" y dar como respuesta la suma de sus cifras:

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots\dots}_{\text{"n" términos}} = 625$$

Resolución:

Aplicando inducción tendremos:

$$S = \underbrace{1}_{\text{1 término}} = 1 = 1^2$$

$$S = \underbrace{1 + 3}_{\text{2 términos}} = 4 = 2^2$$

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5}_{\text{3 términos}} = 9 = 3^2$$

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{\text{4 términos}} = 16 = 4^2$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \dots}_{\text{n términos}} = n^2 = 625 \Rightarrow n = 25$$

$$\therefore\ S_{cifras} = 2 + 5 = 7$$

EJERCICIO 5

Calcular "E" y dar como respuesta la suma de sus cifras.

$$E = (\underbrace{333\dots\dots333}_{\text{200 cifras}})^2$$

Resolución:

Por inducción tendremos:

$\underbrace{3^2}_{\text{1 cifra}} = 9 \Rightarrow S_{cifras} = 9 = 9(1)$ → # cifras

$\underbrace{(33)^2}_{\text{2 cifras}} = 1089 \Rightarrow S_{cifras} = 18 = 9(2)$ → # cifras

$\underbrace{(333)^2}_{\text{3 cifras}} = 110889 \Rightarrow S_{cifras} = 27 = 9(3)$ → # cifras

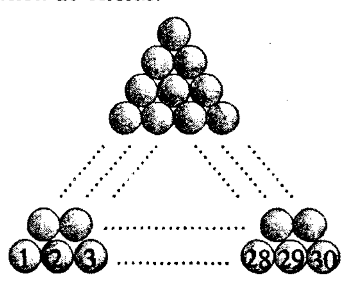
⋮

$E = \underbrace{(333....333)^2}_{\text{200 cifras}} = \underbrace{11....110}_{\text{200 cifras}}\ \underbrace{88....889}_{\text{200 cifras}}$

$\therefore \quad S_{cifras} = 9(200) = 1800$ → Nº cifras

EJERCICIO 6

¿Cuántos puntos de contacto hay en la siguiente distribución de esferas?



Resolución:

Vamos a proceder a contar, aplicando el método inductivo, es decir, analizando casos simples, cuidando que la formación (distribución de las esferas) se mantenga uniformemente, así:

Número de puntos de contacto

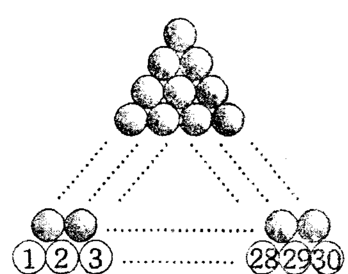
(1)(2) ⟶ $3 = 3(1) = 3\left(\frac{1 \times 2}{2}\right)$

(1)(2)(3) ⟶ $9 = 3(3) = 3\left(\frac{2 \times 3}{2}\right)$

(1)(2)(3)(4) ⟶ $18 = 3(6) = 3\left(\frac{3 \times 4}{2}\right)$

⋮

Luego :



$\therefore$ # Total de puntos de contacto $= 3\left(\frac{29 \times 30}{2}\right)$

$= 1305$

EJERCICIO 7

Hallar la suma de cifras del producto siguiente:

$$P = \underbrace{777...777}_{\text{50 cifras}} \times \underbrace{999...999}_{\text{50 cifras}}$$

Resolución:

Viendo la formación que presenta cada factor, entonces analizaremos la multiplicación para casos más simples, así:

Suma de cifras

$\underbrace{7}_{1\ \text{cifra}} \times \underbrace{9}_{1\ \text{cifra}} = 63 \longrightarrow = 9 = 9(1)$

$\underbrace{77}_{2\ \text{cifras}} \times \underbrace{99}_{2\ \text{cifras}} = 7623 \longrightarrow = 18 = 9(2)$

$\underbrace{777}_{3\ \text{cifras}} \times \underbrace{999}_{3\ \text{cifras}} = 776223 \longrightarrow = 27 = 9(3)$

$\vdots \qquad \vdots$

Luego : $P = \underbrace{77...77}_{49\ \text{cifras}}6\ \underbrace{22...22}_{49\ \text{cifras}}3$

$\therefore\ S_{cifras} = 9(50) = 450$

EJERCICIO 8

A una hoja cuadrada y cuadriculada con 100 cuadraditos por lado, se le traza una diagonal principal. ¿Cuántos triángulos como máximo podrán contarse en total?

Resolución:

Si tratamos de contar los triángulos uno por uno en el cuadrado de 100 cuadraditos por lado, va a resultar muy agotador. Lo mas recomendable sería, en este caso, analizar ejemplos en los cuales el número de cuadraditos sea mucho menor. Aplicando inducción tendremos:

1 / 1 ⇒ # total de $\Delta_S = 2 = 1 \times 2$ (1 → # cuadraditos por lados)

1 2 / 1 2 ⇒ # total de $\Delta_S = 6 = 2 \times 3$ (2 → # cuadraditos por lados)

1 2 3 / 1 2 3 ⇒ # total de $\Delta_S = 12 = 3 \times 4$ (3 → # cuadraditos por lados)

$\vdots \qquad \vdots$

1 2 3 ...... 100 / 1 2 3 ... 100

$\therefore$ # total de $\Delta_S = 100 \times 101 = 10100$

EJERCICIO 9

Calcular la suma de cifras del resultado de A.

$$A = (\underbrace{777\ ...\ 777}_{\text{"n" cifras}} + \underbrace{222\ ...\ 222}_{\text{"n - 1" cifras}}5)^2$$

Resolución:

El valor de "n" puede ser un valor grande como también un valor pequeño. Para hacerlo más sencillo, vamos a analizar este problema para valores pequeños de "n" (2, 3 y 4); y, al final, después de observar lo que sucede, sacaremos una conclusión general.

Para: n = 2

$(77 + 5)^2 = (82)^2 = 6724$

$\Rightarrow\ S_{cifras} = 6 + 7 + 2 + 4 = 19$

Para: n = 3

$(777 + 25)^2 = (802)^2 = 643204$

$\Rightarrow\ S_{cifras} = 6 + 4 + 3 + 2 + 4 = 19$

Para: n = 4

$(7777 + 225)^2 = (8002)^2 = 64032004$

$\Rightarrow\ S_{cifras} = 6 + 4 + 3 + 2 + 4 = 19$

$\vdots$

[illegible]

$$A = (\underbrace{77...77}_{\text{"n" cifras}} + \underbrace{22...22}_{\text{"n - 1" cifras}}5)^2 = 64\underbrace{00...00}_{\text{"n - 3" cifras cero}}32\underbrace{00...00}_{\text{"n - 2" cifras cero}}4$$

$\therefore\ S_{cifras} = 19$

EJERCICIO 10

Calcular la suma de cifras del resultado de:

$$M=\left[\underbrace{\overline{(a+3)(a+3)\ldots(a+3)(a+3)(a+3)}}_{101\text{ cifras}}-\underbrace{\overline{(a-3)(a-3)\ldots(a-3)(a-3)(a-5)}}_{101\text{ cifras}}\right]^2$$

Resolución:

Primero realicemos la diferencia que está dentro del corchete:

$$\begin{array}{r} \overline{(a+3)(a+3)\ldots(a+3)(a+3)(a+3)} \; - \\ \overline{(a-3)(a-3)\ldots(a-3)(a-3)(a-5)} \\ \hline \underbrace{6\quad 6\ \ldots\ 6\quad 6\quad 8}_{101\text{ cifras}} \end{array}$$

$\Rightarrow (a+3)-(a-5)=8$

$\Rightarrow (a+3)-(a-3)=6$

Entonces: $M=[\underbrace{666\ldots6668}_{101\text{ cifras}}]^2$

Aplicando inducción, tendremos:

$\underbrace{(68)^2}_{2\text{ cifras}} = 4624 \Rightarrow S_{cifras} = 16 = 6(2)+4$
└→ Nº cifras del número base

$\underbrace{(668)^2}_{3\text{ cifras}} = 446224 \Rightarrow S_{cifras} = 22 = 6(3)+4$
└→ Nº cifras del número base

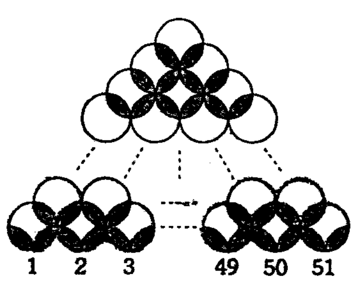
$\underbrace{(6668)^2}_{4\text{ cifras}} = 44462224 \Rightarrow S_{cifras} = 28 = 6(4)+4$
└→ Nº cifras del número base

⋮

$M=(\underbrace{66\ldots668}_{101\text{ cifras}})^2 = \underbrace{44\ldots44}_{100\text{ cifras}}\underbrace{622\ldots22}_{100\text{ cifras}}4 \qquad \therefore S_{cifras} = 6(101)+4 = 610$

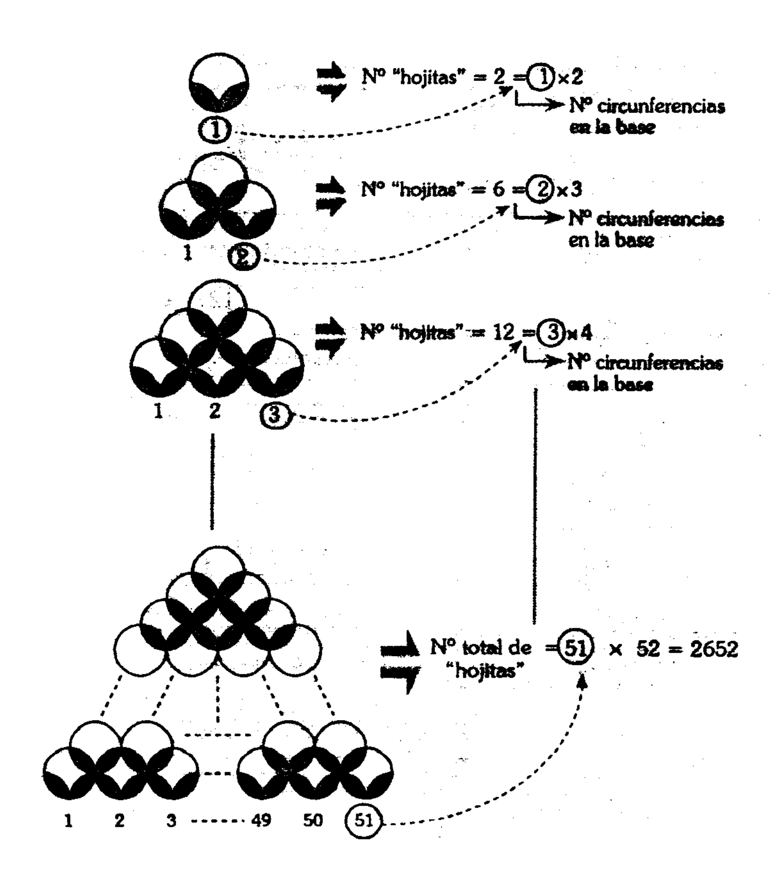
EJERCICIO 11

En la figura, calcular el número total de "hojitas" de la forma indicada:



Resolución:

Contar una por una las "hojitas" que conforman la gráfica, sería demasiado cansado y perderíamos mucho tiempo. Si aplicamos inducción, tendremos:



EJERCICIO 12

Calcular la suma de los términos de las veinte primeras filas en el triángulo numérico siguiente:

$$\begin{array}{l} F_1 \longrightarrow 1 \\ F_2 \longrightarrow 4 \quad 4 \\ F_3 \longrightarrow 9 \quad 9 \quad 9 \\ F_4 \longrightarrow 16 \quad 16 \quad 16 \quad 16 \\ \vdots \end{array}$$

Resolución:

Como nos piden sumar hasta la fila 20, pareciera que la única solución sería aplicar algunas fórmulas del capítulo de series; pero si observamos bien el triángulo numérico, vemos que presenta una ley de formación, la cual la podemos aprovechar aplicando inducción.

$F_1 \longrightarrow 1$ } Suma $= 1 = 1^2 = \left(\frac{1\times2}{2}\right)^2$ → Nº de filas

$F_1 \longrightarrow 1$, $F_2 \longrightarrow 4 \ 4$ } Suma $= 9 = 3^2 = \left(\frac{2\times3}{2}\right)^2$ → Nº de filas

$F_1 \longrightarrow 1$, $F_2 \longrightarrow 4 \ 4$, $F_3 \longrightarrow 9 \ 9 \ 9$ } Suma $= 36 = 6^2 = \left(\frac{3\times4}{2}\right)^2$ → Nº de filas

$\vdots$

$F_1 \longrightarrow 1$, $F_2 \longrightarrow 4 \ 4$, $F_3 \longrightarrow 9 \ 9 \ 9$, $\vdots$, $F_{20} \longrightarrow \cdots\cdots$ } Suma $= \left(\frac{20\times21}{2}\right)^2 = 44100$ → Nº de filas

$\therefore$ Suma de términos : 44100

EJERCICIO 13

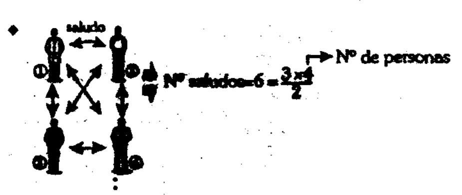
A una reunión asistieron cierto número de personas. Si cada una fue cortés con los demás y en total se contaron 1275 estrechadas de manos (saludos), averiguar, ¿cuántas personas asistieron?

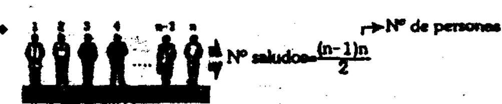
Resolución:

Resolviendo el problema aplicando inducción tendremos:

• saludo — Nº saludos $= 1 = \frac{1\times2}{2}$ → Nº de personas

• saludo — Nº saludos $= 3 = \frac{2\times3}{2}$ → Nº de personas

• 

• 

Por dato del problema tendremos:

$$\text{Nº saludos} = 1275 = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 2550 = 51\times50$$

$\therefore$ Nº de personas: $n = 51$

EJERCICIO 14

Dado el esquema:

S_1: S_2: S_3: S_4: .....

¿Cuántas bolitas habrá en S_{12}?

Resolución:

Si contamos las bolitas en los 4 casos particulares dados, tendremos:

<u>Nº de bolitas</u>

$S_{①} \rightleftarrows 1 = 2^{①}-1$

$S_{②} \rightleftarrows 3 = 2^{②}-1$

$S_{③} \rightleftarrows 7 = 2^{③}-1$

$S_{④} \rightleftarrows 15 = 2^{④}-1$

$\vdots \qquad \vdots$

$\therefore S_{⑫} \rightleftarrows 2^{⑫}-1 = 4096 - 1 = 4095$ bolitas

EJERCICIO 15

Según el esquema mostrado, ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "INDUCCIÓN"?

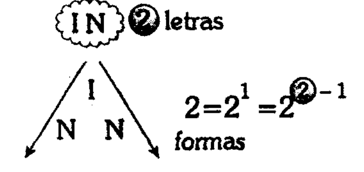
I
N N
D D D
U U U U
C C C C C
C C C C C C
I I I I I I I
O O O O O O O O
N N N N N N N N N

Resolución:

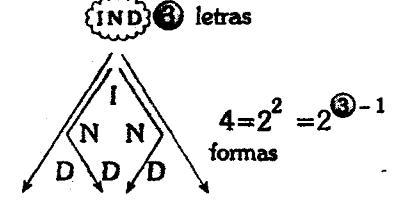
I
N N
D D D
U U U U
C C C C C
C C C C C C
I I I I I I I
O O O O O O O O
N N N N N N N N N

Como se puede apreciar, la palabra "Inducción" puede ser leída (siguiendo las líneas punteadas) de diferentes maneras, demasiadas como para contarlas una por una, ya que sería un trabajo muy laborioso y correríamos el riesgo de obviar algunas, y dar una respuesta equivocada. Por lo tanto, aplicaremos el método inductivo.

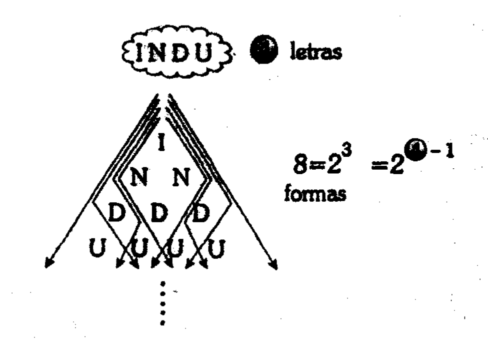
- Digamos que la palabra a leer sea "IN":



- Ahora que la palabra sea "IND":



- Ahora que la palabra sea "INDU":



En el problema :

INDUCCION ⑨ letras

$\text{Total}_{\text{maneras}} = 2^{⑨-1} = 2^{8} = 256$

$\therefore$ Se puede leer de 256 maneras diferentes

EJERCICIO 16

¿De cuántas maneras distintas se puede leer la palabra "ROMA" en el siguiente arreglo triangular?

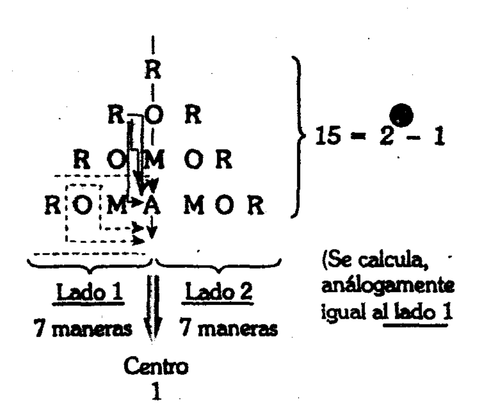
```
      R
    R O R
  R O M O R
R O M A M O R
```

Resolución:

¿Has visto cómo se ha procedido en el ejercicio anterior? Podemos proceder, ahora, de modo análogo; es decir:

		Nº Formas
1er. Caso Se lee: "R" (❶ letra)	R	$1 = 2^{\text{❶}} - 1$
2do. Caso Se lee: "RO" (❷ letras)	R R O R	$3 = 2^{\text{❷}} - 1$
3er. Caso Se lee: "ROM" (❸ letra)	R R O R R O M O R	$7 = 2^{\text{❸}} - 1$

4to. Caso
Se lee: "ROMA"
(❹ letra)



Como finalmente puedes apreciar, la palabra "ROMA" se lee en dicho arreglo de 15 maneras distintas. Observa bien el conteo en cada caso y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Los números 1; 3; 7 y 15 obtenidos en cada caso, se han escrito en su forma equivalente como potencias de dos menos una constante ¿Por qué o para qué se ha hecho esto?
2. ¿Tiene alguna relación el número de letras que se lee en cada uno y el exponente que presenta la respectiva potencia 2?.
3. Deduce la expresión matemática que nos brinda el número de formas de leer palabras dispuestas, en arreglos análogos al mostrado, responde la siguiente pregunta:

¿De cuántas maneras distintas se puede leer la palabra "CREATIVO", en el siguiente arreglo?

```
              C
            C R C
          C R E R C
        C R E A E R C
      C R E A T A E R C
    C R E A T I T A E R C
  C R E A T I V I T A E R C
C R E A T I V O V I T A E R C
```

∴ Se puede leer de 255 maneras

EJERCICIO 17

Sabiendo que: $A_1 = 1 \times 100 + 50$

$A_2 = 2 \times 99 + 49$

$A_3 = 3 \times 98 + 48$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Calcular : A_{20}

Resolución:

Analizando los casos dados como datos, tendremos:

$$A_{①} = \overbrace{① \times 100}^{\text{suma } 101} + 50 \quad (100 \xrightarrow{-50} 50)$$

$$A_{②} = \overbrace{② \times 99}^{\text{suma } 101} + 49 \quad (99 \xrightarrow{-50} 49)$$

$$A_{③} = \overbrace{③ \times 98}^{\text{suma } 101} + 48 \quad (98 \xrightarrow{-50} 48)$$

$$\vdots$$

$$A_{[illegible]} = \overbrace{[illegible] \times [illegible]}^{\text{suma } 101} + [illegible] \quad (-50)$$

$$\vdots$$

$$\therefore\ A_{⑳} = \overbrace{⑳ \times 81}^{\text{suma } 101} + 31 = 1651 \quad (81 \xrightarrow{-50} 31)$$

EJERCICIO 18

Si: $A_n = (-1)^n + 1$

$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$

Hallar: $S_{21} - S_{20}$

Resolución:

Calculando primero S_{21} y S_{20}, obtenemos:

$$S_{21} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{19} + A_{20} + A_{21}$$
$$S_{20} = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{19} + A_{20} \quad (-)$$

$$\Rightarrow S_1 - S_{20} = A_{21} = (-1)^{21} + 1 = -1 + 1$$

$$\therefore\ S_{21} - S_{20} = 0$$

EJERCICIO 19

Hallar: $E = \sqrt[4]{F_{180} \div S_{137}}$

si:

$S_1 = 1$	$F_1 = 2$
$S_2 = 1 + 1$	$F_2 = 2 + 2$
$S_3 = 1 + 2 + 1$	$F_3 = 2 + 4 + 2$
$S_4 = 1 + 3 + 3 + 1$	$F_4 = 2 + 6 + 6 + 2$
$\vdots$	$\vdots$

Resolución:

Analicemos los casos dados:

$S_1 = 1 = 2^0$	$F_1 = 2 = 2^1$
$S_2 = 2 = 2^1$	$F_2 = 4 = 2^2$
$S_3 = 4 = 2^2$	$F_3 = 8 = 2^3$
$S_4 = 8 = 2^3$	$F_4 = 16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
$\Rightarrow S_{137} = 2^{136}$	$\Rightarrow F_{180} = 2^{180}$

$$\therefore E = \sqrt[4]{\frac{F_{180}}{S_{137}}} = \sqrt[4]{\frac{2^{180}}{2^{136}}} = \sqrt[4]{2^{44}} = 2^{11} = 2048$$

EJERCICIO 20

Si: $\overline{AA} + \overline{DD} + \overline{UU} = \overline{ADU}$,

calcular: $E = A^2 + D^2 - U^2$

Resolución:

Deduzcamos los valores de A, D y U a partir de criterios generales:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ \overline{AA} \; + \\ \overline{DD} \\ \overline{UU} \\ \hline \overline{ADU} \end{array}$$

I. El máximo valor que puede asumir la suma de 3 números de 2 cifras es: 3(99) = 297

Entonces en el resultado $\overline{ADU}$, la cifra "A" puede ser 2 o en todo caso 1.

II. Sumando las cifras de las unidades, tendremos:

$$\underbrace{A + D + U}_{...0} = ...U$$

...0 ⇒ A + D = 10, entonces llevaré 1 a las decenas.

III. Sumando en la columna de las decenas:

$$\underbrace{1 + A + D}_{10} + U = \overline{AD} \longrightarrow \boxed{A + U = 9}$$

$$\underbrace{10 + D}_{} = \overline{AD}$$

$$\overline{1D} = \overline{AD} \longrightarrow A = 1$$

Pero:

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 10 \\ A + U = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = 9 \\ U = 8 \end{array}$$

→ A = 1, D = 9, U = 8

$\therefore\ A^2 + D^2 - U^2 = 1^2 + 9^2 - 8^2 = 18$

EJERCICIO 21

Reconstruir la siguiente operación de división e indicar la suma de cifras del dividendo, si cada * representa un dígito cualquiera.

```
* 2 * 5 *  |325
* * *       1**
-----
* 0 * *
* 9 * *
-------
- - * 5 *
    * * *
    -----
    - - -
```

Resolución:

Para mayor comodidad, numeremos las filas de esta operación:

```
I   →   * 2 * 5 *  |325
II  →   * * *       1**
IV  →   -----
III →   * 0 * *
IV  →   * 9 * *
        -------
V   →   - - * 5 *
VI  →       * * *
            -----
            - - -
```

Nos damos cuenta que como esta división no tiene residuo, bastaría con sólo conocer las cifras del cociente para resolver este problema. Entonces:

I. Para que el residuo sea cero, la segunda cifra de la fila VI debe ser 5, y para que resulte 5, la tercera cifra del cociente debe ser 2, pues es la única manera que : (2 × 325 = 650)

II. Para que la segunda cifra de la fila IV sea 9, la segunda cifra del cociente debe ser 6: ya que 325 × 6 = 1950, conociendo ya las cifras del cociente, la operación reconstruida sería:

```
5 2 6 5 0 |3 2 5
3 2 5 ↓    1 6 2
-----
2 0 1 5
1 9 5 0
-------
- - 6 5 0
    6 5 0
    -----
    - - -
```

∴ Suma de cifras del dividendo

= 5 + 2 + 6 + 5 + 0 = 18

EJERCICIO 22

Si : $\overline{abc} + \overline{cba} = ...\ 8$

$\overline{abc} - \overline{cba} = ...\ 8$

Calcular el máximo valor de : a + b + c

Resolución:

Como tenemos la suma y diferencia de los mismos números, entonces :

$$-\begin{cases}\overline{abc}+\overline{cba}=\ldots 8\\ \overline{abc}-\overline{cba}=\ldots 8\end{cases}$$

$$2(\overline{cba})=\ldots 0$$

$\Rightarrow a=0$ ó $a=5$

como $a\neq 0$, entonces: $a=5$

Luego :

$$\overline{abc}+\overline{cba}=\ldots 8$$

como $a=5$, entonces: $c=3$

Como nos piden el máximo valor de: $a+b+c$, entonces b tomará su máximo valor, es decir: $b=9$

$$\therefore\ a+b+c=5+9+3=17$$

EJERCICIO 23

Si: $N^3=\ldots.376$, calcular: $a+b+c$

donde:

$$N^3+N^6+N^9+\ldots\ldots\ldots+N^{90}=\overline{\ldots\ldots\ldots\ldots abc}$$

Resolución:

Para hallar: a, b y c, habrá que hallar las potencias de N^3, entonces:

$N^3=\ldots\ldots..376$ (dato)

$N^6=N^3\times N^3=(\ldots.376)\times(\ldots 376)=\ldots 376$

$N^9=N^3\times N^6=(\ldots.376)\times(\ldots 376)=\ldots 376$

$N^{12}=N^3\times N^9=(\ldots 376)\times(\ldots 376)=\ldots 376$

$\vdots$

$N^{90}=\ldots 376$

Entonces:

$$\underbrace{N^3+N^6+N^9+\cdots\cdots+N^{90}}_{30\text{ sumandos}}=\overline{\ldots abc}$$

$$\underbrace{(\ldots 376)+(\ldots 376)+(\ldots 376)+\ldots+(\ldots 376)}_{30\text{ sumandos}}=\overline{\ldots abc}$$

$$30\times(\ldots 376)=\overline{\ldots abc}$$

$$\ldots 1280=\overline{\ldots abc}\ \Rightarrow\ a=2;\ b=8;\ c=0$$

$$\therefore\ a+b+c=2+8+0=10$$

EJERCICIO 24

Si:

$$\underbrace{n+\overline{nn}+\overline{nnn}+\overline{nnnn}+\ldots+\overline{nnn\ldots nnn}}_{17\text{ sumandos}}=\overline{\ldots xy9}$$

Calcular: $E=(n-y)^{(x-y)}$

Resolución:

Si colocamos a los 17 sumandos, uno debajo del otro, tendremos:

$$\begin{array}{r} n\\ nn\\ nnn\\ nnnn\\ \vdots\\ nn\ldots nnnnn\\ \hline \ldots\ldots\ldots xy9\end{array}$$

I. Al sumar las 17 cifras de las unidades obtendremos:

$17\times n=\ldots 9\rightarrow n=7$

($17\times 7=119$) "dejamos 9 y llevamos 11"

II. Al sumar las 16 cifras de las decenas, más 11 que "llevamos" de la operación anterior, obtenemos:

$16\times n+11$ que es $16(7)+11=123$; $y=3$

"Dejamos 3 y llevamos 12"

III. Al sumar las 15 cifras de las centenas, más 12 que "llevamos" de la operación anterior, obtenemos:

$15\times n+12=\ldots x\quad\Rightarrow\quad x=7$

($15\times 7+12=117$)

"Dejamos 7 y llevamos 11"

$$\therefore E=(n-y)^{(x-y)}=(7-3)^{(7-3)}=4^4=256$$

EJERCICIO 25

Si: $\sqrt[d]{\overline{abcd}} = d$, calcular: $E = \dfrac{a \cdot b + d}{c}$

Resolución:

Llevando el índice al otro lado como exponente tendremos: $\overline{abcd} = d^{d}$

De la última expresión, nos damos cuenta que un número elevado a él mismo (d^d) debe dar como resultado un número de cuatro cifras $(\overline{abcd})$ y, como "d" es una cifra, su valor oscila de 0 a 9, entonces:

$1^1 = 1$; $2^2 = 4$; $3^3 = 27$; $4^4 = 256$; $5^5 = 3215$; $6^6 = 46656$

Viendo los resultados, el único valor que cumple con la condición anterior es d=5, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} d^d = \overline{abcd} \\ 5^5 = 3125 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a = 3 & b = 1 \\ c = 2 & d = 5 \end{array}$$

$$\therefore\ E = \frac{a \times b + d}{c} = \frac{3 \times 1 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

EJERCICIO 26

Hallar la suma de cifras del resultado de multiplicar "$\overline{abc} \times 512$", sabiendo que la suma de los productos parciales de esta multiplicación resulta 3496.

Resolución:

Antes de entrar al problema en sí, hagamos un ejemplo previo:

```
  237 ×
  (94)
  948    ←— 237 × [4] } productos
 2133    ←— 237 × [9] } parciales
22278    ←— Producto Final
```

Entonces :

```
   abc ×
   512
  [redacted] ——→ abc × 2 }
 [redacted]  ——→ abc × 1 } productos parciales
[redacted]   ——→ abc × 5 }
...............
```

Por dato, tenemos:

$\overline{abc} \times 2 + \overline{abc} \times 1 + \overline{abc} \times 5 = 3496$

$8(\overline{abc}) = 3496 \Rightarrow \overline{abc} = 437$

Reemplazando, luego, en el producto original :

$\overline{abc} \times 512$ obtenemos :

$\overline{abc} \times 512 = 437 \times 512 = 223744$

$\therefore\ S_{cifras} = 2 + 2 + 3 + 7 + 4 + 4 = 22$

EJERCICIO 27

Si: $\overline{abc} \times a = 428$

$\overline{abc} \times b = 214$

$\overline{abc} \times c = 856$

Calcular: $E = (a \times b \times c)^2$

Resolución:

Si acomodamos, correctamente, cada producto obtendremos:

$\overline{abc} \times a = 428 = \overline{214} \times 2$

$\overline{abc} \times b = 214 = \overline{214} \times 1$

$\overline{abc} \times c = 856 = \overline{214} \times 4$

$\Rightarrow$ a = 2, b = 1, c = 4

$\therefore\ E = (a \times b \times c)^2 = (2 \times 1 \times 4)^2 = 64$

EJERCICIO 28

Si: $\overline{abcde} + \overline{edcba} = \overline{876__}$

y además: $a < b < c < d < e$

Calcular: $E = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$

Resolución:

Disponiendo la operación verticalmente:

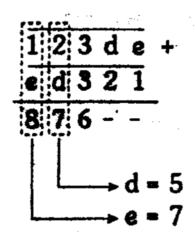
$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c\,d\,e} \;+ \\ \overline{e\,d\,c\,b\,a} \\ \hline 8\,7\,6\,-\,- \end{array}$$

I. La suma de dos números iguales siempre da un valor par, y como la cifra de las centenas del resultado es 6, concluimos que c = 3 ó c = 8. Este último valor no puede ser porque si c = 8, según la desigualdad, "e", como mínimo, tendría que ser 10 y eso sería absurdo, entonces: c = 3

II. Por la desigualdad, concluimos:

$$a < b < c < d < e$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$1 \quad 2 \quad 3$$

III. Si reemplazamos estos valores en la operación, tendremos:



$$\therefore E = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^3 + 5^2 + 7^2$$
$$= 98$$

EJERCICIO 29

Calcular el valor de "2x + 5", si $x \in Z^+$ y además:

$$5(2x^2 + 30) + \sqrt{10(15 + x^2)} = 420$$

Resolución:

Si comenzamos a operar la expresión anterior, nos vamos a complicar demasiado. Mejor podríamos comenzamos a deducir a partir de que "x" es un entero positivo y obtendremos:

$$5(2x^2 + 30) + \sqrt{10(15 + x^2)} = 420$$

$$10(x^2 + 15) + \sqrt{10(x^2 + 15)} = 400 + 20$$

$$10(x^2 + 15) + \sqrt{10(x^2 + 15)} = 400 + \sqrt{400}$$

(Por comparación)

$\rightarrow 10(x^2 + 15) = 400 \rightarrow x^2 + 15 = 40$

$\rightarrow x^2 = 25 \;◊\; x = 5$

Reemplazando :

$\therefore 2x + 5 = 2(5) + 5 = 15$

EJERCICIO 30

¿Cuál es el número de 5 cifras que, multiplicado por 22, nos da un producto cuyas cifras son todas 8?

Resolución:

Supongamos que el número de 5 cifras sea $\overline{abcde}$; entonces, por condición del problema, tendremos:

$\overline{abcde} \times 22 = 88 \ldots 88$ (la cantidad de cifras del producto es desconocida), despejando se tiene:

$$\overline{abcde} = \frac{88...88}{22} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} 888888 & 22 \\ \underline{88}\downarrow\downarrow & \overline{40404} \rightarrow \overline{abcde} \\ --88 & \\ \quad \underline{88}\downarrow\downarrow & \\ \quad --88 & \\ \qquad \underline{88} & \\ \qquad -- & \end{array}$$

$$\therefore \; \overline{abcde} = 40404$$

EJERCICIO 31

Si: a, b y c ∈ Z^+ y se cumple que:

$$a + b + c = 11$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 49$$

Calcular: $E = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$

Resolución:

Si procedemos a operar, el ejercicio resulta tedioso; pero si comenzamos a deducir a partir de que a, b, c $\in Z^+$ obtendremos:

$a^2 + b^2 + c^2 = 49$ (la suma de tres cuadrados perfectos resulta 49)

$1^2, \boxed{2^2}, \boxed{3^2}, 4^2, 5^2, \boxed{6^2}, 7^2, \ldots$

suma = 49

Entonces :

$a^2 + b^2 + c^2 = 49$

$2^2 + 3^2 + 6^2 = 49$

Verificando:

$a + b + c = 11$

$2 + 3 + 6 = 11$

$\therefore\ E = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$

$= 5^2 + 9^2 + 8^2 = 170$

EJERCICIO 32

Hallar: $\overline{a0b} + \overline{cdaec}$, si $(\overline{a0b})^2 = \overline{cdaec}$

Además:

0 = cero y las letras diferentes tienen valores diferentes.

Resolución:

$(\overline{a0b})^2 = \overline{a0b} \times \overline{a0b} = \overline{cdaec}$

Entonces:

$$\begin{array}{r} \overline{a0b}\ \times \\ \overline{a0b} \\ \hline \overline{mec} \\ \square 0m\ \ \ \\ \hline cdaec \end{array}$$

a×a ; b×b

Donde:

I. $b^2 = \overline{ec}$; $m = a \times b$; $a^2 = c$

$\Rightarrow b = 4,5,6,7,8,9 \quad \Rightarrow a = 1,2,3$

II. $m + m = \overline{da} \rightarrow \underbrace{2m}_{\text{par}} = \overline{da}$

par $\rightarrow$ a = 2

$2(a \times b) = \overline{da}$

2 8 32 $\rightarrow$ b = 8 ; d = 3

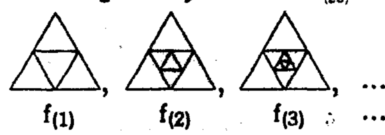
III. $b^2 = \overline{ec}$

$8^2 = 64 \rightarrow e = 6$; c=4

$\therefore\ \overline{a0b} + \overline{cdaec} = 208 + 43264 = 43472$

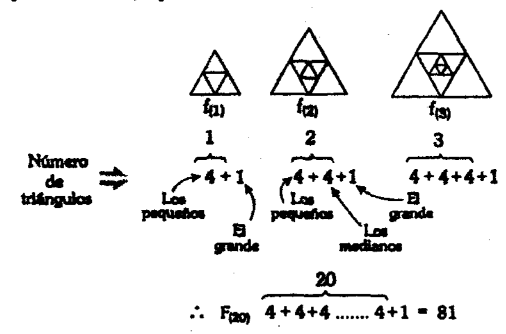
EJERCICIO 33

¿Cuántos triángulos hay en total en $f_{(20)}$?



Resolución:

Según lo que se observa nos podemos formar una idea de cómo será el gráfico que corresponde a $f_{(20)}$; pero dibujar el gráfico y contar los triángulos que hay en él sería un trabajo demasiado tedioso; por lo tanto, aplicamos el método inductivo.



$\therefore\ F_{(20)}\ \overbrace{4+4+4 \ldots\ldots 4+1}^{20} = 81$

EJERCICIO 34

Hallar el valor de "S":

$$S = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$$

Resolución:

Son muchos los números que debemos sumar por lo cual, hacerlo de manera directa, nos demandaría demasiado tiempo, es por eso que aplicaremos el método inductivo.

$$S=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$$

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$$

$\vdots$

$$\therefore S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{99\times100}=\frac{99}{100}$$

Como se puede observar, el resultado de sumar este tipo de números está en función a los factores que aparecen en el denominador de la última fracción.

EJERCICIO 35

Si :

$$b+\overline{ab}+\overline{bab}+\overline{abab}+\overline{babab}+\dots+\underbrace{\overline{baba\dots bab}}_{23\text{ cifras}}=\overline{\dots ab}$$

Calcular: $M=\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}$

Resolución:

Colocamos los números en forma vertical.

$$\left.\begin{array}{r} b \\ ab \\ bab \\ abab \\ \vdots \\ baba\dots bab \end{array}\right\} 23 \text{ sumandos}$$
$$\overline{\dots\dots\dots ab}$$

En el orden de las unidades:

$23\times b=\dots b$
$23\times 5=11\,5$ $\Rightarrow$ $b=5$; "Llevamos" 11 siguiente orden

En el orden de las decenas:

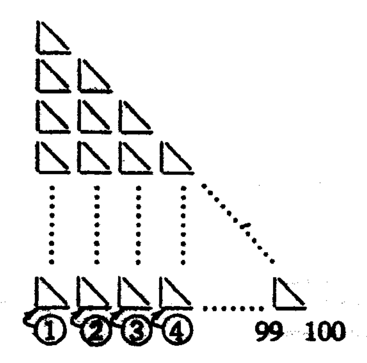
$11+22\times a=\dots a$
$11+22\times 9=20\,9$ $\Rightarrow$ $a=9$

Nos piden: $M=\sqrt{\overline{ab}-\overline{ba}}$

$M=\sqrt{95-59}=\sqrt{36}=6$

EJERCICIO 36

Halle la cantidad total de "palitos", en la siguiente figura:



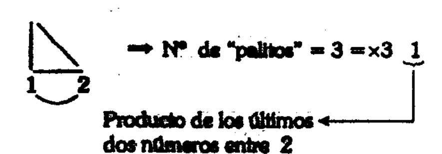
Resolución:

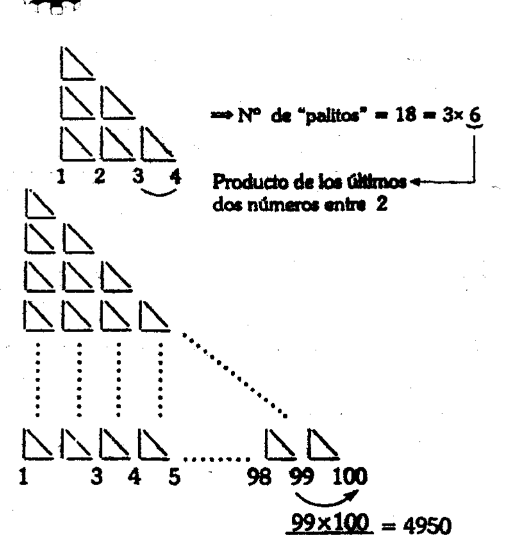
Si contamos, uno por uno la cantidad de "palitos" que conforma la figura, sería demasiado extenso.

Si analizamos casos "pequeños", tendremos :

$\Rightarrow$ N° de "palitos" = 3 = $\frac{2}{2}$x3 1 (1 2)

Producto de los últimos dos números entre 2





Luego

$\Rightarrow$ N° de palitos $= 3\left[\frac{99\times100}{2}\right]$ 3×4950

$\therefore$ N° de palitos = 14 850

EJERCICIO 37

Si : $p + q = 12$ y $r + s = 16$

además :

$\overline{qqss} + \overline{rrpq} + \overline{pprp} + \overline{ssqr} = \overline{addbc}$

calcular : $(a + b + c - d)^2$

Resolución:

Colocamos los números en forma vertical

$$\begin{array}{r} \overline{qqss}\ + \\ \overline{rrpq} \\ \overline{pprp} \\ \overline{ssqr} \\ \hline \overline{addbc} \end{array}$$

como : $p + q = 12$

$r + s = 16$

$\Rightarrow \quad p+q+r+s = 28$

I. Al sumar las cifras de las unidades obtendremos :

$$\underbrace{s + q + p + r}_{28} = ...\ c$$

$= ......\ c$

"De aquí c=8 y llevamos 2"

II. Al sumar las cifras de las decenas, más 2 que llevamos en la operación anterior obtendremos :

$$\underbrace{s + q + r + q + 2}_{30} = ...\ b$$

$= ......\ b$

"De aquí b = 0 y llevamos 3"

III. Al sumar las cifras de las centenas, más 3 que llevamos en la operación anterior obtendremos :

$$\underbrace{q + r + p + s + 3}_{31} = ...\ d$$

$= ......\ d$

"De aquí d=1 y llevamos 3"

IV. Al sumar las cifras de los millares ocurre lo mismo que las cifras de las centenas, llevando 3 a la cifra de unidad de millar, de aquí a=3.

$\therefore (a + b + c - d)^2 = (3 + 0 + 8 - 1)^2$

$= 100$

EJERCICIO 38

Si : $\sqrt{m.n} = p$, halle : p; además:

$$\frac{m^2 - p^2 + n^2}{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}} = 1296$$

Resolución:

Al operar la siguiente expresión se tiene que :

$$\frac{(m^2-p^2+n^2)\,m^2n^2p^2}{n^2p^2+p^2m^2-m^2n^2}=1296$$

Además : $\sqrt{mn}=p$, entonces : $m^2n^2=p^4$

Reemplazando se tiene que :

$$\frac{(m^2-p^2+n^2)\,.\,p^6}{n^2p^2+p^2m^2-p^4}=1296$$

Factorizando :

$$\frac{(m^2-p^2+n^2)\,.\,p^6}{(n^2+m^2-p^2)\,.\,p^2}=1296=6^4$$

$p^4=6^4$

$$\therefore\ p=6$$

EJERCICIO 39

Si : $\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{x}\right)^2=2$

calcule :

$$A=\left(\frac{x}{n}\right)^3-3\left(\frac{n}{x}\right)+\left(\frac{n}{x}\right)^2+\left(\frac{n}{x}\right)^3+3$$

Resolución:

Recordar :

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Dándole forma al dato:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{x}\right)^2=2\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{x}\right)\text{, despejando}$$

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2-2\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n}{x}\right)+\left(\frac{n}{x}\right)^2=0$$

$$\left(\frac{x}{n}-\frac{n}{n}\right)^2=0$$

Al extraer la raíz cuadrada obtenemos:

$$\frac{x}{n}-\frac{n}{x}=0\ \Rightarrow\ x=n$$

$$\therefore\ A=\left(\frac{x}{n}\right)^3-3\left(\frac{n}{x}\right)+\left(\frac{n}{x}\right)^2+\left(\frac{n}{x}\right)^3+3$$

$$=\left(\frac{n}{n}\right)^3-3\left(\frac{n}{n}\right)+\left(\frac{n}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n}\right)^3+3$$

$$=3$$

EJERCICIO 40

Si : $8^n-8^{n-1}=14$, entonces $(3n)^{3n}$ es igual a:

Resolución:

$8^n-8^{n-1}=14$

$8^n-\frac{8^n}{8}=14$ **(Multiplicando a todo por 8)**

$8\,(8^n)-8^n=8\,.\,14$

$7\,.\,8^n=8\,.\,14$

$8^n=16$ (Expresando como potencia de 2)

$2^{3n}=2^4$

$3n=4$

$$\therefore\ (3n)^{3n}=4^4=256$$

Ejercicios Propuestos

1. Calcular el valor M y dar como respuesta la suma de sus cifras:

$$M = (666666666666)^2$$

A) 102 B) 140 C) 108
D) 110 E) 111

2. Calcular la suma de cifras del resultado:

$$A = \underbrace{555 \ldots 555}_{100 \text{ cifras}} \times \underbrace{999 \ldots 999}_{100 \text{ cifras}}$$

A) 1 B) 10 C) 100
D) 90 E) 900

3. Si:

$$A = (\underbrace{333 \ldots 333}_{61 \text{ cifras}})^2 \quad y \quad B = (\underbrace{666 \ldots 666}_{31 \text{ cifras}})^2$$

Calcular la diferencia entre la suma de cifras del resultado de A y la suma de cifras del resultado de B.

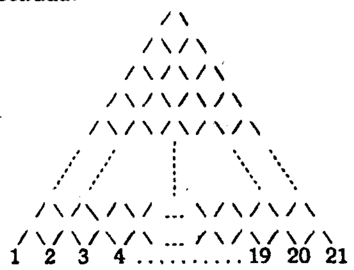
A) 279 B) 549 C) 270
D) 828 E) 720

4. Calcular la suma de cifras del resultado de:

$$A = \sqrt{\underbrace{111 \ldots 111}_{\text{"2n" cifras}} - \underbrace{222 \ldots 222}_{\text{"n" cifras}}}$$

A) n B) 3n C) 6n
D) n^2 E) 2n

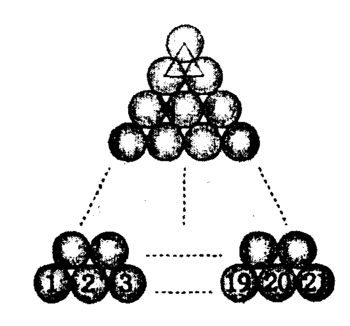
5. ¿Cuántas "cerillas" conforman la torre mostrada?



A) 20 B) 21 C) 210
D) 200 E) 420

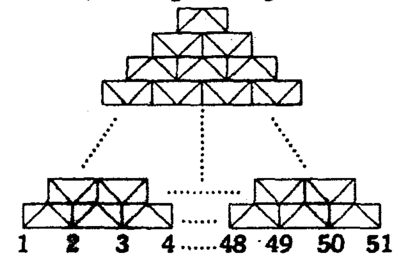
6. En el siguiente gráfico, ¿cuántos triángulos equiláteros se formarán, en total, al unirse los centros de tres circunferencias vecinas inmediatas?

Obs.: De la forma indicada.



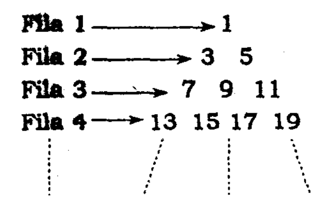
A) 20 B) 21 C) 400
D) 441 E) 360

7. ¿Cuántos triángulos se pueden contar, como máximo, en la siguiente figura?



A) 5500 B) 5000 C) 5050
D) 5253 E) 5250

8. Calcular la suma de los términos de la fila 50.



A) 9750 B) 12500 C) 25000
D) 75200 E) 125000

9. Si: $a + b + c = 0$

Calcular la suma de cifras de A :

$$A = (\underbrace{\overline{xxx\ldots xxx}}_{100\ \text{cifras}})^2$$

sabiendo, además que:

$$x = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

A) 90 B) 989 C) 99
D) 900 E) 199

10. Calcular la suma de cifras del resultado de "A".

$$A = (\underbrace{999\ldots 9995}_{101\ \text{cifras}})^2$$

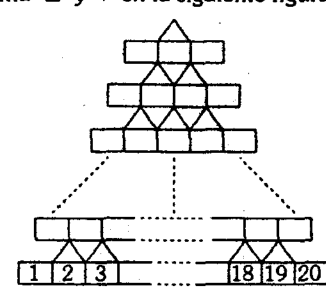
A) 900 B) 925 C) 625
D) 90 E) 907

11. Hallar la suma de los elementos de la siguiente matriz de 10×10

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \ldots & 18 & 20 \\ 4 & 6 & 8 & \ldots & 20 & 22 \\ 6 & 8 & 10 & \ldots & 22 & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 18 & 20 & 22 & \ldots & 34 & 36 \\ 20 & 22 & 24 & \ldots & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

A) 2500 B) 1900 C) 1650
D) 2000 E) 3600

12. Calcular el número total de triángulos de la forma Δ y ∇ en la siguiente figura:



A) 441 B) 225 C) 324
D) 400 E) 300

13. Calcular la suma de cifras del resultado de efectuar: $E = 81(12345679)^2$

A) 49 B) 64 C) 81
D) 100 E) 72

14. Si:

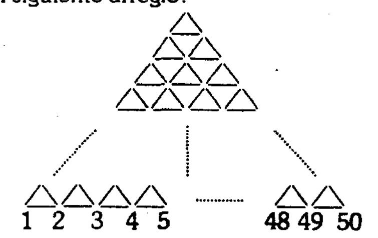
$$\sqrt{\overline{a5} \times \overline{a6} \times \overline{a7} \times \overline{a8} + 1} = 2161$$

Calcular:

$$M = \underbrace{a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \overline{aaaa} + \ldots\ldots}_{\text{"a" sumandos}}$$

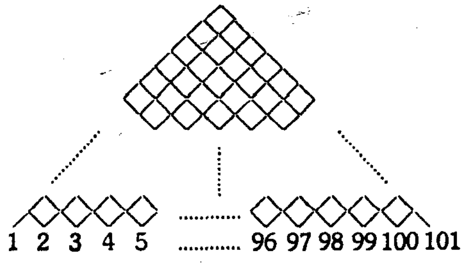
A) 4936 B) 4856 C) 4836
D) 4938 E) 4746

15. ¿Cuántos "palitos" se trazaron para construir el siguiente arreglo?



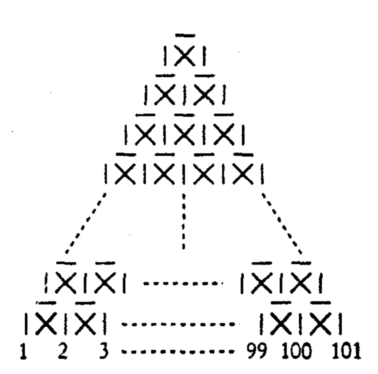
A) 3 600 B) 3 675 C) 2 550
D) 3 725 E) 3 625

16. ¿Con cuántos "palitos" se formó la siguiente figura?



A) 11 000 B) 10 010 C) 10 200
D) 10 100 E) 10 101

17. Para construir el siguiente castillo se utilizaron "cerillas", ¿cuántas se emplearon en total?.



A) 10 000 B) 16 000 C) 25 000
D) 20 400 E) 20 300

18. Hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente operación :

$$\sqrt{\underbrace{999\ldots99}_{2(n-1)\text{ cifras}} - \underbrace{1999\,998}_{n\text{ cifras}}}$$

A) 3n B) 6n C) 6(n + 1)
D)9n E) 9(n - 1)

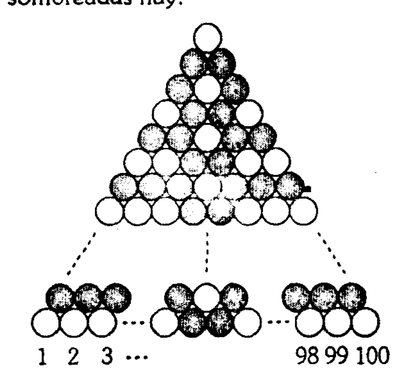
19. Si :

$M(1) = 4 \times 1 + 1$
$M(2) = 8 \times 4 + 8$
$M(3) = 12 \times 9 + 27$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Calcular el valor de x, si $M(x) = 4 \times 10^4$

A) 15 B) 18 C) 23
D) 20 E) 21

20. En el siguiente triángulo, ¿cuántas bolitas sombreadas hay?



A) 2550 B) 2500 C) 2250
D) 5100 E) 2555

21. Determinar: "P + U + C", si:

$\overline{PUC} + \overline{CUP} = 888$

Además: P - C = 4

A) 10 B) 14 C) 11
D) 13 E) 18

22. Al multiplicar un número de 7 cifras consecutivas por 13, el resultado termina en 7. ¿Cuál será la diferencia entre la suma de cifras del resultado, con la suma de cifras del número de 7 cifras?

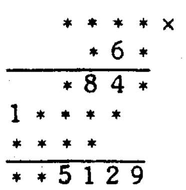
A) 0 B) 1 C) 35
D) 14 E) 13

23. Si: $\overline{ANITA} \times 8 = \overline{PEPITO}$; 0 = CERO

Hallar: M = A + N + I + T + E + P

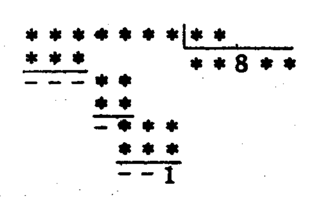
A) 20 B) 24 C) 35
D) 27 E) 28

24. Reconstruir la siguiente operación e indicar la suma de cifras del resultado. Cada asterisco representa un dígito cualquiera.



A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

25. Calcular la suma de cifras del cociente, en la siguiente división:



A) 20 B) 21 C) 26
D) 30 E) 32

26. Hallar la última cifra del resultado de :

$E = 3671^{31} + (825^{19} + 1)(26^2 - 1)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

27. Si: $\overline{SIETE} + \overline{TRES} = 100\,000$

hallar: $\overline{SEIS}$, además: $I=E$ y $T=R$

A) 8128 B) 8118 C) 9229
D) 9339 E) 9119

28. Calcular la suma de cifras del resultado de:

$$E = \sqrt{10305050301 + 2040604020}$$

A) 10 B) 9 C) 12
D) 6 E) 8

29. Un número de 4 cifras de la forma $\overline{abc6}$, elevado al cuadrado, termina en $\overline{abc6}$. Calcular: $a + b + c$

A) 17 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

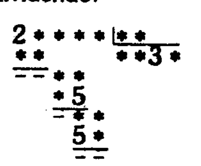
30. Calcular: $(A - M - N)^{1997}$

si se sabe que:

$\overline{1A} + \overline{2A} + \overline{3A} + \ldots + \overline{9A} = \overline{MN1}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

31. En la siguiente división, hallar la suma de las cifras del dividendo:



A) 21 B) 37 C) 25
D) 18 E) 15

32. Si : $A + U = D$ y $U + D = 17$

hallar la suma de las cifras del resultado de:

$$E = \overline{AU} \times (\underbrace{\overline{AA\ldots AA}}_{8\text{ cifras}})^2 - (\underbrace{\overline{DD\ldots DD}}_{8\text{ cifras}})^2 + (\underbrace{\overline{UU\ldots UU}}_{8\text{ cifras}})^2$$

A) 49 B) 54 C) 64
D) 72 E) 80

33. En un examen, las respuestas a las cinco primeras preguntas son: a, b, c, d, e; para las siguientes 10 son: a, a, b, b, c, c, d, d, e, e; para los siguientes 15 son: a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, d, e, e, e; y así, sucesivamente. Entonces, la respuesta a la pregunta 90, es:

A) a B) b C) c
D) d E) e

34. Si:

$$\frac{\overline{A2}}{\overline{1A}} = 3$$

Calcular: $E = 2(A + 3) + 7$

A) 4 B) 7 C) 14
D) 21 E) 20

35. Si: $\overline{ababa} \times 6 = 212118$, hallar: $\overline{aab} + \overline{ab}$

A) 335 B) 370 C) 535
D) 730 E) 337

36. Efectuar la siguiente suma y hallar: $m+n+p+q$

$$\underbrace{7+77+777+7777+\ldots\ldots+777\ldots77}_{36 \text{ sumandos}} = \overline{\ldots\ldots mnpq}$$

A) 7 B) 5 C) 5
D) 12 E) 14

37. Se tiene un número de 3 cifras que comienza en 5 y acaba en 2; dichas cifras son cambiadas por 1 y 8, respectivamente. ¿En cuánto ha disminuido dicho número?

A) 388 B) 432 C) 406
D) 280 E) 394

38. Si : $(a + b + c)^2 = \overline{a25}$

Calcular: $M = \overline{ab3} + \overline{c2b} + \overline{4ac} + \overline{bca}$

A) 1475 B) 1685 C) 2088
D) 1575 E) 1988

39. Poseo cinco dígitos, pero si me restaras la unidad, ya no tendría cinco, sino solamente cuatro, ¿quién soy? (Dar como respuesta la suma de cifras del número).

A) 1 B) 27 C) 36
D) 2 E) 3

40. Calcular: $a+b+c+d$, si:

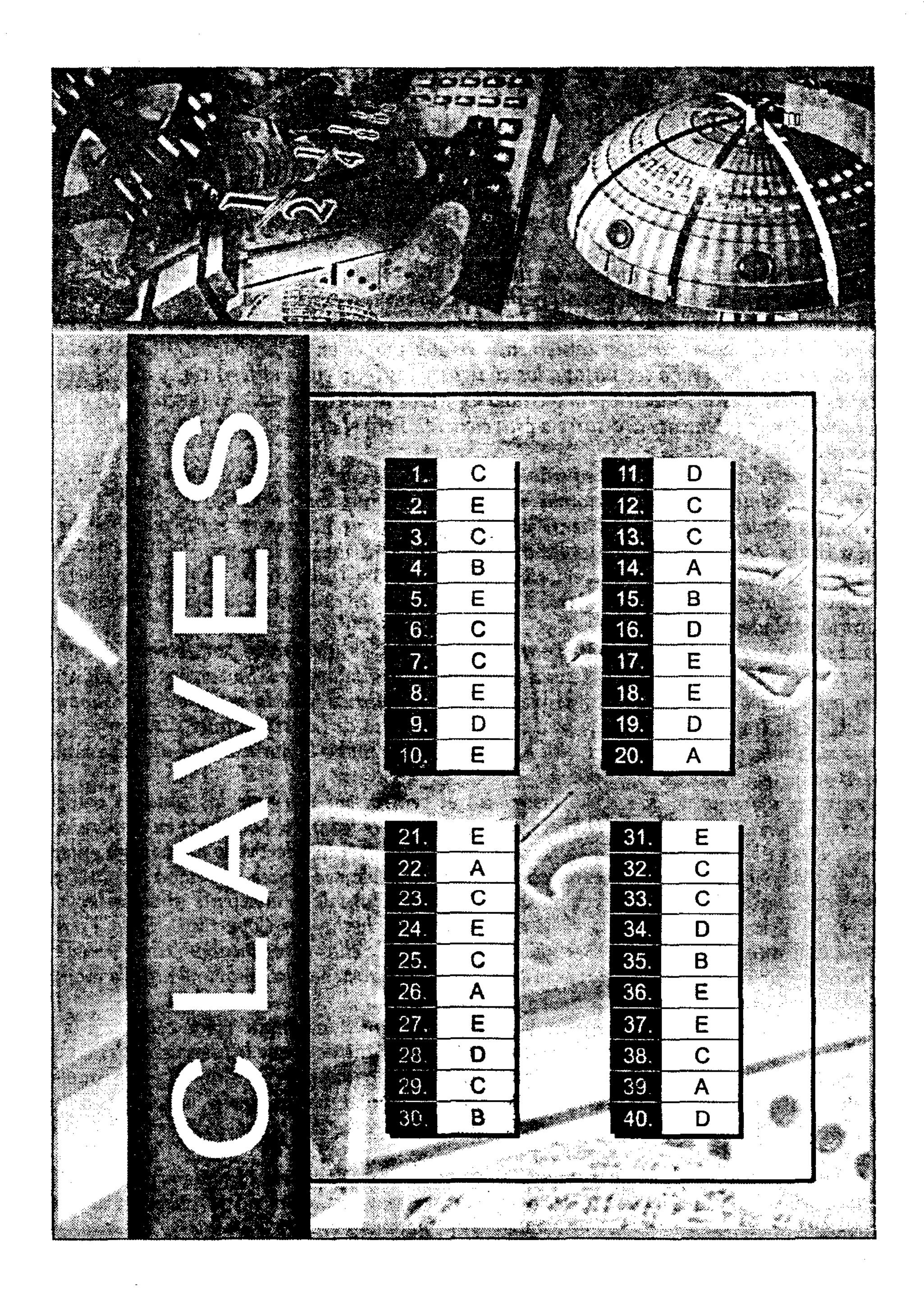
a y c < 6 ; b y d < 8

Además:

$$\underbrace{131^2+133^2+135^2+231^2+233^2+235^2+\ldots}_{111 \text{ términos}} =$$

$$= \sqrt{\overline{\ldots ab} + \overline{\ldots cd}}$$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9


CLAVES

1.	C
2.	E
3.	C
4.	B
5.	E
6.	C
7.	C
8.	E
9.	D
10.	E
11.	D
12.	C
13.	C
14.	A
15.	B
16.	D
17.	E
18.	E
19.	D
20.	A
21.	E
22.	A
23.	C
24.	E
25.	C
26.	A
27.	E
28.	D
29.	C
30.	B
31.	E
32.	C
33.	C
34.	D
35.	B
36.	E
37.	E
38.	C
39.	A
40.	D

Tycho Brahe

Entre los diez vástagos de Otto Brahe, famoso juez de Escania Occidental, sector que pertenecía, entonces, al reino de Dinamarca, el segundo hijo –Tycho– era extraño y muy poco se parecía a los demás. En 1 559, Tycho, quien a la sazón tenía trece años, estudia en la academia de Copenhague. Dinamarca habría tenido un juez más si las fuerzas celestes, si el eclipse solar de 1 560 no hubieran intervenido. El niño quedó impresionado no tanto por el fenómeno en sí, como por la precisión con que los astrónomos se lo habían pronosticado. De inmediato se prendió de la astronomía. El educador que constantemente velaba por él en Copenhague y luego en Leipzig, señalaba alarmado que Tycho consultaba los códigos y las leyes con indiferencia, y que el dinero que su padre le enviaba desde Knudstorp lo gastaba en libros de astronomía. Al futuro gran astrónomo se le prohibió terminantemente dedicarse a esta ciencia. Pero el astuto Tycho trabajaba a hurtadillas por la noche.

Viajaba por Alemania con un pequeño observatorio de campaña. Guillermo IV, Landgrave de Hesse, ferviente admirador de astronomía- insinuó en una ocasión a Federico II, rey de Dinamarca, que éste podía perder a uno de los científicos más grandes de Europa, si no le prestaba la debida atención a Brahe, ¿acaso no le correspondía al monarca contribuir a la lectura de las ideas divinas, escritas con los astros sobre la cúpula celeste? El rey regaló a Tycho Brahe una isla en el estrecho de Sund y allí construyó el Uraniborg -palacio de Urania, diosa del cielo de los antiguos romanos-, primer observatorio verdadero en Europa.

Las observaciones de Copérnico se cuentan por decenas, las de Brahe, por decenas de miles. Sus trabajos, editados solamente en 1 923, ocupan diez grandes volúmenes. Su catálogo de los astros fue el primer inventario completo contemporáneo: según el historiador de la astronomía, el holandés A. Pannekoek, "este trabajo inició una nueva era en la historia de la astronomía". Antes nadie había trabajado tan minuciosamente y con tanta precisión: Brahe midió la duración del año terrenal con un margen de error inferior a un segundo.

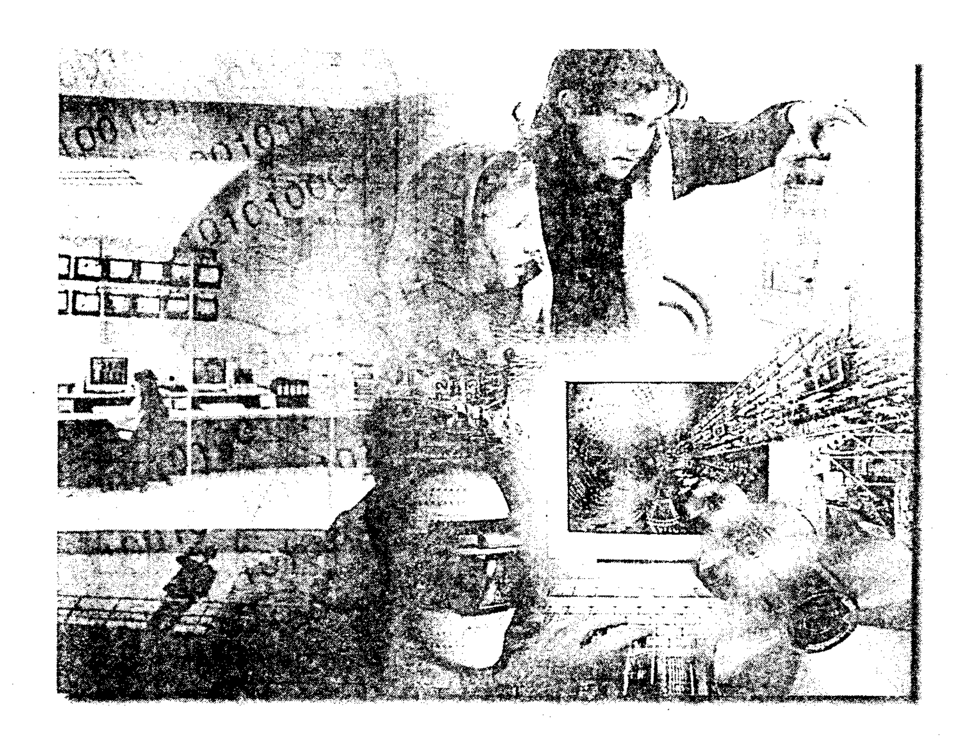
Inventó un deficiente y falso universo. En el centro, sin infringir los cánones católicos, se encontraba la Tierra inmóvil. Alrededor giraba el Sol, y alrededor del Sol, como en Copérnico, todos los demás planetas. ¡Todos, excepto la Tierra! En esta semiverdad de Tycho había algo enfermizo y lamentable. Más honrada era la ingenuidad infantil de Ptolomeo, quien afirmaba que la Tierra era el ombligo del universo . . . Brahe seguramente se daba cuenta de lo deficiente de su sistema porque con un celo frenético buscaba refutar el modelo del mundo hecho por Copérnico. Si la Tierra gira, ¿cómo una piedra tirada desde una torre puede caer al pie de ella? -preguntaba- ¿cómo un cuerpo tan pesado puede girar en el aire? ¿Qué fuerzas son capaces de sostener este movimiento, de mantener en constante movimiento el eje de la Tierra?

Porque, a pesar de todo, era científico y amaba la astronomía. Brahe temía ofender a la Iglesia. Más, no fue la furia de El Vaticano, sino su insoportable carácter lo que le hizo perder el Uraniborg. Después de la muerte de Federico, la nobleza de la Corte, irritada por la altanería y brusquedad del astrónomo, indispone contra éste al joven heredero del trono dinamarqués- una comisión especial prohibió las observaciones de Tycho por considerarlas "saturadas de peligrosa curiosidad". Ofendido, abandona la patria. Esta vez, para siempre.

El emperador Rodolfo II, le dió asilo en Praga. Ahora tiene por subordinado al gran Juan Kepler, pero mantienen malas relaciones. "Tycho es una persona con quien no se puede vivir sin sufrir constantemente duras ofensas" -escribe Kepler. Pero hagámosle justicia al bilioso dinamarqués: sus observaciones del movimiento de los planetas, extraordinariamente precisas para aquella época, sirvieron de material de partida a Kepler para fundamentar sus tres leyes.

Tycho Brahe murió de una inflamación de la vejiga, a la edad de 54 años y fue enterrado a fines de octubre de 1 601, en la catedral de Tyn en Praga.

HABILIDAD OPERATIVA



El avance espectacular en las tecnologías de los equipos de cómputo han hecho posible que los cálculos a realizar en múltiples actividades de la vida diaria sean realizados en un tiempo mínimo. Potenciando nuestras habilidades operativas, ganaremos eficacia y tiempo en nuestra formación académica.

Lectura 4

Los huesos de Napier

¿Tienes algún problema en multiplicar números grandes? ¿No puedes recordar las tablas.? ¿Has perdido la calculadora.? ¡SOCORRO! John Napier inventó un sistema de multiplicación en el siglo XVII. Fue conocido como los huesos de Napier, ¡porque los números originales estaban tallados en huesos!

Éste es el hueso para el número 6. Los dos números en cada fila tienen una línea inclinada que los separa. Los números de la izquierda son decenas y los de la derecha unidades. Así, por ejemplo, la primera fila no tiene decenas y sí 6 unidades, por lo tanto es 6. El segundo tiene 1 decena y 2 unidades, lo cual hace 12, y así sucesivamente. Cada fila tiene 6 más que la anterior

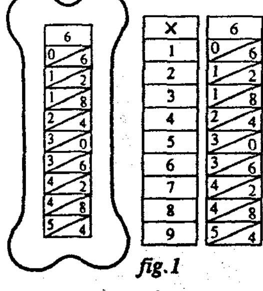


fig.1

Utilizando una hoja de papel cuadriculado, dibuja y corta 2 tiras. Haz que una de ellas sea la fila × (veces), la otra será la tira 6. Para saber cuánto es 3 × 6, encuentra el 3 en la tira × (veces) y mira la fila correspondiente en la tira del 6. ¡Ésa es la respuesta 18!.

¡Es fácil!

Pero ¿qué ocurre si quieres multiplicar 64 × 4? Primero, haz una nueva tira y llénala con números para 4. Colócala a continuación de la tira del 6 para hacer 64. Alinéalas con la tira x (veces) fig.2

Ahora escribe los números de las filas que se alinean con el número 4 de la tira × (veces), como indica la flecha de líneas punteadas, (el aspecto será el de la figura, de la derecha) ahora escribe los números debajo, sumando los números unidos por la raya inclinada.

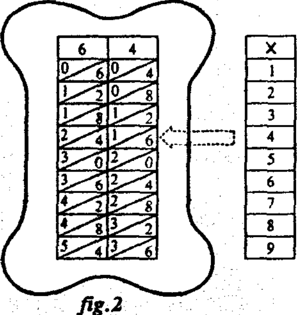
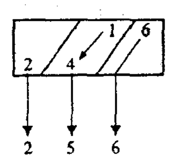
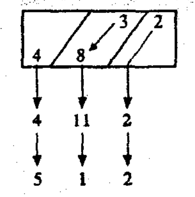


fig.2



La respuesta es 256

Intenta multiplicar 64 × 8



La respuesta es 512

La columna del centro suma ahora más de 10, así que se traslada el 1 a la siguiente columna de la izquierda.

FUENTE : El mundo de los niños Tomo X

HABILIDAD OPERATIVA

Objetivos

1. *Resolver las operaciones básicas con fluidez y habilidad en la solución de situaciones complejas.*
2. *Dominar métodos prácticos en las operaciones, para aplicarlos en la multiplicación, adición, potenciación, etc.*
3. *Afianzar los conceptos elementales de la aritmética y el álgebra.*

Introducción

En esta oportunidad estudiaremos un capítulo que contribuirá en gran medida a familiarizarnos con las operaciones matemáticas, a través del ejercicio con diversos tipos de multiplicación abreviada, potencia de un número, raíces cuadradas, adición, multiplicación y división de fracciones, etc., para lo cual debemos recordar ciertos conocimientos básicos como: la teoría de exponentes, ecuaciones, factorización, etc.

Este capítulo debe ser estudiado con mucho interés y desde la base de ejercicios diversos, ya que la práctica será decisiva en su aprendizaje.

Debido a la escasa práctica de ciertas operaciones matemáticas y por el poco uso de métodos abreviados, suele parecer la matemática como un conjunto de fórmulas y propiedades tediosas que sólo un matemático puede entenderlo; esta idea debemos "desterrarla", ya que la parte operativa sólo es como los abdominales para un atleta (lo más importante para un atleta es su salud, su alimentación y su voluntad de querer llegar a la meta).

Lo más importante, entonces, es el interés y la voluntad de estudiar en forma objetiva la matemática con un método razonado y ameno; para complementarlo con un manejo práctico de la parte operativa.

Cierta vez un matemático llamado H. Hardy al visitar a su amigo Ramanuján, que estaba enfermo en un hospital, le dijo: "Vine en el taxi 1 729, el número me pareció muy banal y espero que no sea de mal agüero". Al contrario, contestó Ramanuján, el número es muy interesante es el menor número que se puede expresar como suma de 2 cubos en dos formas distintas:

$$1\,729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Debemos saber que Ramanuján al responder instantáneamente no lo hizo por arte de magia, sino como trabajaba constantemente con los números ya sabía de los cubos perfectos de memoria; sólo tuvo que percatarse que dos de ellos sumasen 1 729.

HABIILIDAD OPERATIVA

En este capítulo veremos métodos, que nos permitirán ahorrar tiempo en los cálculos, tiempo que en cualquier tipo de examen resulta determinante como para no desperdiciarlo en cálculos numéricos elementales. Otro aspecto importante, de esta parte del curso, es que nos enseña las diferentes formas de cómo afrontar un ejercicio que aparentemente tiene una solución operativa, pero que con un poco de habilidad en las operaciones se puede resolver de una forma más rápida. Por ejemplo, para resolver la situación dada en el gráfico (arriba) la solución tradicional sería elevar cada número al cuadrado y luego proceder a hallar su diferencia, sin embargo, empleando criterios prácticos, podemos recordar la diferencia de cuadrados y aplicarlo, así:

$$\underbrace{9995^2 - 9994^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = (9995 + 9994) \times (9995 - 9994)$$

$$= (19989)\times(1) = 19989$$

Obs.: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

A continuación, veamos el estudio de algunos casos sobre el desarrollo abreviado de ciertas operaciones básicas:

MULTIPLICACIÓN POR 5

Deduzcamos el procedimiento a partir de un ejemplo:

$$426 \times 5 = ?$$

$$= 426 \times \left(\frac{10}{2}\right)$$

$$= \frac{4260}{2}$$

$$= 2130$$

Para multiplicar por 5, al número se le agrega un cero a su derecha y el resultado se divide entre 2.

Ejemplos:

1. $23 \times 5 = \frac{230}{2} = 115$

2. $976 \times 5 = \frac{9760}{2} = 4880$

3. $4783 \times 5 = \dfrac{47830}{2} = 23915$

4. $7114 \times 5 = \dfrac{71140}{2} = 35570$

Para que practiques:

1. $648 \times 5 =$ ....
2. $9737 \times 5 =$...................
3. $419971 \times 5 =$...................

MULTIPLICACIÓN POR 25

Deduzcamos el procedimiento a partir de un ejemplo:

$$24 \times 25 = ?$$

$$24 \times \left(\frac{100}{4}\right) = \frac{2400}{4}$$

$$= 600$$

Para multiplicar por 25, al número se le agrega dos ceros a su derecha y el resultado se divide entre 4.

Ejemplos:

1. $72 \times 25 = \dfrac{7200}{4} = 1800$

2. $229 \times 25 = \dfrac{22900}{4} = 5725$

3. $798 \times 25 = \dfrac{79800}{4} = 19950$

4. $3697 \times 25 = \dfrac{369700}{4} = 92425$

Para que practiques:

1. $124 \times 25 =$ ....
2. $645 \times 25 =$ ....
3. $4797 \times 25 =$ ....

DIVISIÓN POR 5

Deduzcamos el procedimiento a partir de un ejemplo:

$$\frac{135}{5} = ?$$

$$\frac{135 \times 2}{5 \times 2} = \frac{270}{10}$$

$$= 27$$

Para dividir por 5, al número se le multiplica por 2 y el resultado se divide entre 10, es decir, se cancela un cero o se corre la coma decimal un lugar hacia la izquierda.

Ejemplo:

1. $\dfrac{385}{5} = \dfrac{385 \times 2}{10} = \dfrac{77\not{0}}{1\not{0}} = 77$

2. $\dfrac{32140}{5} = \dfrac{32140 \times 2}{10} = \dfrac{6428\not{0}}{1\not{0}} = 6428$

3. $\dfrac{4318}{5} = \dfrac{4318 \times 2}{10} = \dfrac{8636}{10} = 863{,}6$

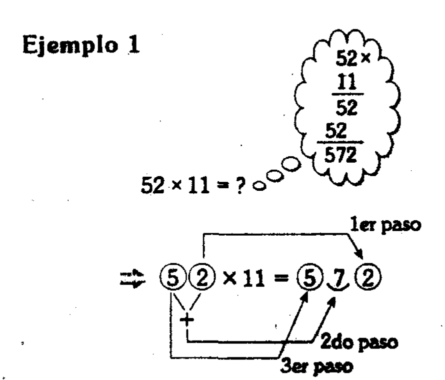
Para que practiques:

1. $8125 \div 5 =$ ....
2. $94540 \div 5 =$ ....
3. $71853 \div 5 =$ ....

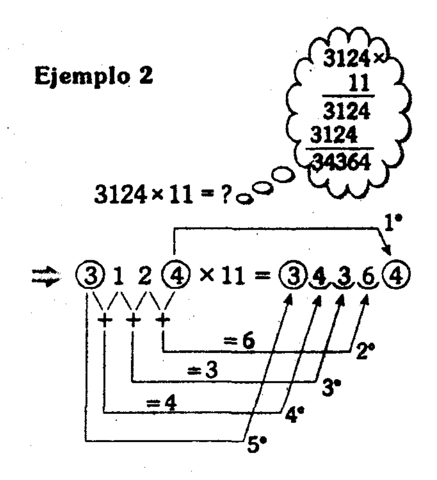
Si deseas, puedes hacer un método práctico para dividir por 25, utilizando la misma idea que en los casos anteriores.

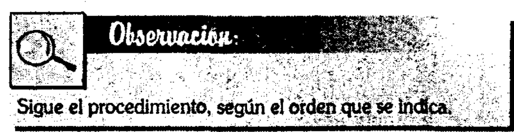
MULTIPLICACIÓN POR 11

Ejemplo 1



Ejemplo 2





Observación:

Sigue el procedimiento, según el orden que se indica.

Ejemplo 3

$$8572 \times 11 = ?$$

Operando tenemos:

⇒ ⑧5 7② × 11 = ⑨4 2 9②

1°; + + +; = 9 (2°); = 12 (3°); = 13 (4°); 5°

Observación:

Como se observa, cuando la suma parcial de 2 cifras resulta un número de 2 cifras (ejemplo: 5+7=12), se coloca la cifra de las unidades y se lleva la otra cifra para adicionar en el resultado del paso siguiente.

Como la perfección se alcanza practicando, te brindamos algunos ejemplos para que te ejercites.

1. 79 × 11 = 8 _ _ _
2. 4599 × 11 = 5 _ 5 _ _
3. 790047 × 11 = 8 _ _ 0 _ _ 7 _
4. 9876543 × 11 = _ _ _ 6 _ _ 9 _ _ _

¿Tienes curiosidad por conocer ¿cuál es la regla práctica para multiplicar por 111× 1111, . . ., etc.? ¡Averígualo!; como sugerencia utiliza un ejemplo en forma similar al que se utilizó en la multiplicación por 11.

MULTIPLICACIÓN POR 9, 99, 999, 9999, ...

Deduzcamos el procedimiento a partir de un ejemplo:

$$347 \times 99 = 347(100-1) = 34700 - 347 = 34353$$

Nos damos cuenta de que efectuar una sustracción es más fácil que multiplicar. Entonces:

> Para multiplicar cualquier número natural (N) por otro número natural que está formado íntegramente por cifras 9, al otro número (N) hay que agregarle a su derecha tantos ceros como cifras nueves hay, y al número que resultare le restamos el mismo número (N).

Es decir:

$$N \times \underbrace{99\ldots99}_{\text{"n" cifras}} = \overline{N\underbrace{00\ldots00}_{\text{"n" cifras}}} - N$$

N representa a cualquier número natural.

Ejemplos:

1. $123 \times 99 = 12300 - 123 = 12177$
2. $746 \times 9999 = 7460000 - 746 = 7459254$
3. $3785 \times 999 = 3785000 - 3785 = 3781215$
4. $844371 \times 99999 = 84437100000 - 844371$

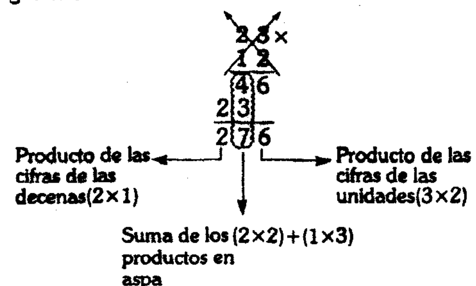
$= 84436255629$

Para que practiques:

1. 87 × 99 =..................
2. 23 × 9999 =..................
3. 501 × 999 =..................
4. 1007 × 99999 =..................

MULTIPLICACIÓN DE 2 NÚMEROS DE 2 CIFRAS CADA UNO

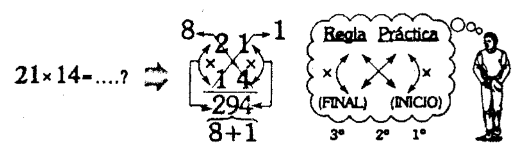
Deduzcamos el procedimiento del ejemplo siguiente:



Apliquemos nuestras deducciones en los siguientes ejemplos:

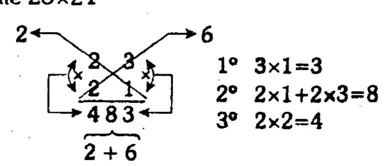
Ejemplo 1

Calcule: 21×14



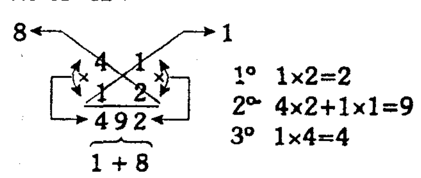
Ejemplo 2

Calcule 23×21



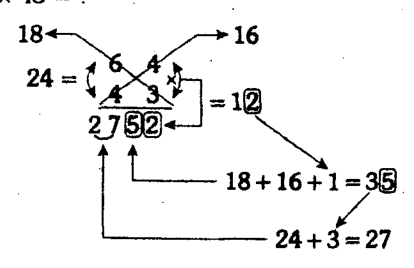
Ejemplo 3

Calcule 41×12 .



Si en una o en más de las operaciones parciales resulta un número mayor que 9, dejamos la cifra de las unidades y llevamos las cifras restantes para la siguiente operación. Por ejemplo:

64 × 43 = ?



Para que practiques:

1. 34 × 46 = ...
2. 53 × 67 = ...
3. 87 × 77 = ...
4. 98 × 93 = ...

EMPLEO DEL COMPLEMENTO ARITMÉTICO (C.A.)

Para realizar algunas multiplicaciones , si nos preguntasen cuánto le falta a 4 para ser 10, responderíamos inmediatamente que 6; y si consideramos el número 91, ¿cuánto le falta para ser 100? pues 9 ¿verdad?; y ¿cuánto le falta a 885 para ser 1000?, es claro que le falta 115 y podríamos seguir así con más preguntas de este tipo, es decir calculamos la cantidad que le falta a un número para que sea igual a una unidad del orden inmediato superior.

Lo que hemos realizado empíricamente es el cálculo de complementos aritméticos.

¿Qué es un complemento aritmético?

Se denomina complemento aritmético (C.A.) de un número natural a la cantidad que le falta a dicho número natural para ser igual a una unidad del orden inmediato superior.

Ejemplo:
Halla el C.A. de 748; 5136

Resolución:

I.

```
 [3 2 1 0] ——— orden
  1 0 0 0
    7 4 8 ——— número dado
  -------
    2 5 2 ——— C.A.
```

$\therefore$ C.A. (748) = 252

II.

```
 [4 3 2 1 0] --------- orden
  1 0 0 0 0
    5 1 3 6 --------- número dado
  ---------
    4 8 6 4 --------- C.A.
```

$\therefore$ C.A. (5136) = 4864

Forma práctica para calcular el C.A. de los números naturales

A partir del menor orden se observa la primera cifra significativa, la cual se resta de 10 y las demás cifras se restan de 9. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:
Calcula en forma práctica el C.A. de:
I. 748
II. 5136
III. 7040
IV. 9986

Resolución:

```
           9  9  10
I.   C.A. (7  4  8) = 252

           9  9  9  10
II.  C.A. (5  1  3  6) = 4864

           9  9  10
III. C.A. (7  0  4  0) = 2960

           9  9  9  10
IV.  C.A. (9  9  8  6) = 14
```

Utilicemos ahora el C.A. para calcular algunas multiplicaciones. Los factores son muy cercanos a una potencia de diez.

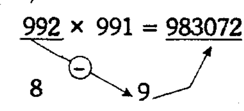
Ejemplo 1
Calcula el resultado al multiplicar: 992 × 991

Resolución:

1° Paso: Calculamos los C.A. y los multiplicamos. Al resultado le hemos colocado un cero en el lugar mostrado para que su número de cifras sea igual al de cada uno de los factores.

```
992 × 991 = ................072
 ↓     ↓                     ↑
[8  ×  9] ....................
```

2° Paso: Restamos de uno de los factores el C.A. del otro factor. Podríamos tomar por ejemplo el factor 992 y restarle 9 (que es el C.A. de 991).



∴ El producto será: 983072

Ejemplo 2

Calcula la suma de las cifras del resultado de:
999987 × 999993

Resolución:

1° Paso:

E = 999987 × 999993 = ... 000091

13 × 7

Al resultado le colocamos 4 ceros para que su número de cifras sea igual al de cada uno de los factores.

2° Paso:

E = 999987 × 999993 = 999980000091

7

Entonces el producto será: 999980000091

Nos pide la suma de las cifras:

$$9+9+9+9+8+9+1 = 54$$

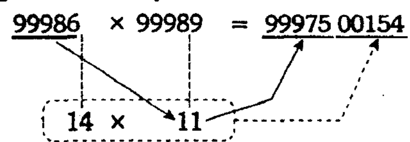
Ejemplo 3

Calcula la suma de las cifras del producto de:

99986×99989

Resolución:

Esta vez haremos el cálculo de manera directa integrando los dos pasos descritos:



El producto es: 9997500154

Nos pide la suma de cifras:

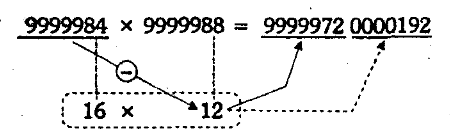
$$3(9)+7+5+1+5+4=49$$

Ejemplo 4

Calcula el producto de las cifras de la suma de cifras de A.

A = 9999984 × 9999988

Resolución:



∴ A = 99999720000192

Suma de cifras de A = 66

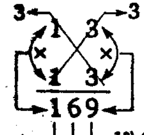
Nos pide: 6 × 6 = 36

CUADRADO DE UN NÚMERO DE 2 CIFRAS

Si tomamos como base el criterio práctico de multiplicación de dos números, cada uno de dos cifras anterior, podemos deducir un procedimiento sencillo para este caso.

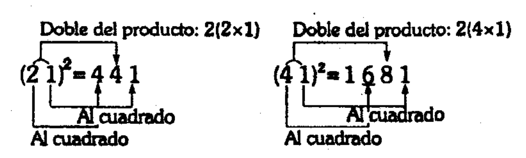
Analicemos un ejemplo:

$(13)^2 = 13 \times 13 = ??$



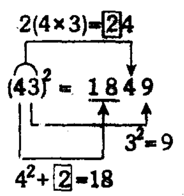
1°) Cuadrado de la cifra de las unidades: $3^2 = 9$
2°) Doble del producto de sus cifras: $2(1\times3) = 6$
3°) Cuadrado de la cifra de las decenas: $1^2 = 1$

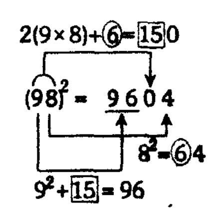
Hagámoslo más práctico en los siguientes ejemplos:



En caso de que algún producto parcial obtenido en el procedimiento resulte mayor que 9, dejaremos la cifra de las unidades y llevaremos las cifras restantes a la siguiente operación. Por ejemplo, si en un producto parcial obtienes 25, entonces dejas 5 y llevas **2**; ó si te sale **137**, dejas 7 y llevas **13**.

Ejemplos:





Para que practiques:

1. $(34)^2 =$ ....
2. $(52)^2 =$ ....
2. $(86)^2 =$ ....
4. $(93)^2 =$ ....
5. $(35)^2 =$ ....

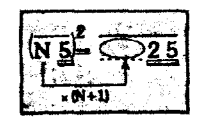
CUADRADO DE UN NÚMERO QUE TERMINA EN LA CIFRA 5

Deduzcamos una regla práctica a partir de los siguientes ejemplos:

$(15)^2 = 225$ (×2) $\quad (25)^2 = 625$ (×3) $\quad (35)^2 = 1225$ (×4)

Nos damos cuenta de que un número que termina en cifra 5 al elevarse al cuadrado, su resultado siempre terminará en 25, y que las cifras restantes del resultado se obtendrán de multiplicar el número (sin tomar en cuenta la cifra 5) por su consecutivo inmediato superior.

Es decir:



Ejemplos:

1. $(55)^2 = 3025$ (×6)
2. $(105)^2 = 11025$ (×11)
3. $(785)^2 = 616225$ (×79)
4. $(9995)^2 = 99900025$ (×1000)

Para que practiques:

1. $(85)^2 =$ ....
2. $(235)^2 =$ ....
3. $(555)^2 =$ ....
4. $(1005)^2 =$ ....

ALGUNAS OPERACIONES BÁSICAS CON FRACCIONES

a) Adición y sustracción

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3\times5+2\times4}{4\times5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}$$

$$\frac{8}{3}-\frac{4}{7}=\frac{56-12}{21}=\frac{44}{21}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{11}=\frac{55+42}{66}=\frac{97}{66}$$

$$1+\frac{2}{3}=\frac{3\times 1+2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$4-\frac{5}{8}=\frac{32-5}{8}=\frac{27}{8}$$

$$13+\frac{7}{5}=\frac{65+7}{5}=\frac{72}{5}$$

b) Homogenización de denominadores

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2(2)}{3(2)}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{2}-\frac{5}{8}=\frac{7(4)}{2(4)}-\frac{5}{8}=\frac{28}{8}-\frac{5}{8}=\frac{23}{8}$$

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}=\frac{2(3)}{5(3)}+\frac{7(5)}{3(5)}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{41}{15}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{3(5)}{4(5)}-\frac{1(4)}{5(4)}=\frac{15}{20}-\frac{4}{20}=\frac{11}{20}$$

c) División

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1\times 3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{5}}=\frac{2\times 5}{7\times 9}=\frac{10}{63}$$

(extremos y medios)

$$\frac{2}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{5}}=\frac{2\times 5}{1\times 1}=10$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{2\times 1}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

PROBLEMAS RECREATIVOS

1. Forma los números: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 con 3 cifras "cinco". Te mostramos 2 ejemplos:

$$1=\left(\frac{5}{5}\right)^5=\sqrt[5]{\frac{5}{5}}=5^{5-5}$$

$$2=\frac{5+5}{5}$$

3 = ...

4 = ...

5 = ...

2. Coloca convenientemente los paréntesis y los símbolos + ; − ; × ; ÷, sobre las líneas punteadas para obtener los resultados dados.

Ejemplo:

(3 × 3 × 3) ÷ 3 = 9

3 × 3 + 3 ÷ 3 = 10

Ahora, hazlo tú:

a. 3.....3.....3.....3 = 1
b. 3.....3.....3.....3 = 2
c. 3.....3.....3.....3 = 3
d. 3.....3.....3.....3 = 4
e. 3.....3.....3.....3 = 5
f. 3.....3.....3.....3 = 6
g. 3.....3.....3.....3 = 7
h. 3.....3.....3.....3 = 8

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

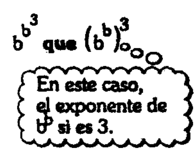
Indica cuál es el exponente de b^b en la siguiente expresión: $E = b^{b^3}$

Resolución:

Muchos pensarán que la respuesta es 3.

Pero recuerda que no es lo mismo:

b^{b^3} que $(b^b)^3$



Aplicando conceptos básicos de leyes de exponentes nos daremos cuenta que la respuesta es otra. Veamos:

$$E = b^{b^3} = b^{b^{1+2}} = b^{b \times b^2} = (b^b)^{b^2}$$

$\therefore$ El exponente de b^b es b^2

PROBLEMA 2

Si: $(x + y + z + w)^2 = 4(x+z)(y+w)$

Calcule:

$$M = \sqrt[3x-y+3z-w]{3^{x-3y+z-3w}}$$

Resolución:

El problema parece ser operativo, pero si observamos bien la forma que tiene, nos daremos cuenta de que tiene una particularidad:

$$M = \sqrt[3x+3z-y-w]{3^{x+z-3y-3w}}$$

$$= \sqrt[3(x+z)-(y+w)]{3^{(x+z)-3(y+w)}}$$

Vemos que en el problema aparecen $x+z$ y "$y+w$". Por tanto para facilitar las operaciones, hagamos un cambio de variables:

$x + z = a$ y $y + w = b$

$$M = \sqrt[3(x+z)-(y+w)]{3^{(x+z)-3(y+w)}} = \sqrt[3a-b]{3^{a-3b}}$$

Del dato:

$$(\underbrace{x+z}_{a} + \underbrace{y+w}_{b})^2 = 4(\underbrace{x+z}_{a})(\underbrace{y+w}_{b}) \Rightarrow (a+b)^2 = 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)^2 = 0$$

$$a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

Entonces en M:

$$\therefore M = \sqrt[3a-a]{3^{a-3a}} = \sqrt[2a]{3^{-2a}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Otro método

Si asignamos valores adecuados a las variables para que se cumplan las condiciones del problema, entonces estos mismos valores darán la respuesta de lo que se pide. Así, para el problema podemos considerar $x=1$; $y=1$; $z=1$; $w=1$

Veamos si estos valores satisfacen la condición inicial:

$(\underset{\underset{1}{\downarrow}}{x}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{y}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{z}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{w})^2 = 4(\underset{\underset{1}{\downarrow}}{x}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{z})(\underset{\underset{1}{\downarrow}}{y}+\underset{\underset{1}{\downarrow}}{w}) \Rightarrow 4^2 = 4(2)(2)$

¡Sí cumple!

$$\Rightarrow M = \sqrt[3x-y+3z-w]{3^{x-3y+z-3w}} = \sqrt[3-1+3-1]{3^{1-3+1-3}}$$

$$\therefore M = \sqrt[4]{3^{-4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 3

Efectúe y de como respuesta la suma de cifras del resultado:

$$A = \underbrace{\frac{25}{37} + \frac{2525}{3737} + \frac{252525}{373737} + \dots + \frac{252525\dots25}{373737\dots37}}_{111 \text{ sumandos}}$$

Resolución:

Antes de iniciar con los cálculos debemos analizar minuciosamente el problema y ver qué particularidad presenta. Nos damos cuenta de que en cada fracción la cantidad de cifras del numerador y el denominador es la misma y presenta la misma características (repetición de cifras). Si analizamos los numeradores, obtendremos:

- $25 = 25 \times 1$
- $2525 = 2500 + 25 = 25(\overbrace{100+1}^{101}) = 25 \times 101$
- $252525 = 250000 + 2500 + 25$
  $= 25(10101)$
- $25252525 = 25(1010101)$

En general

- $252525\dots25 = 25(10101\dots01)$

Del mismo modo podemos analizar los denominadores

Luego:

$$\Rightarrow A = \underbrace{\frac{25\times 1}{37\times 1} + \frac{25\times \cancel{101}}{37\times \cancel{101}} + \frac{25\times \cancel{10101}}{37\times \cancel{10101}} + \dots + \frac{25\times \cancel{10101\dots01}}{37\times \cancel{10101\dots01}}}_{111 \text{ sumandos}}$$

$$A = \underbrace{\frac{25}{37} + \frac{25}{37} + \frac{25}{37} + \dots + \frac{25}{37}}_{111 \text{sumandos}}$$

$$\Rightarrow A = 111\left(\frac{25}{37}\right) = 3(25) = 75$$

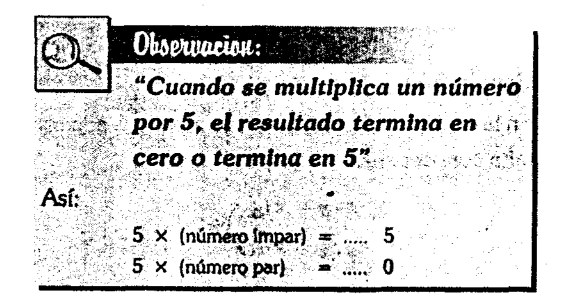
$$\therefore S_{cifras} = 7 + 5 = 12$$

PROBLEMA 4

Calcule: a+b, si:

$$\underbrace{(1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots\dots)^4}_{1999 \text{ factores}} = \overline{\dots\dots ab}$$

Resolución:



También, recuerda que todo número que termina en 5 al elevarlo al cuadrado su resultado terminará en 25. Se representa así:

$$(\dots\dots\dots5)^n = \dots\dots\dots25$$

Donde: $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Entonces:

$$(1\times3\times⑤\times7\times9\ \dots\dots)^4 = \overline{\dots ab}$$

(1, 3, 7, 9, …: impares)

$$(⑤ \times \text{impar})^4 = \overline{\dots ab}$$

$$(\dots\dots\dots5)^4 = \overline{\dots ab}$$

$$\dots\dots\dots25 = \overline{\dots ab}$$

$$\therefore a+b = 2+5 = 7$$

Observación:

El producto de números impares origina como resultado otro número también impar.

$\underbrace{1 \times 3 \times 7 \times 9 \times \ldots\ldots}_{\text{impares}} =$ un número impar

PROBLEMA 5

Si : $x - y = y - z = \sqrt[6]{6}$, calcule el valor de:

$$A = \frac{(x-z)^6 + (y-z)^6 + (x-y)^6}{66}$$

Resolución:

En la expresión A ya conocemos a $x-y$ y $y-z$, pero falta conocer $x-z$.

$$\begin{aligned} x - y &= \sqrt[6]{6} \\ y - z &= \sqrt[6]{6} \\ \hline x - z &= 2\sqrt[6]{6} \end{aligned} \quad (+)$$

Reemplazando:

$$A = \frac{(2\sqrt[6]{6})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 + (\sqrt[6]{6})^6}{66} = \frac{2^6 \times 6 + 6 + 6}{66} = \frac{66 \times 6}{66} = 6$$

$\therefore A = 6$

PROBLEMA 6

Halle : $x+y$, si : $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$

$x - y = 16$

Resolución:

Una forma de resolver el problema sería operando algebraicamente; pero como las cantidades numéricas son pequeñas, con un simple análisis llegaremos más rápido a la solución.

I. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$, resultado entero $\Rightarrow \sqrt{x}$ y $\sqrt{y}$ son también enteros y en conclusión x e y son cuadrados perfectos; es decir, tienen raíz cuadrada exacta.

II. Según el dato, busquemos dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 16

$(x-y=16)$: 1, 4, (9), 16, (25), 36, 49, ...

$\Rightarrow$ $x = 25$ y $y = 9$

Verificando en (i) : $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$ ...¡cumple!

$\therefore\ x + y = 25 + 9 = 34$

PROBLEMA 7

Calcule el valor de $\sqrt{x}$, si $x \in \mathbb{Z}^+$ y además:

$$2x^2 + 4 + 2\sqrt{2(2+x^2)} = 48$$

Resolución:

Al igual que el problema anterior, como el valor numérico es pequeño, analizar resulta más rápido que operar. Veamos:

$$\overbrace{2(x^2+2)}^{\text{cuadrado perfecto}} + 2\sqrt{2(x^2+2)} = 48 = 36 + 2\sqrt{36}$$

$2(x^2+2) = 36 \Rightarrow x^2 + 2 = 18 \Rightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x = 4 \quad (x \in \mathbb{Z}^+)$

$\therefore\ \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

PROBLEMA 8

Si : $x + \frac{1}{x} = 2$

Halle: A+B, si:

$A = x^{20} + x^{19} + x^{18} + \ldots + x^3 + x^2 + x$
$B = x^{-20} + x^{-19} + x^{-18} + \ldots\ldots + x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$

Resolución:
Hagamos lo posible por evitar las operaciones, simplemente analicemos nuestros datos así:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$A = x^{20} + x^{19} + \ldots + x^2 + x = \underbrace{1+1+\ldots+1+1}_{20 \text{ sumandos}} = 20$$

$$B = x^{-20} + x^{-19} + \ldots + x^{-2} + x^{-1} = \underbrace{1+1+\ldots+1+1}_{20 \text{ sumandos}} = 20$$

$$\therefore \quad A + B = 20 + 20 = 40$$

PROBLEMA 9

Si : $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{7}$

Halle: $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Resolución:
En este problema no podemos hacer lo mismo como en el anterior, (dar un valor adecuado a x), puesto que el valor $\sqrt{7}$ no es un número entero. Entonces, elevando al cuadrado, tenemos:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 7$$

$$x + 2 + \frac{1}{x} = 7$$

$$\Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} = 5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Recordemos:

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)\end{aligned}}$$

Elevando (*) al cubo obtendremos lo que nos pide.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 5^3$$

$$x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \underbrace{3(\cancel{x})\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)}_{3}\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{5} = 125$$

$$\therefore \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 15 = 110$$

PROBLEMA 10

Se tiene: $x^4 + x^{-4} = 14$

Calcule: $E = x - x^{-1}$

Resolución:
Este problema es el caso contrario anterior; porque, no vamos a trabajar directamente con el dato, sino vamos a trabajar con lo que nos pide E. Entonces, elevando al cuadrado E tenemos:

$$E^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow E^2 + 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Luego elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros :

$$(E^2+2)^2 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 = (x^2)^2+2(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4+2+\frac{1}{x^4}$$

(con $x^4+\frac{1}{x^4} = 14$)

$$(E^2+2)^2 = 16$$

$$\rightarrow 2 \Rightarrow E^2 = 2 \begin{cases} E = \sqrt{2} \\ E = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{(tiene dos soluciones)}$$

PROBLEMA 11

Si : $\overline{\ldots\ldots 3518} \div 9999 = \overline{abcd}$

Calcule : $E = \dfrac{5[a \times b \times c \times d]}{a+b+c+d}$

Resolución:

$\overline{\ldots\ldots 3518} \div 9999 = \overline{abcd}$

$$\frac{\overline{\ldots\ldots 3518}}{9999} = \overline{abcd} \Rightarrow \overline{abcd} \times 9999 = \overline{\ldots\ldots 3518}$$

Nos damos cuenta de que se trata de una multiplicación cuyo número está formado por cifras "9". Entonces:

$$\overline{abcd} \times 9999 = \overline{\ldots\ldots\ 3518}$$

$$\overline{abcd0000} - \overline{abcd} = \overline{\ldots\ldots\ 3518}$$

Ordenando en columna :

$$\begin{array}{r} \overline{abcd0000} - \\ \overline{abcd} \\ \hline \overline{\ldots .3518} \end{array}$$

6 = a, 4 = b, c = 8, d = 2

Reemplazando :

$$E = \frac{5[6 \times 4 \times 8 \times 2]}{6+4+8+2} = \frac{\not{5}[6 \times \not{4} \times 8 \times 2]}{2\not{0}}$$

$$= 6 \times 8 \times 2 = 96$$

PROBLEMA 12

Simplifique: $E = \sqrt[3]{\dfrac{256 \times 264 + 16}{123 \times 137 + 49}} \times \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

Resolución:

Si procedemos a desarrollar las operaciones, va a resultar algo complicado el problema. Al observar *tenemos:*

$$256 \xleftarrow{-4} 260 \xrightarrow{+4} 264 \quad ; \quad 123 \xleftarrow{-7} 130 \xrightarrow{+7} 137$$

luego :

$$E = \sqrt[3]{\frac{(260-4)(260+4)+4^2}{(130-7)(130+7)+7^2}} \times \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

La idea de este problema es utilizar la diferencia de cuadrados. Recordemos:

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Entonces:

$$E = \sqrt[3]{\frac{(260)^2-(4)^2+4^2}{(130^2-(7)^2+7^2}} \times \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$E = \sqrt[3]{\left(\frac{260}{130}\right)^2} \times \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\therefore\ E = \sqrt[3]{2^2} \times \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = 2$$

PROBLEMA 13

Calcule el valor de M, en :

$$M = \sqrt[4]{2 \times 4 \times 10 \times 82 \times 6562 + 1}$$

Resolución:

Si efectuamos los cálculos elementales en M obtendremos:

$$M = \sqrt[4]{2\times4\times10\times82\times6562+1} = \sqrt[4]{80\times82\times6562+1}$$

Todo problema operativo generalmente presenta un artificio o arreglo matemático para que sea más sencilla su operación. Tomando la idea del problema anterior, obtendremos:

$$M = \sqrt[4]{[\underbrace{(81-1)(81+1)}_{(81)^2-(1)^2} \times \underbrace{6562}_{81^2+1}]+1} = \sqrt[4]{\underbrace{[(81^2-1)(81^2+1)]}_{[(81)^2]^2-1^2}+1}$$

$$M = \sqrt[4]{[81^4 - \cancel{1}] + \cancel{1}} \quad \therefore \quad M = \sqrt[4]{81^4} = 81$$

PROBLEMA 14

Calcule $x+y$, si :

$$y^{x+y} = x^{8/3} \; ; \; x^{x+y} = y^{2/3} \; ; \; x+y>0$$

Resolución:

De la primera condición:

$$y^{x+y} = x^{8/3} \Rightarrow y = \sqrt[x+y]{x^{\frac{8}{3}}} = x^{\frac{8}{3(x+y)}}$$

Reemplazando el "y" en la segunda condición obtendremos:

$$x^{x+y} = y^{2/3} \Rightarrow x^{x+y} = \left(x^{\frac{8}{3(x+y)}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3(x+y)}\times\frac{2}{3}}$$

Recuerda: ***"En ecuaciones, si las bases son iguales, entonces los exponentes también son iguales"***

$$x^{\boxed{x+y}} = x^{\boxed{\frac{16}{9(x+y)}}} \Rightarrow x+y = \frac{16}{9(x+y)}$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{9} \quad \therefore \quad x+y = \frac{4}{3}$$

PROBLEMA 15

Determinar el valor de :

$$A = \sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt[n]{\frac{x}{\vdots}}}}}}$$

Resolución:

En la expresión observamos:

$$A = \sqrt[n]{\frac{x}{\boxed{\sqrt[n]{\frac{x}{\sqrt[n]{\frac{x}{\vdots}}}}}}} \Rightarrow A$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[n]{\frac{x}{A}} \quad \text{(elevando a la n)}$$

$$A^n = \frac{x}{A} \Rightarrow A^n \cdot A = x$$

$$A^{n+1} = x \quad \therefore \quad A = \sqrt[n+1]{x}$$

PROBLEMA 16

Calcule: a + b, si :

$$a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\ldots}}}$$

$$b = 3 + \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots\ldots}}}$$

Resolución:

Primero : $a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\ldots}}}$

$a - 1 = \sqrt{2\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}_{a-1}}$

$a - 1 = \sqrt{2(a-1)}$

$(a-1)^2 = 2(a-1)$; $a \neq 1$

$(a-1)\,\cancel{(a-1)} = 2\cancel{(a-1)}$

$a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

Luego: $b = 3 + \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}$

$b - 3 = \sqrt{6\underbrace{\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}_{b-3}}$

$b - 3 = \sqrt{6(b-3)}$

$(b-3)^2 = 6(b-3)$; $b \neq 3$

$(b-3)\,\cancel{(b-3)} = 6\cancel{(b-3)}$

$b-3 = 6 \Rightarrow b = 9$

$\therefore\ a + b = 3 + 9 = 12$

PROBLEMA 17

Simplifique: $E = \left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}\right)^3$

Resolución:

Desarrollar el trinomio al cubo sería demasiado operativo. Observando detenidamente el problema, obtenemos:

$E = \left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}\right)^3$

$E = \left(\sqrt[3]{2}\,.\,\overbrace{\sqrt[3]{8}}^{2} + \sqrt[3]{2}\,.\,\overbrace{\sqrt[3]{27}}^{3} + \sqrt[3]{2}\,.\,\overbrace{\sqrt[3]{64}}^{4}\right)^3$

$E = \left(2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2}\right)^3 = \left(9\sqrt[3]{2}\right)^3$

$\therefore\ E = 9^3 \times 2 = 1458$

PROBLEMA 18

Si $x = \sqrt[3]{2}$, halle:

$M = \left(\sqrt{1 + (x+1)(x^2+1)(x-1)(x^4+1)}\right)^3$

Resolución:

Si observamos detenidamente veremos:

$M = \left(\sqrt{1 + \underbrace{(x+1)(x-1)}_{(x^2-1^2)}(x^2+1)(x^4+1)}\right)^3$

$M = \left(\sqrt{1 + \underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{(x^2)^2-1^2}(x^4+1)}\right)^3$

$M = \left(\sqrt{1 + \underbrace{(x^4-1)(x^4+1)}_{(x^4)^2-1^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{1 + (x^8-1)}\right)^3$

$M = \left(\sqrt{x^8}\right)^3 = (x^4)^3 = x^{12}$

$\therefore\ M = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{12} = 2^4 = 16$

PROBLEMA 19

Halle el valor de :

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)^3-(6999)^2-7(6999)(10)^3}$$

Resolución:

Resultaría muy operativo elevar al cubo y al cuadrado los números ; pero si factorizamos adecuadamente, obtendremos:

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)^3-(6999)^2-7(6999)(10)^3}$$

$$E=\sqrt{(7000)^3-[(6999)^3+(6999)^2]-7(6999)(10)^3}$$

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)^2[6999+1]-7(6999)(1000)}$$

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)^2(7000)-(6999)(7000)}$$

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)(7000)[6999+1]}$$

$$E=\sqrt{(7000)^3-(6999)(7000)(7000)}$$

$$=\sqrt{(7000)^3-(6999)(7000)^2}$$

$$E=\sqrt{(7000)^2[7000-6999]}$$

$$=\sqrt{(7000)^2\times 1}=\sqrt{(7000)^2}$$

$$\therefore\quad E=7000$$

PROBLEMA 20

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=d^{-1}$$

Simplifique: $E=2\left(\dfrac{bd+ad}{ad-ac}\right)\cdot\left(\dfrac{c}{b}\right)$

Resolución:

Hay que relacionar lo que se nos pide con lo que se nos da como dato. Planteando

$$E=2\left(\frac{b\bar{d}+a\bar{d}}{\underline{a}d-\underline{a}c}\right)\left(\frac{c}{b}\right)=2\left(\frac{b+a}{d-c}\right)\left(\frac{dc}{ab}\right)\;......(\alpha)$$

Del dato:

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=d^{-1}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$$

$$\frac{b+a}{ab}=\frac{c-d}{dc}$$

$$\frac{b+a}{ab}=\frac{-(d-c)}{dc}\Rightarrow(b+a)dc=-(d-c)ab$$

Reemplazando en (α)

$$E=2\overbrace{\left(\frac{b+a}{d-c}\right)\left(\frac{dc}{ab}\right)}^{-(d-c)ab}$$

$$E=2\times\frac{-(d-c)ab}{(d-c)ab}\Rightarrow E=-2$$

PROBLEMA 21

Calcule : A^2+1

$$A=(2\times 2^2\times 2^3\times 2^4\times\ ....\ \times 2^n)^{\frac{1}{1+2+3+...+n}}$$

Resolución:

Recuerda: ***"Cuando se multiplica, si las bases son iguales, entonces los exponentes se suman"***

$$A=\left(2^{1+2+3+....+n}\right)^{\frac{1}{1+2+3+...+n}}$$

$\Rightarrow A = 2^{(1+2+3+......+n)\times\frac{1}{(1+2+3+......+n)}}$

$A = 2$

$\therefore A^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$

PROBLEMA 22

Si $\sqrt[9]{3} = \sqrt[x]{x}$, halle x

Resolución:

Si a una expresión cualquiera le sacamos raíz n–ésima y la elevamos a la potencia n–ésima, la expresión no varía. Así:

$A = \sqrt[n]{A}^{\,n}$ (No varía porque la raíz y el exponente pueden cancelarse)

Ahora saquemos raíz cúbica y elevemos al cubo, para que no varíe:

$\left(\sqrt[3]{\sqrt[9]{3}}\right)^3 = \sqrt[x]{x}$

$\sqrt[27]{27} = \sqrt[x]{x}$

Comparando : $\therefore x = 27$

PROBLEMA 23

Si $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 18$, calcula : $\frac{a-b}{\sqrt{ab}}$

Resolución:

Partamos del dato y demos la forma de la expresión que buscamos :

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 18 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} = 18$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = \overbrace{18ab}^{2ab+16ab}$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 16ab$

$(a-b)^2 = 16ab \Rightarrow a - b = \sqrt{16ab}$

$\Rightarrow a - b = 4\sqrt{ab}$

$\therefore \frac{a-b}{\sqrt{ab}} = 4$

PROBLEMA 24

Si $x = 0{,}1^2 + 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}81$

$xy = 5^{-x}$

halle $x + y$

Resolución:

$x = 0{,}1^2 + \overbrace{0{,}2}^{2(0,1)} \times 0{,}9 + \overbrace{0{,}81}^{(0,9)^2}$

$x = \underbrace{(0{,}1)^2 + 2 \times (0{,}1)(0{,}9) + (0{,}9)^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$

$x = (0{,}1 + 0{,}9)^2 = 1^2 = 1$

Reemplazando en el 2do. dato:

$xy = 5^{-x} \Rightarrow (1)\,.\,y = 5^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{5}$

$\therefore x + y = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

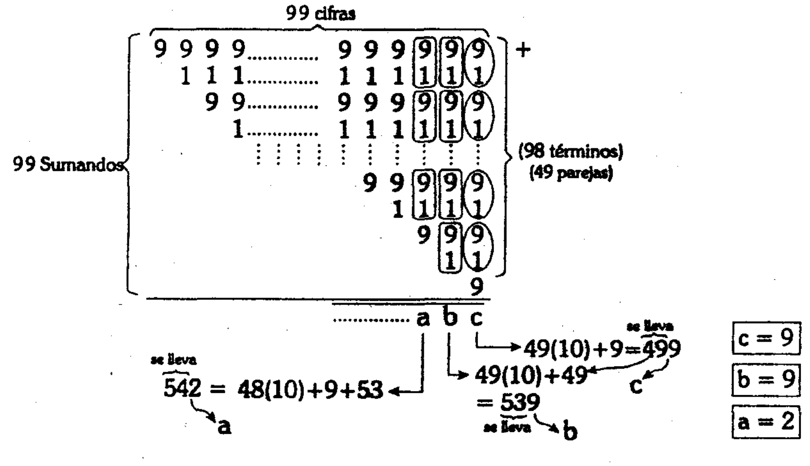
PROBLEMA 25

Calcule $a + b + c$

$$\overline{\ldots abc} = \underbrace{999\ldots99}_{99\ cifras}+\underbrace{111\ldots1}_{98\ cifras}+\underbrace{99\ldots9}_{97\ cifras}+\underbrace{111\ldots1}_{96\ cifras}+\ \ldots\ldots + 999 + 11 + 9$$

Resolución:

Ordenando dichos sumandos en columna :



$$\therefore\ a + b + c = 2 + 9 + 9 = 20$$

PROBLEMA 26

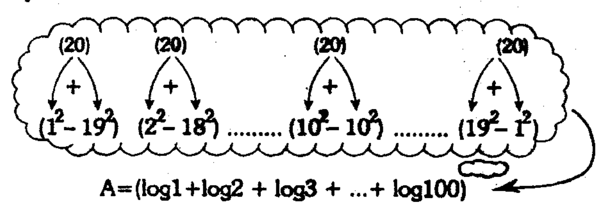
Calcule la suma de cifras del resultado de $A + D$

$A = (\text{Log}1 + \text{Log}2 + \text{Log}3 + \ldots + \text{Log}100)^{(1^2-19^2)(2^2-18^2)(3^2-17^2)\ldots\ldots(19^2-1^2)}$

$D = 999 \times 1000 \times 1001$

Resolución:

Para resolver A, debemos tener en cuenta su exponente. Éste es igual al producto de diferencia de cuadrados de números que suman 20.



Vemos que hay un factor que es igual a cero: $(10^2 - 10^2)$

Por lo tanto, el exponente de A es igual a cero.

Luego: $A = (\text{Log}1 + \text{Log}2 + \text{Log}3 + \ldots\ldots + \text{Log}100)^0 = 1$

$D = 999 \times (1000 + 1) \times 1000 = (999000 + 999) \times 1000 = 999999000$

$$\therefore\ A + D = 1 + 999999000 = 999999001$$

Suma de cifras : $9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 1 = 55$

PROBLEMA 27

Si $\underbrace{0{,}00\ldots091}_{23\text{ cifras}} = 91 \times 10^{x-10}$, halle $x+30$

Resolución:

$$\underbrace{0{,}00\ldots091}_{22\text{ cifras}} = \frac{91}{10^{22}} = 91 \times 10^{-22}$$

$$91 \times 10^{-22} = 91 \times 10^{x-10} \quad (\text{iguales})$$

$\Rightarrow\ x - 10 = -22 \ \Rightarrow\ x = -12$

$\therefore\ x + 30 = -12 + 30 = 18$

PROBLEMA 28

Halle la suma de cifras del resultado de
$A = 7777777 \times 999999999$

Resolución:

Sabemos que :

$$\overline{abc} \times 9999 = \overline{abc0000} - \overline{abc}$$

$\Rightarrow\ 7777777 \times 999999999$

$= 7777777000000000 - 7777777$

$$\begin{array}{r} 7777777000000000\ - \\ 7777777 \\ \hline = 7777776992222223 \end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras sería:

$$\underbrace{7+7+\ldots+7}_{6\text{ veces}} + 6+9+9+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{6\text{ veces}} + 3$$

$= 42 + 24 + 12 + 3 = 81$

PROBLEMA 29

Si $2x + y + z = 0$, calcule el valor de A

$$A = \left(\frac{x+y}{x+z}\right)^{\left(\frac{x+y+z}{2x+3y}\right)^2 \cdot 1999^{\overline{xy}} \times 2}$$

Resolución:

Como la parte del exponente es sumamente complicada, analicemos solamente la base.

Se sabe que $2x + y + z = 0 \ \Rightarrow\ y = -2x - z$

$$\frac{x+y}{x+z} = \frac{x+(-2x-z)}{x+z} = \frac{-x-z}{x+z} = -\frac{(x+z)}{x+z} = -1$$

Reemplazando :

$$A = (-1)^{\left(\frac{x+y+z}{2x+3y}\right)^2 \times 1999^{\overline{xy}} \times 2}$$

El exponente es Z^+ y par

$\therefore\ A = (-1)^{par} = 1$

PROBLEMA 30

Se sabe que a es par, b es impar y c es igual a cero. El resultado de A, ¿ será par o impar ?

$$A = 1999 \times \overline{ab}^2 \times \overline{ba} \times (a + b + \overline{ac})^3 \times b$$

Resolución:

Observación:

Recuerda que:

I. $\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{par}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix}$

Ejemplo: 3 + 2 = 5

II. $\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{par}\end{pmatrix}$

Ejemplo: 7 + 5 = 12

III. $\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{par}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{par}\end{pmatrix}$

Ejemplo: 3 × 2 = 6

IV. $\begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{número}\\ \text{impar}\end{pmatrix}$

Ejemplo: 9 × 5 = 45

$$A = \underset{\text{impar}}{1999} \times \underset{\text{impar}}{\overline{ab}^2} \times \underset{\text{par}}{\overline{ba}} \times \underset{\text{impar}}{(\overset{\text{impar}}{\widehat{a+b}} + \overset{\text{par}}{\widehat{\overline{ac}}})^3} \times \underset{\text{impar}}{b}$$

A = par

PROBLEMA 31

Si $A = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{15}$

$B = 1 - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{15}$

Calcule A × B

Resolución:

$$A = (1+\sqrt{15}) + (\sqrt{3}+\sqrt{5})$$
$$B = (1+\sqrt{15}) - (\sqrt{3}+\sqrt{5}) \quad \times$$

$$A \times B = (1+\sqrt{15})^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$$

$$A \times B = (1 + 2\sqrt{15} + 15) - (3 + 2\sqrt{15} + 5)$$

$$\therefore\ A \times B = 8$$

PROBLEMA 32

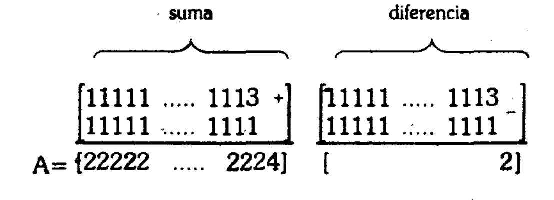
Calcule la suma de cifras de:

$$A = (\underbrace{11111\ldots1113}_{100\text{ cifras}})^2 - (\underbrace{11111\ldots1111}_{100\text{ cifras}})^2$$

Resolución:

Diferencia de cuadrados

$$A = (\underbrace{11111\ldots\ldots1113}_{100\text{ cifras}})^2 - (\underbrace{11111\ldots\ldots1111}_{100\text{ cifras}})^2$$



$$\Rightarrow A = (\underbrace{22222\ldots\ldots2224}_{100\text{ cifras}}) \times 2 = \underbrace{44444\ldots4448}_{100\text{ cifras}}$$

$$\therefore\ S_{cifras} = \underbrace{4+4+4+4+4+\ldots+4+4+4+4}_{99\text{ cifras}}+8$$

$$= 4(99) + 8 = 404$$

PROBLEMA 33

Si $\sqrt{\sqrt{x}+8} - \sqrt{\sqrt{x}-12} = 5$,

halle $M = \sqrt{\sqrt{x}+8} + \sqrt{\sqrt{x}-12}$

Resolución:

Una primera idea sería hallar x a partir del dato; pero si nos damos cuenta de que en él se nos da la diferencia y se nos pide la suma, entonces vamos a multiplicar a ambos, recordando además que:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Así:

$$\sqrt{\sqrt{x}+8}-\sqrt{\sqrt{x}-12}=5$$
$$\sqrt{\sqrt{x}+8}+\sqrt{\sqrt{x}-12}=M \quad \times$$
$$\left(\sqrt{\sqrt{x}+8}\right)^2-\left(\sqrt{\sqrt{x}-12}\right)^2=5M$$
$$(\sqrt{x}+8)-(\sqrt{x}-12)=5M$$
$$\Rightarrow 20=5M$$
$$\therefore M=4$$

PROBLEMA 34

Calcule el valor de

$$E=\sqrt[3]{\frac{(1025\times 1023+1)\times 9\times 111}{32^4\times 37}}$$

Resolución:

Veamos lo siguiente :

$$1023 \xleftarrow{-1} \boxed{1024} \xrightarrow{+1} 1025$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{[(1024+1)(1024-1)+1]\times 9\times 111}{32^4\times 37}}$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{[(1024)^2-1^2+1]\times 9\times 111}{32^4\times 37}}$$

$$E=\sqrt[3]{\frac{(1024)^2\times 9\times 111}{32^4\times 37}}=\sqrt[3]{\frac{(2^{10})^2\times 9\times 111}{(2^5)^4\times 37}}$$

$$\therefore\ E=\sqrt[3]{9\times\frac{111}{37}}=\sqrt[3]{9\times 3}=3$$

PROBLEMA 35

Si $\frac{1}{4}n^{\frac{1}{4}n}=4$, calcule $\sqrt[16]{n}^{\,n}$

Resolución:

Recuerda que no es lo mismo $\frac{1}{4}n^{\frac{1}{4}n}$ (aquí el exponente sólo afecta a n) que $\left[\frac{1}{4}n\right]^{\frac{1}{4}n}$ (aquí el exponente afecta todo)

Luego, $\frac{1}{4}n^{\frac{1}{4}n}=4$

$$\Rightarrow n^{\frac{n}{4}}=16 \Rightarrow \sqrt[4]{n}^{\,n}=16$$

Sacamos raíz cuarta a todo para obtener lo que se nos pide :

$$\sqrt[4]{\sqrt[4]{n}^{\,n}}=\sqrt[4]{16}$$

$$\therefore\ \sqrt[16]{n}^{\,n}=2$$

PROBLEMA 36

Calcule el valor de

$$A=\sqrt{3\times 5\times 17\times(2^8+1)(2^{16}+1)+1}$$

Resolución:

Vemos que en una parte del problema aparecen potencias de **2**, así que a todo le damos la misma forma:

$$A = \sqrt[16]{1 \times 3 \times 5 \times 17 \times (2^8+1)(2^{16}+1) + 1}$$

donde $1 = (2-1)$, $3 = (2^1+1)$, $5 \times 17 = (2^2+1)(2^4+1)$

$$\Rightarrow A = \sqrt[16]{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) + 1}$$

$(2-1)(2+1) = (2^2-1)$

$(2^2-1)(2^2+1) = (2^4-1)$

$(2^4-1)(2^4+1) = (2^8-1)$

$(2^8-1)(2^8+1) = (2^{16}-1)$

$(2^{16}-1)(2^{16}+1) = (2^{32}-1)$

$$\therefore\ A = \sqrt[16]{(2^{32}-1)+1} = \sqrt[16]{2^{32}} = 2^2 = 4$$

PROBLEMA 37

Calcule la suma de cifras del resultado de :

$$E = (777778)^2 - (222223)^2$$

Resolución:

$$E = \underbrace{(777778)^2 - (222223)^2}_{\text{diferencia de cuadrados}}$$

$$E = \underbrace{\begin{bmatrix}777778 + \\ 222223\end{bmatrix}}_{\text{suma}} \underbrace{\begin{bmatrix}777778 - \\ 222223\end{bmatrix}}_{\text{diferencia}}$$

$$E = (1000001) \times (555555)$$

$$E = (1000000 + 1) \times 555555$$

$$\Rightarrow E = 555555000000 + 555555$$

$$E = 555555555555$$

$$\therefore\ Suma_{cifras} = \underbrace{5+5+5+ \ldots +5}_{12\ \text{cifras}} = 12(5) = 60$$

PROBLEMA 38

Si :

$$A = \frac{3}{1\times 2} + \frac{7}{3\times 4} + \frac{11}{5\times 6} + \ldots + \frac{39}{19\times 20} + \frac{43}{21\times 22}$$

y

$$B = \frac{5}{2\times 3} + \frac{9}{4\times 5} + \frac{13}{6\times 7} + \ldots + \frac{41}{20\times 21} + \frac{45}{22\times 23}$$

halle A – B

Resolución:

Sabemos que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \boxed{\frac{b+a}{a \times b}}$,

es decir, si vemos una fracción, donde su denominador es el producto de dos números y el numerador es la suma de ellos, entonces esa fracción se puede descomponer en la suma de dos fracciones cuyos denominadores son dichos números.

Ejemplo :

- $\frac{7}{3 \times 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .... $\boxed{3 + 4 = 7}$
- $\frac{11}{5 \times 6} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ ..... $\boxed{5 + 6 = 11}$

Descomponemos cada sumando y restamos miembro a miembro:

$$A - B = \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22}\right] -$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23}\right]$$

Restamos miembro a miembro :

$$\therefore\ A - B = \frac{1}{1} - \frac{1}{23} = \frac{23-1}{23} = \frac{22}{23}$$

PROBLEMA 39

¿Cuál es el menor número que se debe multiplicar por 360 para obtener un cubo perfecto?

Resolución:

Primero vamos a descomponer a 360:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Vemos que en 360 hay un cubo (2^3). También está (3^2) y (5) que no son cubos, pero que multiplicándolos por un cierto valor se pueden volver cubos.

Ejemplo :

$5 \xrightarrow[\text{le falta } (5^2)]{\text{para ser cubo}} 5^3 = 5 \times$ [redacted]

$3^2 \xrightarrow[\text{le falta } (3)]{\text{para ser cubo}} 3^3 = 3^2 \times \boxed{3}$

Por lo tanto hay que multiplicarlo por lo que le falta, es decir, por además para que siga siendo un cubo se le puede multiplicar adicionalmente por un cubo (1^3 ; 2^3 ; 3^3; etc.); pero como se nos pide que sea mínimo, no lo haremos.

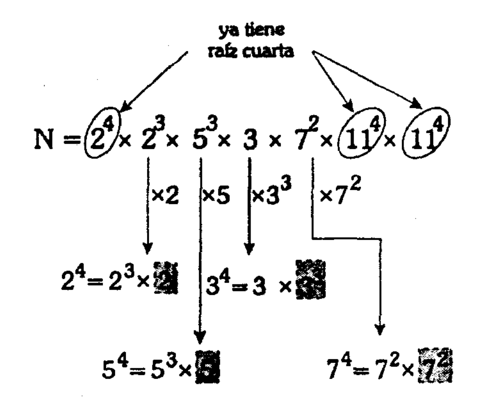
$\therefore$ Se le debe multiplicar por $3 \times 5^2 = 75$

PROBLEMA 40

¿Por cuánto se le debe multiplicar a N para que tenga raíz cuarta exacta? (Da como respuesta el menor posible).

$N = 2^7 \times 5^3 \times 3 \times 7^2 \times 11^8$

Resolución:



$\therefore$ Se le debe multiplicar por $2 \times 5 \times 3^3 \times 7^2$

$= 13230$

Ejercicios Propuestos

1. Se sabe que $a - b = b - c = c - d = \sqrt[5]{5}$

Calcule el valor de:

$$A = \frac{(a-c)^{10} + (a-b)^{10} - (c-a)^{10} + (b-c)^{5}}{(c-a)^{10} - (a-c)^{10} + (b-c)^{5}}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) $\sqrt{5}$

2. Halle:

$$E = \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1}$$

si: $16^{3^{2x}} = 8^{4^{2x}}$

A) 1 B) 2 C) ½
D) 0 E) 4

3. Si $a + b + c = 0$; $a \neq b \neq c$

Halle:

$$M = \frac{3(a+b)(a+c)(b+c)+3abc}{a^5+b^5+c^5+a^9+b^9+c^9}$$

A) 1 B) 6 C) 2
D) 0 E) ½

4. Halle $2x-5$ si:

$0,\underbrace{00\ldots0}_{23\text{ ceros}}01234 = 1234 \times 10^{x}$

A) 48 B) 30 C) –59
D) 43 E) –40

5. ¿A qué es igual $3x+2$? si:

$$\sqrt[\sqrt{x}]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \sqrt[9]{9}$$

A) 9 B) 29 C) 30
D) 81 E) 25

6. Resuelve: $\dfrac{2^{x+1} - 3^{x+1}}{3^{x}} = 1{,}5$

Indique el valor de $E = -x^2 + 2x - 5$

A) –8 B) 5 C) –13
D) –9 E) 13

7. Si:

$$\underbrace{b^{320} + b^{320} + b^{320} + \ldots + b^{320}}_{81\text{ veces}} = 81^{81}$$

Halle: $E = (b-1)^{(b-1)^{(b-1)}}$

A) 8 B) 16 C) 32
D) 4 E) 3

8. Simplifique:

$$E = (\underbrace{3^n\times3^n\times3^n\times\ldots\times3^n}_{n\text{ factores}}) \times (\underbrace{2^n\times2^n\times2^n\times\ldots\times2^n}_{n\text{ factores}})$$

A) 5^{2n} B) 6^{n^2} C) $5n$
D) 7^{n^2} E) $6n^2$

9. Calcule x en:

$$\sqrt[33]{3}\,.\,\sqrt[3]{33}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[33]{33} = \sqrt[11]{x^4}$$

A) 3 B) 33 C) 99
D) 11 E) 39

10. Resuelve:

$$A = \left[\frac{(1984)(2016) + 256}{(959)(1041) + 1681}\right]^5$$

A) 32 B) 64 C) 128
D) 256 E) 1024

11. Si $\overline{KENAR} \times 99999 = \overline{\ldots 12345}$,
Halle: (K+A+R+E+N)

A) 28 B) 29 C) 30
D) 31 E) 40

12. Si $x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0$

Halle y

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) todas las anteriores

13. Si $x^2 = 3x - 1$, halle $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

A) 27 B) 9 C) 18
D) 24 E) 21

14. Halle el valor de x para que verifique:

$$\sqrt[3]{14 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{14 - \sqrt{x}} = 4$$

De como respuesta $x - 5$

A) 11 B) 44 C) 95
D) 76 E) 164

15. Si $x^2 + y^2 = 20$
Calcule $K = (x+y)^2 + (x-y)^2$

A) 20 B) 40 C) 30
D) 50 E) $\sqrt{20}$

16. Un matemático tiene 3 números; luego los suma de 2 en 2 y obtiene otros tres números que son 13, 17 y 24. Halle el mayor de los tres.

A) 3 B) 15 C) 14
D) 16 E) 10

17. Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{c}$ y $a \times b \times c = 27$

Calcule el valor de

$$K = a + b + c$$

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 18

18. Efectúe $E = \dfrac{(12345)^2 - (12343)^2}{10^4 + 2344}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

19. Simplifique

$$S = \left[\sqrt{a+\sqrt{b}} \times \sqrt{a-\sqrt{b}}\right] \times \left[\sqrt{a^2-b}\right] + b$$

A) a B) a^2 C) a/2
D) 2b E) 2a

20. Si (+)(+) = (–)(–),
calcule el valor de:

$$A = \left[\frac{ENERO}{ERA} + \frac{DINERO}{DIRA} + \frac{MASA}{AMENOS}\right]^5$$

A) 81 B) 64 C) 246
D) 0 E) 243

21. Si $\sqrt{-1} = i$, calcule el valor de:

$A = [(1-i)^{108} - (1+i)^{108}]^{1996}$

A) 1 B) $2(2^{28})$ C) 0
D) 2^{54} E) -2^{5994}

22. Si $\left(\dfrac{x}{y}\right)^a + \left(\dfrac{y}{x}\right)^a = 731$,

calcule $L = \sqrt[3]{\dfrac{x^a - y^a}{\sqrt{x^a y^a}}}$

A) ± 2 B) ± 3 C) 7
D) ± 11 E) 9

23. Halle K en:

$$\left(\sqrt[k+1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[k-1]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right) = \sqrt[48]{(5+\sqrt{24})^7}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

24. Halle la suma de cifras de R:

$R = (10^{30} + 1)(10^{30} - 1)$

A) 630 B) 540 C) 360
D) 270 E) 300

25. Si 3 = 1,

calcule el valor de:

$$A = \frac{3 + 3 + 3 + \ldots (8k + 10 \text{ veces})}{3 + 3 + 3 + \ldots (18k + 1 \text{ veces})}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Si $x^y = y^x$; x e $y \in Z^+$, $x \neq y$,

calcule: $(y-x)^{(x+y)}$

A) 2 B) 4 C) 16
D) 32 E) 64

27. Calcule la suma de cifras del resultado de E

$E = \sqrt{1 \times 3 \times 5 \times 17 \times 257 + 1}$

A) 6 B) 12 C) 10
D) 16 E) 13

28. Calcule la suma de cifras del resultado de

$$A = \frac{13}{15} + \frac{1313}{1515} + \frac{131313}{151515} + \ldots\ldots + \frac{\overbrace{1313\ldots13}^{60 \text{ cifras}}}{\underbrace{1515\ldots15}_{60 \text{ cifras}}}$$

A) 6 B) 7 C) 9
D) 8 E) 10

29. Calcule el valor de x^2+1 si:

$2(5x^2 + 15) + \sqrt{5(6+2x^2)} = 420$

A) 35 B) 36 C) 37
D) 38 E) 39

30. Si $x^{x^{x^7}} = 7$.

Calcule el valor de :

$$A = x^7 + x^{x^{x^7}} + x^{x^{x^{x^7}}} + \ldots\ldots + \underbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^7}}}}}}}_{n \text{ veces}}$$

A) n B) n^7 C) 7n
D) 49n E) 14n

31. Si $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$

Halle : $\dfrac{x}{x-4}$

A) 0　　B) 1　　C) 3/2
D) 2　　E) A ó C

32. Calcule la suma de las cifras de N, luego de efectuar:

$$N = 22 \times 202 \times 20002 \times 100000001$$

A) 128　　B) 140　　C) 150
D) 138　　E) 100

33. Halle la suma de cifras del resultado de:

$$M = (5555556)^2 - (4444445)^2$$

A) 14　　B) 12　　C) 21
D) 20　　E) 28

34. Calcule:

$$R=\sqrt[3]{\frac{(323\times325+1)\times9\times111}{18^4\times37}}$$

A) 1　　B) 2　　C) 3
D) 4　　E) 5

35. Halle el resultado de :

$C=2,52(0,16)^2+(0,16)^3 \quad +(0,84)^2 \quad \times$
$(0,48)+(0,84)^3$

A) 5,25　　B) 1　　C) 3,87
D) 1,03　　E) 2

36. Si $2^x = 8^{y+1}$

$9^y = 3^{x-9}$

Halle $x + y$

A) 21　　B) 6　　C) 27
D) 18　　E) 35

37. Si $m - 3n = 4p$, calcule $E = \dfrac{p+n}{m-p}$

A) 1　　B) 1/3　　C) 3
D) 1/12　　E) 1/4

38. Si $x - y = 3$, además $xy = -2$, calcule

$$E = x^4 + y^4$$

A) 10　　B) 15　　C) 23
D) 13　　E) 17

39. Si $3a + 2b + c = 0$, halle

$$E = \left(\frac{a+c}{a+b}\right)^{\left(\frac{b-c}{a+b}\right)}$$

A) 8　　B) 4　　C) – 8
D) – 4　　E) 6

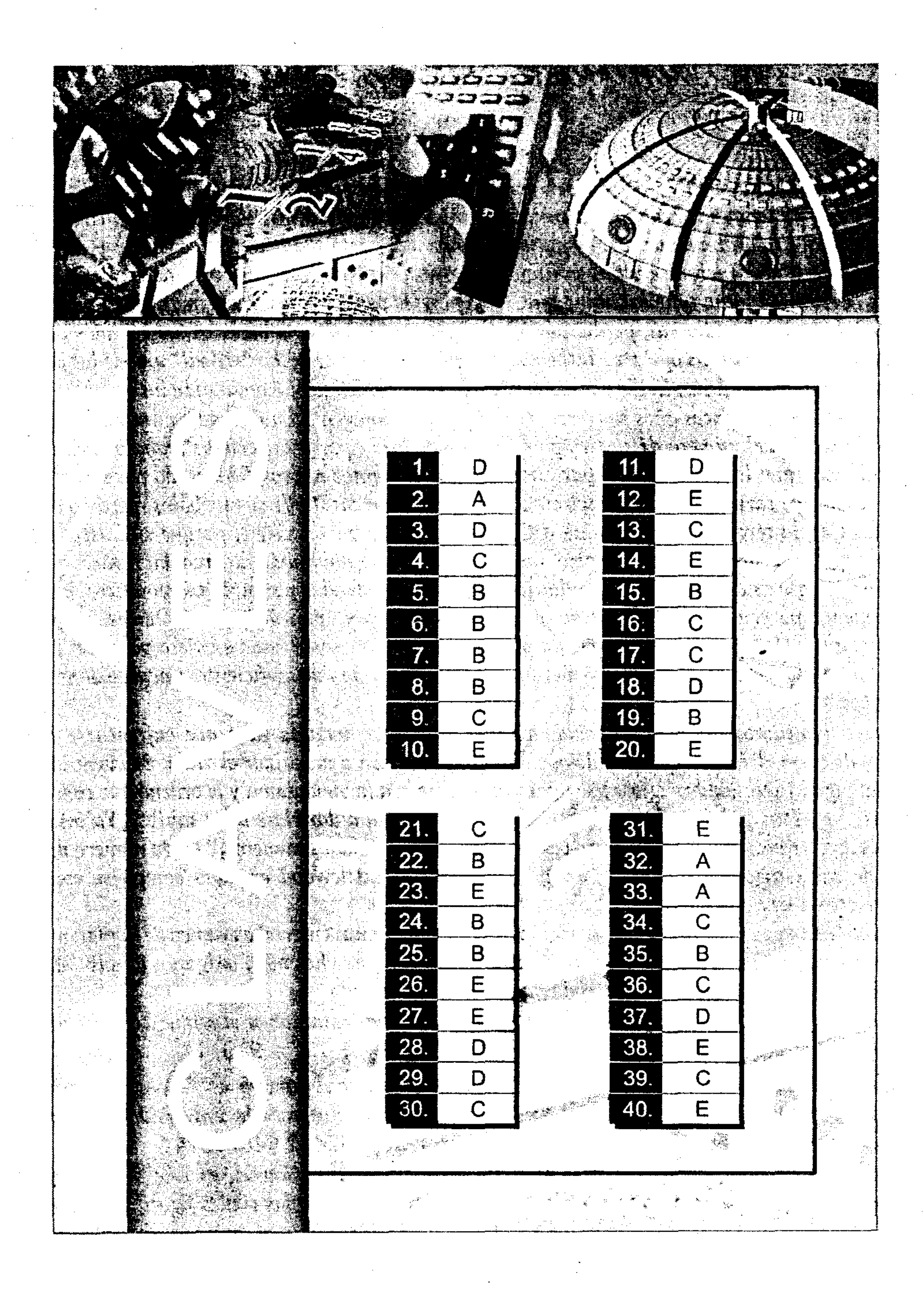
40. Si $xy = z$

$yz = x$

$zx = y$

Calcule $E = \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{xyz}$

A) 2　　B) 3　　C) 4
D) 5　　E) 6



CLAVES

1.	D	11.	D
2.	A	12.	E
3.	D	13.	C
4.	C	14.	E
5.	B	15.	B
6.	B	16.	C
7.	B	17.	C
8.	B	18.	D
9.	C	19.	B
10.	E	20.	E

21.	C	31.	E
22.	B	32.	A
23.	E	33.	A
24.	B	34.	C
25.	B	35.	B
26.	E	36.	C
27.	E	37.	D
28.	D	38.	E
29.	D	39.	C
30.	C	40.	E

Srinivasa Ramanuján

Nació en la India (1 887 – 1 920), en una familia muy pobre, pero de casta muy alta. Tan pobre era que no tenía para comprar papel, inventaba sus matemáticas escribiendo con tiza en una pizarra. Era brahmán de casta y matemático de más casta todavía. Sus asombrosas aptitudes para los números que fueron servidas por una memoria fantástica, se pusieron de relieve desde su infancia. Pero en la India colonial había que hablar inglés para progresar y Ramanuján, que carecía de la facilidad para los idiomas, perdió por ello la oportunidad de una beca. A los 15 años cayó en sus manos un libro Synopsis of Pure Mathematics y empezó con este hecho "trivial" una de las odiseas del pensamiento matemático. El libro no contenía demostraciones, pero Ramanuján las encontró todas por su cuenta. Así, en pocos años convertido en la perfecta imagen del autodidacta, reconstruyó gran parte de la teoría del número de su tiempo que fue elaborada por gentes cuyos trabajos desconocía completamente, aun le sobró ingenio para hacer descubrimientos nuevos. Alentado por sus amigos, escribió un par de cartas, a matemáticos europeos, que daban cuenta de sus trabajos, pero no obtuvo respuesta. Con la tercera carta, dirigida a G. H. Hardy, tuvo más suerte, porque su ilustre colega inglés se quedó de una pieza al repasar las fórmulas que Ramanuján le enviaba para que las examinase. Algunas de ellas eran fórmulas famosas ya demostradas por otros matemáticos, otra era singularmente parecida a una fórmula del propio Hardy y, por último, un tercer grupo era desconcertante. Hardy confesó: "Nunca, antes de ahora, había visto nada siquiera parecido a ellas. Deben ser ciertas, porque, si no lo fueran, nadie habría tenido suficiente imaginación para inventarlas."

Becado inmediatamente para trasladarse a Cambrigde, todavía tuvo que enfrentarse con la oposición de su madre, que, por prejuicios de casta, se negaba a autorizar el viaje. Se cuenta que la diosa Namagiri (divinidad religiosa) se apareció en sueños a la vieja dama y le ordenó que concediese el permiso, profetizándole, además, que Ramanuján llegaría a dar clase a los sahibs. Ya instalado en Cambridge, Ramanujan se dedicó en cuerpo y alma a sus amados números. "Cada número natural es uno de sus amigos personales", decía su compañero Littlewood en cuyo campo se convirtió rápidamente en una autoridad mundial.

Durante su corta vida (32 años) escribió unos 3000 teoremas en muchas ramas de la matemática: teoría de números, funciones elípticas, fracciones continuas y muchos más. Algunos de sus teoremas son extraños, dice su colega Hardy y todavía se están estudiando.

Una de sus anécdotas es el haber descompuesto en forma instantánea el número 1 729 como la suma de 2 cubos perfectos en 2 formas distintas: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$

Una de sus hazañas numéricas fue el haber conjeturado que el número $e^{\pi\sqrt{163}}$*, compuesto por 3 irracionales, era un número entero. En 1 974 en las computadoras de la universidad de Arizona (E.U.A.) se comprobó que efectivamente era el número 262537412 640768744.*

Ramanuján hacía cómputos mentales de una facilidad extraordinaria, en una de sus libretas, encontrada en 1 976, aparecen miles de fórmulas matemáticas entre las cuales figura la siguiente:

$$\frac{1}{n} = 2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n\,(1)_n\,n!}\left(1103 + 26390_n\left(\frac{1}{99}\right)^{4n+2}\right)$$

PLANTEO DE ECUACIONES

Las ecuaciones constituyen un constante planteo de los problemas diarios, aunque prestan su mayor utilidad en la resolución de complejas interrogantes relacionadas con la ciencia y con la técnica.

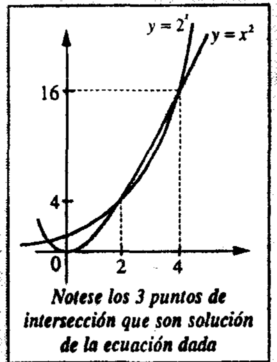
Lectura 5

¿Cuáles son las raíces de la ecuación $2^x = x^2$?

Dos de esas raíces son evidentes: $x = 2$ y $x = 4$. Más trazando los gráficos de las funciones $y = 2^x$ y $y = x^2$, constatamos que hay una raíz negativa, como se ve en la figura de la derecha. Nos preguntamos:

1° ¿Es tal raíz un número racional o irracional?

2° ¿Es posible obtenerla por un proceso puramente algebraico?



Notese los 3 puntos de intersección que son solución de la ecuación dada

Estamos condicionados a preferir métodos "algebraicos", fórmulas tales como la de la ecuación de 2° grado, o artificios específicos para cada ecuación que enfrentamos. Al adoptar este punto de vista, no obstante, estamos olvidando dos ¿cosas?; cambiar 2 aspectos:

a) Una "fórmula cerrada", como la que existe para ecuaciones de 2°, 3° y 4° grado, es muchas veces una victoria ilusoria; ni siquiera nos da una idea del orden de la magnitud de las soluciones;

b) Todo proceso de resolución de una ecuación recae, tarde o temprano, en un cálculo numérico que dará el resultado final, con las aproximaciones deseadas:

En el caso en cuestión, la raíz negativa de la ecuación $2^x = x^2$ puede ser obtenida, de modo simple, por el método de las aproximaciones deseadas.

El resultado es $x = -07666646959$, con 10 cifras decimales exactas. Ahora abordemos las preguntas. La primera respuesta es negativa, esto es, la raíz negativa de la ecuación propuesta es un número irracional. Esto se prueba por reducción al absurdo.

Supongamos que p/q fuese una fracción irreducible positiva tal que $2^{-p/q} = (-p/q)^2$ Eliminando denominadores y elevando ambos miembros a la potencia q, tendríamos entonces $2^p \cdot p^{2q} = q^{2q}$

Ahora bien, si p es impar, el primer miembro de esta última igualdad es un entero que contiene un número impar de factores iguales a 2, mientras que el segundo miembro contiene un número par (tal vez cero) de factores 2. Si, al contrario, p es par entonces q será impar; luego el primer miembro es divisible por 2, mas el segundo no lo es. De cualquier manera, se tiene la contradicción: no existe número racional $r = p/q$ tal que $2^{-r} = (-r)^2$, donde $r > 0$

La segunda pregunta equivale a indagar si nuestra solución negativa es un número algebraico. Recordemos que un número (real o complejo) se llama algebraico cuando es raíz de alguna ecuación del tipo p (x) = 0, donde p (x) es un polinomio con coeficiente enteros.

Por ejemplo, todo número que se obtiene a partir de números racionales, sometiéndolos a un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces (de cualquier índice) es algebraico.

Un número que no es algebraico se llama trascendente. Por ejemplo, π y e son números trascendentes.

La respuesta a la segunda pregunta también es NO. La raíz negativa de la ecuación $2^x = x^2$ no puede ser obtenida por métodos puramente algebraicos, porque es un número trascendente.

FUENTE : Mi profesor de matemática Elon Lages Lima

PLANTEO DE ECUACIONES

Objetivos

1. *Revisar los principios básicos para la resolución, principalmente, de ecuaciones de primero y segundo grado con una incógnita y la resolución de sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas.*
2. *Ejercitar la capacidad de comprensión de textos (enunciados de los problemas) de diversa índole para su posterior simbolización.*
3. *Desarrollar la capacidad de abstracción para representar y relacionar simbólicamente los datos de un problema con las variables elegidas para las incógnitas.*
4. *Comprender y asimilar de manera adecuada la solución de los problemas planteados.*
5. *Relacionar e interpretar matemáticamente hechos cotidianos.*

Introducción

En el transcurso de la vida diaria, podemos observar la relación que existe entre la matemática y la realidad... ¿Cómo "traducir" una situación real que involucre el aspecto matemático al lenguaje propio de la matemática? Esto no es sencillo, requiere de una gran capacidad de observación y abstracción.

Ciertos problemas reales pueden ser traducidos al lenguaje algebraico mediante una expresión numérica llamada ecuación en la que una o más cantidades son desconocidas. Para encontrar dichas cantidades debemos ejercitarnos previamente en diferentes cuestiones básicas, y una de ellas es desarrollar la capacidad de abstracción cuantitativa, es decir la capacidad para representar simbólicamente las cantidades y las relaciones existentes entre ellas.

El meollo del asunto, sin embargo, es la dificultad que un estudiante encuentra al momento de enfrentar un problema enunciado en forma de texto, cuya solución requiere ineluctablemente la transformación de aquello que está en forma verbal a la forma matemática cuyo lenguaje es simbólico. No es tarea sencilla pero puede serlo si ponemos en su realización voluntad y constancia.

"Estamos convencidos que la capacidad de plantear y resolver una ecuación refleja, en buena parte, el nivel que ha alcanzado un estudiante en el estudio del álgebra. Más que la asimilación de reglas y procedimientos algorítmicos, requiere tener una comprensión de las operaciones elementales con expresiones algebraicas y una iniciativa para emprender un procedimiento de resolución creativo y óptimo.

La ecuación, que es la parte sustantiva de las matemáticas, tiene el mayor número de aplicaciones como herramienta de resolución de problemas".

NOCIONES PREVIAS

Antes de entrar al tema de planteo de ecuaciones daremos algunos alcances teóricos.

¿Qué es una identidad?

Es una igualdad absoluta que se verifica para todo valor que asuman las variables involucradas.

Ejemplo: $\underbrace{(a+b)^2}_{} = \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{}$

Si $a = 1$; $b = 2$ $\Rightarrow$ 9 9

Si $a = 2$; $b = 2$ $\Rightarrow$ 16 16

Si $a = 3$; $b = -1$ $\Rightarrow$ 4 4

¿Qué es una ecuación?

Es una relación de igualdad que se establece entre dos expresiones algebraicas que tienen como mínimo una variable. Esta igualdad puede verificarse o no y si es que se verifica, esto ocurre para un valor de su variable o un determinado conjunto de valores asignados a sus variables. Además a las variables que intervienen en una ecuación se les denomina incógnitas y a los valores que satisfacen la igualdad se llaman soluciones de la ecuación. Así:

Se suele decir también que una ecuación es un enunciado abierto o igualdad relativa. De acuerdo a esto, se tiene:

Ejemplo: $3x + 12 = 42$

Para $x = 8$; $3(8) + 12 = 36$

Para $x = 9$; $3(9) + 12 = 39$

Para $x = 10$; $3(10)+12 = 42$

Para $x = 11$; $3(11) + 12 = 45$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Luego el único valor que verifica la igualdad es $x = 10$

Dadas 2 expresiones algebraicas relacionadas de la siguiente manera:

$$\text{M}\underbrace{(x; y; z; .....)}_{\text{1er. miembro}} = \text{N}\underbrace{(x; y; z; .....)}_{\text{2do. miembro}}$$

donde M y N son expresiones matemáticas.

Ahora, transponiendo términos podemos llegar a lo siguiente:

$$\underbrace{\text{M}(x; y; z; .....) - \text{N}(x; y; z; .....)}_{\text{F}(x;\, y;\, z;\, ...) = 0} = 0$$

Forma general de una ecuación

Dependiendo de F(x) una ecuación puede ser:

- $x^3 - 5x^2 + 3 = 0$ Ecuación polinomial
- $\frac{5}{x} + \frac{1}{x-2} = 0$ Ecuación fraccionaria
- $\sqrt{x-3} - x = 0$ Ecuación irracional

} Ecuaciones algebraicas

- $2^x - 4x + 1 = 0$ Ecuación exponencial
- $\text{Log}x - x^3 = 0$ Ecuación logarítmica
- $\text{sen}x - \frac{1}{3} = 0$ Ecuación trigonométrica

} Ecuaciones trascendentes

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es aquel valor que admite la incógnita de una ecuación y verifica la igualdad.

Ejemplo: $x^3 = x$

Si: $x = 0 \Rightarrow 0^3 = 0$ (V)
Si: $x = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$ (V)
Si: $x = -1 \Rightarrow (-1)^3 = -1$ (V)
Si: $x = 2 \Rightarrow 2^3 = 2$ (F)

Vemos que 0, 1, −1 son soluciones de dicha ecuación.

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN (C.S.)

Es la reunión de todas las soluciones particulares que presenta la ecuación:

Ejemplo: $(x-3)^5(x+5)(x-7)^8 = 0$

vemos que las soluciones son: 3; −5; 7; entonces su C. S. = {−5; 3; 7}

Para determinar el conjunto solución de una ecuación se utiliza el siguiente teorema:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor b = 0$$

Ejemplo: $(x-3)(x+2)(x-5) = 0$

Resolución:

$$x-3=0 \lor x+2=0 \lor x-5=0$$
$$x=3 \lor x=-2 \lor x=5$$

Entonces: C. S.= {−2; 3; 5}

No debes olvidar que resolver una ecuación significa determinar el conjunto solución.

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES SEGÚN SUS SOLUCIONES

De acuerdo a ello pueden ser compatibles o incompatibles.

Ecuación compatible

Es aquella que tiene al menos un elemento en su conjunto solución. Se subdivide en:

- Ecuación compatible determinada.
- Ecuación compatible indeterminada.

Ecuación compatible determinada

Es aquella que tiene un número limitado de elementos en su conjunto solución.

Ejemplo:

$(x-3)(x+5)(x-7) = 0$
C. S. = {−5; 3; 7}

Ecuación compatible indeterminada

Es aquella que tiene un número ilimitado de elementos en su conjunto solución.

Ejemplo:

$$2(x-3) = 2x - 6$$

Esta igualdad cumple para cualquier valor numérico que se le asigne a la variable ***x***

Ecuación Incompatible

Es aquella que no tiene ningún elemento en su conjunto solución, es decir no existe valor numérico que asignado a la variable verifique la igualdad.

Ejemplos:

- $0x = 5$
- $\frac{5}{x-3} + x = 3 + \frac{5}{x-3}$
- $\frac{1}{x-3} = 0$

Observación:

De acuerdo a lo expuesto haremos un estudio de la ecuación: $ax = b$

Dada la ecuación: $\boxed{ax = b}$

donde:

x : incógnita

a; b : parámetros

podemos indicar que:

A. La ecuación será compatible determinada si: $\boxed{a \neq 0}$.

B. La ecuación es compatible indeterminada, si: $\boxed{a = 0 \wedge b = 0}$.

C. La ecuación es incompatible, si: $\boxed{a = 0 \wedge b \neq 0}$.

Ejemplo:

Determine las condiciones que debe cumplir el parámetro real **a** para que la ecuación en x:

$$a^2x - a^2 = 3ax - 5a - 2x + 6$$

Sea:

I. Compatible determinada.

II. Compatible indeterminada.

III. Incompatible.

Resolución:

Transponiendo términos tendremos:

$$a^2x - 3ax + 2x = a^2 - 5a + 6$$

Factorizando: $x(a^2-3a+2) = a^2-5a+6$

Despejando : $x = \dfrac{(a-3)(a-2)}{(a-1)(a-2)} \Rightarrow x = \dfrac{a-3}{a-1}$

Ahora pasemos a determinar las condiciones que debe cumplir el parámetro real **a** para cada caso:

I. Para que la ecuación sea compatible determinada deberá ocurrir:

$$a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$$

II. Para que la ecuación sea compatible indeterminada se tendrá:

$$a - 1 = 0 \wedge a - 3 = 0$$
$$a = 1 \wedge a = 3$$

III. Para que la ecuación sea incompatible:

$$a - 1 = 0 \wedge a - 3 \neq 0$$
$$a = 1 \wedge a \neq 3$$

ECUACIONES LINEALES

Se denomina ecuación lineal a la ecuación polinomial de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0} \quad ; \quad a \neq 0$$

donde: C.S. $= \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Ejemplos:

- $3x - 9 = 0 \Rightarrow$ C.S. $= \{3\}$
- $5x - 7 = 0 \Rightarrow$ C.S. $= \left\{\dfrac{7}{5}\right\}$

EJERCICIO 1

Halle x en: $2x + 10 = x + 30$

Resolución:

$$2x + 10 = x + 30$$

$$2x - x = 30 - 10$$
$$x = 20$$

EJERCICIO 2

Calcule x en:

$$\frac{x}{3} + 10 = x + \frac{20}{3}$$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros por 3:

$$3\left(\frac{x}{3} + 10\right) = 3\left(x + \frac{20}{3}\right)$$

$$x + 30 = 3x + 20$$

$$10 = 2x$$

$$x = 5$$

EJERCICIO 3

Halle x en:

$$2x - [-2x - 2 + 10] = 2(10 - x) + x$$

Resolución:

$$2x + 2x + 2 - 10 = 20 - 2x + x$$

$$4x - 8 = 20 - x$$

$$4x + x = 20 + 8$$

$$5x = 28$$

$$\therefore \quad x = \frac{28}{5}$$

EJERCICIO 4

Calcule x en:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros por 6:

$$6\left(\frac{x+1}{2} + \frac{x}{3}\right) = 6\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$3(x+1) + 2x = 3x + 1$$

$$\cancel{3x} + 3 + 2x = \cancel{3x} + 1$$

$$2x = 1 - 3$$

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\therefore \ x = -1$$

EJERCICIO 5

Calcule el valor de **a** en:

$$\frac{a+m}{m} + \frac{a+n}{n} = 1$$

Resolución:

Multiplicando en aspa:

$$\frac{n(a+m) + m(a+n)}{mn} = 1$$

$$na + \cancel{nm} + ma + mn = \cancel{mn}$$

$$na + ma = -mn$$

$$a(n+m) = -mn$$

$$a = \frac{-mn}{n+m}$$

$$\therefore \ a = -\frac{mn}{n+m}$$

EJERCICIO 6

Halle x en:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9$$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros por 84:

$$84x = 84\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9\right)$$

$$84x = 14x + 7x + 12x + 42x + 9 \times 84$$

$$84x = 75x + 9 \times 84$$

$$\cancel{9}x = \cancel{9} \times 84 \Rightarrow x = 84$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Se denomina ecuación cuadrática a la ecuación polinomial de la forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0};\ a \neq 0$$

Ejemplo 1

Resuelva: $x^2 - 7x - 8 = 0$

Resolución:

Factorizando (aspa simple)

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\begin{matrix} x & \diagdown\!\!\!\diagup & -8 \\ x & & 1 \end{matrix}$$

$$(x-8)(x+1) = 0$$

de donde C. S. = {-1; 8}

Ejemplo 2

Resuelva:

$$x^2 . \sqrt{2}x - \sqrt{3}x + \sqrt{6} = 0$$

Resolución:

$$x^2 \underbrace{- \sqrt{2}x - \sqrt{3}x}\, + \sqrt{6} = 0$$

$$\begin{matrix} x & \diagdown\!\!\!\diagup & -\sqrt{3} \\ x & & -\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2}) = 0$$

de donde C. S. = $\{\sqrt{3};\ \sqrt{2}\}$

Fórmula General

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0};\ a \neq 0$$

Multiplicando por (4a):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sumando y restando b^2:

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2} - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

Despejando:

$$\boxed{x_{(1;2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fórmula general para resolver una ecuación cuadrática

donde: $b^2 - 4ac$ es el discriminante, además

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación.

Ejemplo 3

Resuelva aplicando la fórmula general:

$$4x^2 - 5x - 51 = 0$$

Resolución:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(-51)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{841}}{8} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 29}{8}$$

Luego, se obtiene las siguientes respuestas:

$$x_1 = \frac{5 + 29}{8} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$$

$$x_2 = \frac{5 - 29}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

EJERCICIO 1

Halle el menor valor de x

$$x^2 + 10 = 3x + 28$$

Resolución:

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

Aplicando aspa simple:

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} x & \diagdown\!\!\!\diagup & -6 \\ x & & +3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 6 \\ x = -3 \end{matrix}$$

∴ El menor valor es $x = -3$

EJERCICIO 2

Halle el mayor valor de x

$$x+\frac{14}{x}=9$$

Resolución:

Multiplicando en aspa.

$$\frac{x^2+14}{x}=9$$

$$x^2+14=9x$$

$$x^2-9x+14=0$$

$$\left\{\begin{matrix} x & -7 \\ x & -2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x=7 \\ x=2 \end{matrix}$$

$\therefore$ El mayor valor es $x=7$

EJERCICIO 3

Halle x en:

$$x(3x+4)=15$$

Resolución:

$$3x^2+4x=15$$

$$3x^2+4x-15=0$$

$$\left\{\begin{matrix} 3x & 5 \\ x & -3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x=5/3 \\ x=-3 \end{matrix}$$

$\therefore$ C.S. $=\{-3\,;5/3\}$

EJERCICIO 4

Halle x en:

$$x^2-(m+n)x+mn=0$$

Resolución:

Por aspa simple:

$$x-(m+n)x+mn=0$$

$$\left\{\begin{matrix} x & -m \\ x & -n \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x=m \\ x=n \end{matrix}$$

$\therefore$ C.S $=\{m\,;n\}$

EJERCICIO 5

Halle x^2 en:

$$\frac{3}{x}+\frac{x}{3}+3x=x\ ;\ x\in\mathbb{C}$$

Resolución:

Multiplicando todo por $3x$

$$(3x)\left(\frac{3}{x}+\frac{x}{3}+3x\right)=(x)(3x)$$

$$9+x^2+9x^2=3x^2$$

$7x^2=-9 \Rightarrow x^2=-\frac{9}{7}$ (el cuadrado de un número real es positivo $\rightarrow x\in\mathbb{C}$)

SISTEMA DE ECUACIONES

Se denomina sistema de ecuaciones al conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende obtener en caso que existan.

La solución del sistema de ecuaciones es todo conjunto de valores de las incógnitas que verifican a la vez todas las ecuaciones del sistema. Resolver el sistema es precisamente encontrar su solución o demostrar que es INCOMPATIBLE o ABSURDO.

Por ejemplo, el sistema.

$x+2y=4$ (1)

$2x+4y=5$ (2)

es incompatible porque al multiplicar por 2 la primera ecuación resulta $2x+4y=8$ lo que contradice a la segunda ecuación.

Si el sistema tiene al menos una solución se dice que es COMPATIBLE, y a su vez puede ser:

DETERMINADA

Si tiene un número limitado de soluciones.

Por ejemplo el sistema:

$x+y=10$

$x-y=2$

es compatible y determinado, puesto que su solución es: $x=6$ é $y=4$

INDETERMINADA

Si tiene un número ilimitado de soluciones. Por ejemplo, el sistema:

$x + y + z = 2$ (1)

$2x + 2y + 2 = 5$ (2)

es compatible e indeterminado, porque admite un número ilimitado de soluciones como:

$x = 0$; $y = 3$; $z = -1$

$x = 1$; $y = 2$; $z = 1$

⋮ ⋮ ⋮

Observación:

1. Cuando un sistema de ecuaciones tiene solución, se dice que sus ecuaciones son simultáneas, indicando con ello que los valores de las incógnitas deben verificar simultáneamente todas las ecuaciones del sistema.
2. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones del sistema, generalmente, el sistema es indeterminado.
   Si las ecuaciones del sistema son de primer grado, el sistema se llama lineal; si al menos una de las ecuaciones es de segundo grado, se llama cuadrático, etc.

Seguramente recordarás que hay diversas formas de resolver un sistema de ecuaciones. Por ejemplo:

- Método de reducción o de Gauss.
- Método de sustitución.
- Método de igualación.
- Método de determinante.

Vamos a resolver, a continuación, algunos ejercicios empleando indistintamente los tres primeros métodos y daremos al final de los ejercicios un breve alcance acerca del cuarto método.

EJERCICIO 1

Si: $x + y = 28$

$y + z = 12$

Halle $x - z$

Resolución:

Restando las 2 ecuaciones:

$$-\begin{pmatrix} x + y = 28 \\ y + z = 12 \end{pmatrix}-$$

$$\therefore\ x - z = 16$$

EJERCICIO 2

Si: $2x + y = 26$

$x - y = 10$

Halle $x.y$

Resolución:

Sumando las dos ecuaciones:

$$+\begin{pmatrix} 2x + y = 26 \\ x - y = 10 \end{pmatrix}+$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$12 - y = 10$

$y = 2$ $\Rightarrow$ $x\,y = 12\times 2 = 24$

$$\therefore\ xy = 24$$

EJERCICIO 3

Si: $x^2 - y^2 = 12$

$x - y = 2$

Hallar el valor de x.

Resolución:

$$x^2 - y^2 = (x + y)\underbrace{(x - y)}_{2} = 12$$

$$\Rightarrow x + y = 6$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{pmatrix}+$$

$$2x = 8$$

$$\therefore\ x = 4$$

Ejercicios Propuestos

I. Halle el valor de *x* en cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} - 1$

2. $4x + \frac{1}{a} = 2 + \frac{x}{a}$

3. $\frac{xb - a}{a} = \frac{xa - b}{b}$

4. $(m + x)[n - m] = 1$

5. $x - [m(-n + 1)] + 1 = mx$

6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} = 10$

II. Despeje *x* en cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1. $30x^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$

2. $\frac{x(x-1)}{2} = 66$

3. $x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2$

4. $\frac{(100-x)20}{3x} = \frac{15x}{100-x}$

5. $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2$

III. Resuelva los siguientes sistemas de ecuación:

1. $3x + y = 8$
$x - y = 4$

2. $8x + 7y = 22$
$7x - 8y = \frac{50}{7}$

3. $\sqrt{x + y} = 6$
$\sqrt{x - y} = 2$

4. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$
$2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} = 12$

5. Si: $\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b} = 2$
$\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b} = 6$

6. $a + b = 10$
$b + c = 12$
$a + c = 8$

7. $x + y + z = 12$
$x - y + z = 8$
$z = 4$

8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$

IV. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método de Crámer:

1. $4x + 3y = -2$
   $3x + 4y = -5$

2. $3a + 4b = 10$
   $2a + 6b = 10$

3. $2x + y = 14$
   $3x - 2y = 7$

4. $3m + 2n + 2p = -1$
   $4m - n + p = -3$
   $2m + n + 4p = 2$

5. $3x + 3y + z = 2$
   $4x + 2y = -2$
   $5x + y + z = -2$

V. Resuelva para valores enteros (Dé la solución general)

1. $49x + 99y = 1034$

2. $33x + 32y = 553$

3. $18x + 17y = 55$

4. $3x + 7y = 83$

5. $9x + 5y = 101$

EL ARTE DE PLANTEAR UNA ECUACIÓN

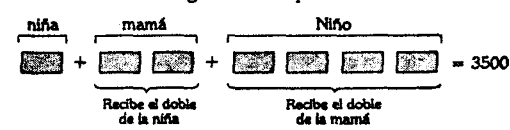
Un problema muy remoto que se solían plantear los juristas romanos decía:

"Una viuda estaba obligada a repartirse con el hijo que debía nacer una herencia de 3500 monedas que le dejó su marido. Si nacía una niña, la madre, de acuerdo con las leyes romanas, debería recibir el doble de la hija. Si nacía un niño, la madre recibía la mitad de la parte del hijo. Pero ¡nacieron mellizos: un niño y una niña!"

¿Cómo hay que dividir la herencia para cumplir con las condiciones impuestas por dicha ley?

Resolución:

Observemos el siguiente esquema:



Entonces dividiendo 3500 entre 7 partes nos resulta a S/.500 cada parte.

∴ El reparto debe efectuarse del siguiente modo

⇒ niña → S/. 500
mamá → S/. 1 000
niño → S/. 2 000

Como podemos observar, para resolver el problema, luego de interpretar adecuadamente el texto, hemos ido transformando las condiciones en una igualdad que bien pudo haberse incluido variables para originar una ecuación.

$$\underbrace{x}_{\text{niña}} + \underbrace{2x}_{\text{mamá}} + \underbrace{4x}_{\text{niño}} = 3500$$

$$7x = 3500 \quad \therefore \; x = 500$$

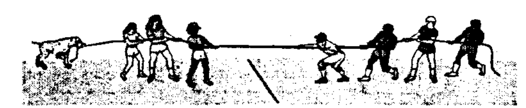
Veamos otro caso:

El Combate de Tirar de una Cuerda

I. Cuatro jóvenes jalan la soga tan fuerte como cinco señoritas.

II. Dos señoritas y un joven jalan la soga tan fuerte como un perro

III. El perro y tres señoritas se enfrentan ahora con cuatro jóvenes.



¿Qué lado ganará en este último caso?

Resolución:

En el último caso se puede reemplazar al perro por 2 señoritas y un joven (y esto gracias a la parte II) entonces tendremos un enfrentamiento entre cinco señoritas más un joven a la izquierda y cuatro jóvenes a la derecha.

Luego, se deduce que el grupo de 5 señoritas y 1 joven ganará el lance.

El arte de plantear ecuaciones es una habilidad sumamente importante para la resolución de problemas, para ello tenemos que traducir un problema dado en un lenguaje convencional, al lenguaje matemático con ayuda de símbolos, variables o incógnitas.

A continuación, resolveremos a modo de ejercicio la traducción de ciertos enunciados dados en forma verbal a su forma simbólica matemática.

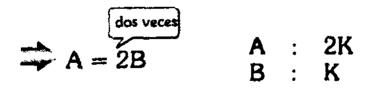
ENUNCIADO (forma verbal)	EXPRESIÓN MATEMÁTICA (forma simbólica)
• La suma de dos números consecutivos más 3.	⇒ $(x) + (x+1) + 3$
• Yo tengo S/. 20 más que tú.	⇒ lo que yo tengo $= 20 +$ lo que tú tienes ; yo : $20 + x$; tú : x
• El cuadrado de la suma de dos números ***x* é *y***	⇒ $(x + y)^2$
• La suma de los cuadrados de dos números ***x* é *y***	⇒ $x^2 + y^2$
• El cuádruple de lo que *tengo*, aumentado en 20.	⇒ $4y + 20$; *tengo* : y
• El cuádruple, de lo que *tengo* aumentado en 20.	⇒ $4(y+20)$; *tengo* : y

- Yo tengo S/.40 menos que tú o también se dice tú tienes S/.40 más que yo. $\Rightarrow$ $y = x - 40$; yo : $x - 40$; tú : x

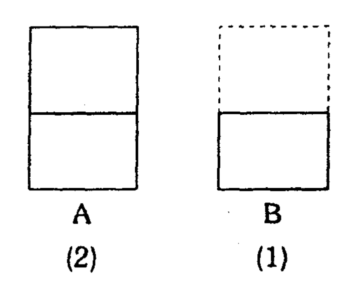
- A excede a B en 4;
  lo cual se puede enunciar como:
  A es mayor que B en 4.
  El exceso de A sobre B es 4.
  B es excedido por A en 4.
  La diferencia entre A y B es 4.

  $\Rightarrow$ $A - B = 4$; A : $x + 4$; B : x

- A es el doble de B o equivalentemente:
  A es dos veces B.
  B es la mitad de A.

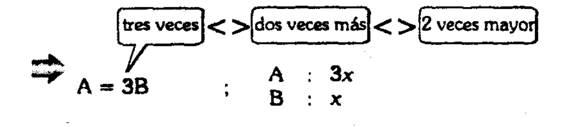


$\Rightarrow$ $A = 2B$; A : 2K; B : K

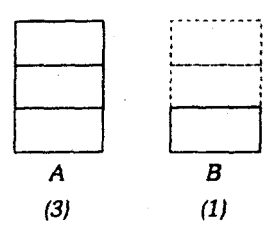


Aquí también podemos afirmar que A tiene una vez más de lo que posee B. Entonces la frase **una vez más** equivale a **el doble**.

- A es dos veces más que B, o
  A es dos veces mayor que B.



$\Rightarrow$ $A = 3B$; A : $3x$; B : x



A tiene el triple de lo que tiene B ó A tiene **dos veces más** de lo que tiene B.
En resumen:
Una vez más < > el doble.
Dos veces más < > el triple.
Tres veces más < > el cuádruple.

- A es a B como 3 es a 5.
  la relación entre A y B es 3/5
  A y B están en la razón de 3 a 5.
  A es a 3 como B es a 5.

  $\Rightarrow$ $\dfrac{A}{B} = \dfrac{3}{5}$; A : 3k; B : 5k

- Por cada 3 fichas rojas tengo 4 fichas azules. ⇒ $\dfrac{\text{rojas}}{\text{azules}} = \dfrac{3}{4}$; rojas : 3k, azules : 4k

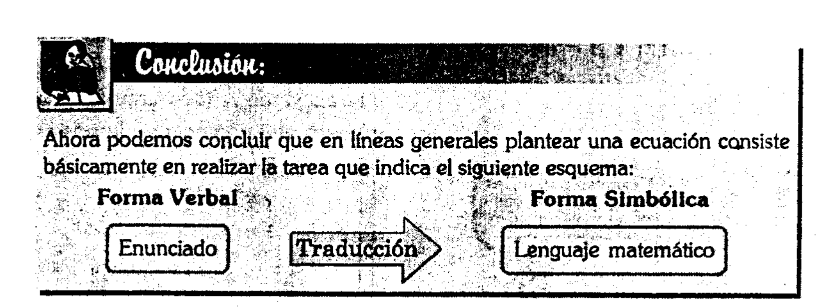
- Tres menos dos veces un número x. ⇒ $3 - 2x$

- Tres menos de dos veces un número x. ⇒ $2x - 3$

- El producto de cinco números consecutivos es m. ⇒ $(x)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = m$
  $(a-2)(a-1)(a)(a+1)(a+2) = m$

- Tú tienes el doble de mi dinero que es S/.30 más que el dinero de él. ⇒
  El : x ; Yo : $30 + x$; Tú : $2(30 + x)$
  Tú : 2k ; Yo : k ; El : k - 30

- Si tú me das S/.20, entonces tendremos igual cantidad de dinero. ⇒ Yo : S/. a ; Tú : a + 40 — notemos que si tú me das S/.20, entonces tendremos lo mismo



Veamos la aplicación en algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Tú tienes la mitad de lo que tenías y tendrás el triple de lo que tienes. Si tuvieras lo que tienes, tenías y tendrás, tendrías lo que yo tengo, que es nueve soles más de lo que tú tendrás. ¿Cuánto más que tú es lo que tengo?

Resolución:

Tú Tenías	Tú Tienes	Tú Tendrás	Lo que yo tengo
$2x$	x	$3x$	

si tuvieras: $x + 2x + 3x = 6x$ ←

$6x - 3x = 9x$ $\quad 3x = 9$

$x = 3$

Luego:

yo ⇒ $9 + 3(3) = 18$

tú ⇒ S/. 3

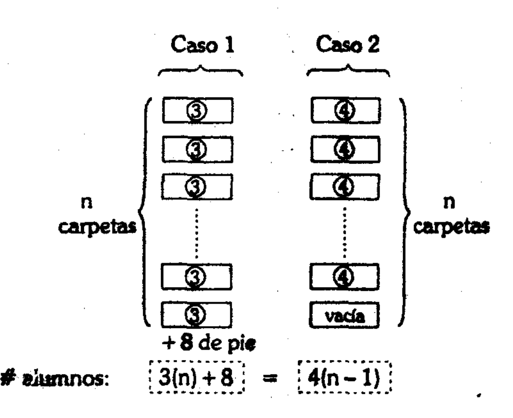
$\therefore$ 18 - 3 = S/.15

Ejemplo 2

En un salón de clase, si los alumnos se sientan de 3 en 3 se quedarían de pie 8 alumnos. En cambio, si se sientan de 4 en 4, una carpeta quedaría vacía. Halle el número de alumnos:

Resolución:

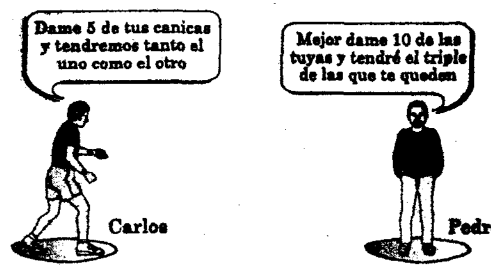
Sea el número de carpetas igual a **n**.



Resolviendo: $n = 12$ carpetas

$\therefore$ # alumnos: $3(12) + 8 = 44$

Ejemplo 3

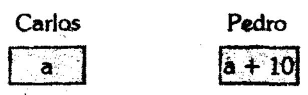


¿Cuántas canicas tienen Carlos y Pedro?

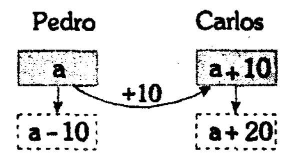
Resolución:

Según Carlos, si Pedro le entrega 5 canicas quedarían igualados; entonces deducimos que Pedro tiene más canicas que Carlos, exactamente 10 canicas más.

Así:



Según Pedro; si Carlos le da 10 canicas, dice que tendría el triple de las que le queden a Carlos.



$\Rightarrow$ $a + 20 = 3(a - 10)$

Resolviendo $a = 25$

$\therefore$ # canicas de Carlos : 25

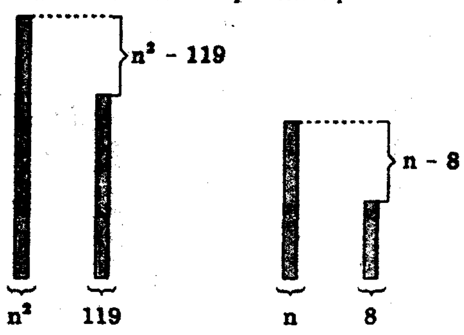
canicas de Pedro : 35

Ejemplo 4

Halle un número entero positivo, sabiendo que el exceso del cuadrado de dicho número sobre 119 es igual al décuplo del exceso del número sobre 8.

Resolución:

Recordando que el exceso equivale a una diferencia entre dos cantidades y siendo n el número en referencia podemos plantear:



Por dato:

décuplo

$n^2 - 119 = 10(n-8)$

$n^2 - 10n - 39 = 0$

$n \quad -13 \rightarrow \boxed{n = 13}$

$n \quad +3 \rightarrow n = -3$ se descarta

(recuerde que **n** es positivo, por dato.)

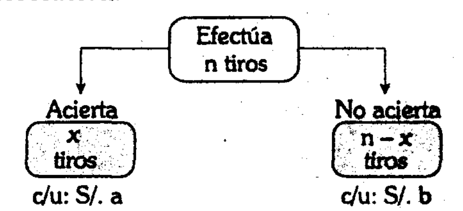
$\therefore$ El número es 13.

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

En una feria, Isabel juega el "tiro al blanco" con la condición de que por cada tiro que acierte recibirá **a** soles y pagará **b** soles por cada uno de los que falle. Después de **n** tiros ha recibido **c** soles. ¿Cuántos tiros dio en el blanco?

Resolución:



Como recibe una cantidad de **c** soles, se deduce que lo que él gana por los aciertos es mayor de lo que él paga por los que no acierta; por lo tanto, la diferencia es lo que recibe.

Recibe: $ax - b(n-x) = c$

$$\therefore\ x = \frac{bn + c}{a + b}$$

PROBLEMA 2

En una fiesta, la relación de mujeres y hombres es de 3 a 4. En un momento dado se retiran 6 damas y llegan 3 hombres con lo que la relación es ahora de 3 a 5. Indique cuántas mujeres deben llegar para que la relación sea de **1 a 1**.

Resolución:

	Mujeres	Hombres
Antes :	3n	4n
	↓ −6	↓ +3
Ahora :	3n − 6	4n + 3

Luego: $\dfrac{3n-6}{4n+3} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \boxed{n = 13}$

Entonces, ahora hay 33 mujeres y 55 hombres.

Digamos que deben llegar x mujeres para que la relación sea de 1 a 1.

Cuando dos cantidades están en relación de 1 a 1 significa que deben ser iguales.

$$\Rightarrow\ 33 + x = 55$$
$$x = 22$$

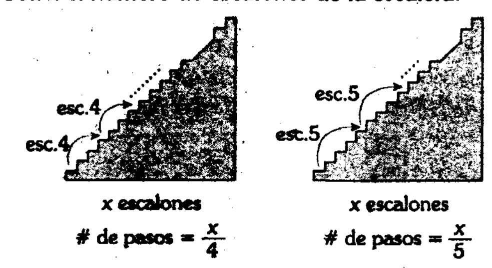
$\therefore$ Deben llegar 22 mujeres.

PROBLEMA 3

Si subo una escalera de 4 en 4 escalones, doy 3 pasos más que subiendo de 5 en 5 escalones. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

Resolución:

Sea x el número de escalones de la escalera.



En el primer caso, se dieron 3 pasos más que en el segundo caso, por lo tanto:

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 3$$

Resolviendo: $x = 60$

$\therefore$ La escalera tiene 60 escalones

PROBLEMA 4

Si compro 7 cuadernos y 3 lapiceros, gasto S/.44; pero si compro 7 lapiceros y 3 cuadernos, gasto S/.36. ¿Cuánto cuesta 1 cuaderno y cuánto 1 lapicero?

Resolución:

Costo de 1 cuaderno: S/.C

Costo de 1 lapicero : S/.L

De los datos:

$$7C + 3L = 44 \ldots\ldots (1)$$
$$3C + 7L = 36 \ldots\ldots (2)$$

$$(1)+(2): 10(C+L) = 80 \Rightarrow C + L = 8$$
$$(1)-(2): 4(C-L) = 8 \Rightarrow C - L = 2$$
(+)
$$2C = 10$$
$$\boxed{C = 5}$$
$$\Rightarrow \boxed{L = 3}$$

Por lo tanto:

1 cuaderno cuesta: S/.5

1 lapicero cuesta : S/.3

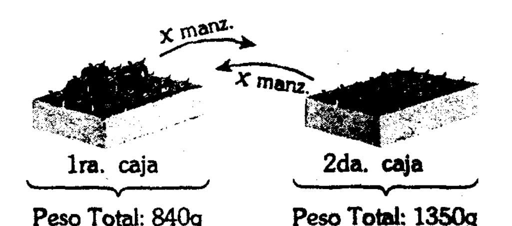
PROBLEMA 5

Se tiene un cajón de 84 manzanas de 10 g cada una y otro cajón con 54 manzanas de 25 g cada una. ¿Cuántas manzanas deben intercambiarse para que, sin variar el número de manzanas de cada cajón, ambas adquieran el mismo peso?

Resolución:

Supongamos que intercambiamos x manzanas.

84 manzanas c/u: 10 g — 54 manzanas c/u: 25 g



Por 1 manzana que intercambiamos de cada caja, la que sale de la 1ra. caja pesa 10 g y la que sale de la 2da., pesa 25 g ; entonces la 1ra. caja gana 15 g y la 2da., pierde 15 g.

Luego si intercambiamos x manzanas, la 1ra. caja gana $15x$ g y la 2da., pierde $15x$ g, entonces ambas cajas tendrán el mismo peso.

Es decir: $840 + 15x = 1350 - 15x$

$$x = 17$$

PROBLEMA 6

Lo que tú ganas y lo que yo gano suman S/.600. Si tú ganaras S/.80 más y yo S/.80 menos, tendríamos la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto tenemos cada uno?

Resolución:

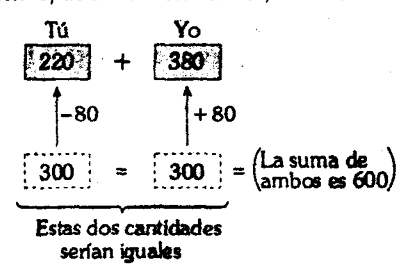
De los datos podemos plantear lo siguiente:

Tú + Yo = 600

Tú: +80 ; Yo: −80

[ ] = [ ]

Entonces, de la condición final, retrocedemos así:



∴ Yo tengo S/.380 y tu tienes S/.220

PROBLEMA 7

El papá de José acude al hipódromo con S/.4 300 y cuando ya ha perdido S/.700 más de lo que no ha perdido, apuesta lo que le queda y lo triplica. ¿Ganó o perdió? ¿Cuánto?

Resolución:

Al inicio tenía: S/.4300

Dinero: S/. 4300

No ha perdido: x	Ha perdido: x + 700

$\Rightarrow 2x + 700 = 4300$

$\boxed{x = 1800}$

Entonces, le queda: S/. 1 800.

Luego apuesta lo que le queda y lo triplica:

$\rightleftarrows$ 3(1800) = 5 400

Ahora tiene: S/.5400

$\therefore$ Ganó: 5 400 – 4 300 = 1 100 soles

PROBLEMA 8

Un comerciante compra carteras al precio de 75 soles cada una y además le regalan 4 por cada 19 que compra. Si recibió en total 391 carteras, ¿cuál fue la inversión del comerciante?

Resolución:

Del enunciado:

Compra		**Le regalan**		**Recibe**
19	+	4	=	23
				↓ × 17
				391 Recibió en total

Compra		**Le regalan**		**Recibe**
19	+	4	=	23
↓ × 17		↓ × 17		↓ × 17
323	+	68	=	391

Entonces el número de carteras que compró es 323.

Además por el dato, el costo de cada cartera es de S/.75

$\therefore$ Inversión = 323(75) = S/.24225

PROBLEMA 9

Halle dos números consecutivos cuya suma es igual a la cuarta parte del primero más los cinco tercios del segundo. Dé como respuesta el consecutivo del mayor de dichos números.

Resolución:

Sean los números: n y (n+1)

Luego, del enunciado planteamos:

$$n + (n+1) = \frac{1}{4}(n) + \frac{5}{3}(n+1) \rightleftarrows n = 8$$

Los números son: 8 y 9

$\therefore$ El consecutivo del mayor es 10

PROBLEMA 10

En una granja se observa 40 animales y 100 patas, entre cerdos y gallinas. ¿Cuál es la diferencia del número de animales de cada especie?

Resolución:

Sea el número de cerdos igual a x entonces, como en total son 40 animales, el número de gallinas es igual a $40-x$ (estamos usando sólo una variable).

Luego, el número total de patas es 100 y sabemos que cada cerdo tiene 4 patas y cada gallina tiene 2 patas, entonces podemos plantear:

$$4x + 2(40-x) = 100$$
$$4x + 80 - 2x = 100$$
$$\rightleftarrows x = 10$$

Entonces hay 10 cerdos y 30 gallinas. Nos piden la diferencia de estos números, es decir,

$$\therefore 30 - 10 = 20.$$

Nota:

Estimado lector, lo que se ha explicado en la resolución del problema 10, se puede esquematizar en el siguiente cuadro:

	cerdos	gallinas
# animales :	x	$40 - x$
# patas :	$4x$	$80 - 2x$

Total de patas: $4x + 80 - 2x = 100 \rightleftarrows x = 10$

Entonces hay 10 cerdos y 30 gallinas.

Nos piden: 30 – 10 = 20

PROBLEMA 11

Tengo 56 soles entre monedas 10 y 2 soles. Si el número de monedas de 10 soles excede en 2 al número de monedas de 2 soles, halle la cantidad de monedas que tengo.

Resolución:

Sea el número de monedas de 2 soles igual a x, entonces:

	Monedas de S/.10	Monedas de S/.2
# monedas	$x + 2$	x
valor en soles	$10(x+2)$	$2(x)$

Por dato, en total tengo 56 soles

entonces: $10(x+2) + 2x = 56$

$$10x + 20 + 2x = 56$$

$$x = 3$$

Luego:

\# monedas de 10 soles = 5

\# monedas de 2 soles = 3

$\therefore$ Tengo 5 + 3 = 8 monedas

PROBLEMA 12

Un carpintero vendió 3 sillas más que mesas; pero tanto en las sillas como en las mesas, obtuvo lo mismo. ¿Cuántos artículos vendió, si las mesas las vende a S/. 360 más que las sillas y recaudó S/. 9 600 en total?

Resolución:

Sea el número de mesas que vendió igual a x entonces el número de sillas es igual a $x+3$.

De la recaudación total, que es 9 600 soles, a las sillas le corresponde 4 800 soles y a las mesas también 4 800 soles, esto es, según el dato del problema.

Cada mesa lo vendió en $\dfrac{4800}{x}$ soles

Cada silla lo vendió en $\dfrac{4800}{x+3}$ soles

Pero, por dato, cada mesa lo vende a 360 soles más que cada silla. Esto significa que la diferencia de precios es de 360 soles, entonces planteamos la siguiente ecuación:

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+3} = 360$$

Simplificando: $\dfrac{40}{x} - \dfrac{40}{x+3} = 3$

Resolviendo: $x = 5$

$\therefore$ Vendió 5 mesas y 8 sillas, o sea que vendió: 5 + 8 = 13 artículos.

PROBLEMA 13

Para ganar S/.180 en la rifa de un televisor, se hicieron 120 boletos, vendiéndose únicamente 75 boletos y originándose así una pérdida de S/.45. ¿Cuál es el valor de dicho televisor?

Resolución:

En este ejercicio nos sugieren **comparar** el valor del televisor con el de la venta de cierta cantidad de boletos. Cuando hay ganancia es porque lo que se obtiene de la venta excede al costo del televisor y cuando hay pérdida es el caso inverso.

Sea el precio de cada boleto: x soles

Se hizo 120 boletos para ganar 180 soles

entonces: $120x = \begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{T.V.}\end{pmatrix} + 180 \ldots\ldots (1)$

Pero, sólo se vendió 75 boletos y se perdió 45 soles, entonces: $75x = \begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{TV}\end{pmatrix} - 45 \ldots. (2)$

Restamos miembro a miembro (1) y (2):

$$120x - 75x = \begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{T.V.}\end{pmatrix} + 180 - \left[\begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{T.V.}\end{pmatrix} - 45\right]$$

$$45x = 225$$

$$x = 5$$

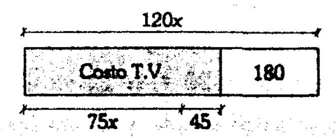
Reemplazamos en (1):

$$120(5) = \begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{T.V.}\end{pmatrix} + 180$$

$\therefore$ El costo del TV es 420 soles

Nota:

Este problema se puede resolver, utilizando un gráfico y considerando las ecuaciones (1) y (2).



Se observa que: $120x = 75x + 45 + 180$

$45x = 225$

$x = 5$

$\therefore$ Costo T.V. = 75(5)+45 = 420 soles

PROBLEMA 14

Un matrimonio dispone de una suma de dinero para ir al teatro con sus hijos. Si compra entradas de S/.8, le faltaría S/.12 y si adquiere entradas de S/.5, le sobraría S/.15. ¿Cuántos hijos tiene el matrimonio?

Resolución:

Sea el número total de personas igual a x; si compra entradas de 8 soles le faltaría 12 soles; entonces el dinero que tiene no le alcanza, por lo tanto:

$$8x = (\text{dinero que tienen}) + 12 \ldots\ldots (1)$$

Si compra entradas de 5 soles, le sobraría 15 soles, osea:

$$(\text{dinero que tienen}) = 5x + 15 \ldots\ldots (2)$$

Reemplazamos (2) en (1):

$$8x = (5x + 15) + 12$$

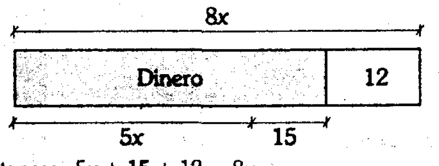
$$3x = 27 \Rightarrow x = 9$$

Entonces son 9 personas en total, incluidos el papá y la mamá.

$\therefore$ El número de hijos es: $9 - 2 = 7$

Conclusiones:

Gráficamente:



Entonces: $5x + 15 + 12 = 8x$

$x = 9$

$\therefore$ # hijos = $9 - 2 = 7$

PROBLEMA 15

Si a cada niño de los que tengo le entrego tantos caramelos como niños hay, me faltaría 12 caramelos; pero si le entrego a cada uno 2 caramelos menos, entonces me sobraría lo mismo que me faltaba. ¿Cuántos niños tengo?

Resolución:

Sea el número de niños igual a x.

Sea el número de caramelos que tiene igual a C.

Si a cada niño le entrega tantos caramelos como niños hay, es decir, x caramelos, faltaría 12 caramelos. Esto significa que los caramelos que se dispone no alcanzarían, es decir:

$$x \cdot x = C + 12 \ldots\ldots (1)$$

Pero, si le entrega a cada niño 2 caramelos menos, es decir $x-2$ caramelos, sobraría 12 caramelos, es decir:

$$C = x(x-2) + 12 \ldots\ldots (2)$$

Reemplazamos (2) en (1):

$$\not{x}^2 = (\not{x}^2 - 2x + 12) + 12$$

$$x = 12$$

$\therefore$ Hay 12 niños.

PROBLEMA 16

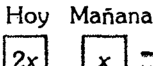
Si hoy gasto lo mismo que ayer, mañana gastaría la mitad de hoy entonces me quedaría sin dinero alguno; pero en cambio, si ayer hubiese gastado la mitad de lo que gasté, hoy tendría para gastar S/.10 más de lo que gasté realmente ayer. ¿Cuánto gasté ayer?

Resolución:

Sea lo que gastó ayer igual a $2x$

De la primera parte: "Si hoy gasto lo mismo que ayer, mañana gastaría la mitad de hoy y me quedaría sin dinero", tenemos:

Ayer Hoy Mañana



$\boxed{2x}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x}$ ⇒ Total = $5x$ . . . . (1)

La suma $5x$ se acabaría.

Luego: "Si ayer hubiese gastado la mitad de lo que gasté, hoy tendría para gastar 10 soles más de lo que gasté realmente ayer", entonces:

Ayer Hoy

$\boxed{x}$ $\boxed{2x+10}$ ⇒ Total = $3x + 10$ . . . . (2)

Como el total es el mismo, igualamos (1) y (2):

$$5x = 3x + 10$$
$$x = 5$$

∴ Ayer gasté: $2(5)$ = S/.10

PROBLEMA 17

Al jugar naipes con un amigo, me doy cuenta al final, de que él tiene el triple de dinero de lo que yo tenía cuando él tenía el doble de lo que tengo.

Si juntamos lo que él tenía y lo que yo tengo, obtendríamos S/. 60. ¿Cuánto tenemos entre ambos?

Resolución:

Sea lo que yo tenía igual a x soles y lo que yo tengo igual a y soles.

Entonces, según las condiciones:

	Al inicio	Al final
Yo	x	y
El	$2y$	$3x$

Luego, por dato, lo que él tenía ($2y$) y lo que yo tengo (y) suman 60 soles, es decir:

$$2y + y = 60 \Rightarrow y = 20$$

Además, el total al inicio y el total al final deben ser iguales, es decir:

$$x + 2y = y + 3x$$
$$x + 2(20) = 20 + 3x \Rightarrow x = 10$$

Entonces yo tengo 20 soles y él tiene 30 soles.

∴ Entre ambos tenemos 20+30=50 soles

PROBLEMA 18

Un ganadero compró 30 caballos más que vacas y tantos cerdos como vacas y caballos juntos; además por 2 vacas pagó tanto como por 7 caballos. ¿Cuántos animales compró sabiendo que pagó por el total de vacas el doble que por los caballos?

Resolución:

Sea el número de vacas igual a x.

Entonces:

# vacas	# caballos	# cerdos		Total
x	$x+30$	$2x+30$	⇒	$4x+30$

Además: "Por 2 vacas pagó tanto como por 7 caballos", es decir:

$$2.(V) = 7.(C)$$

Esto significa que cada vaca cuesta como 7 y que cada caballo como 2. Digamos que sean 7 soles y 2 soles respectivamente.

Luego, de la condición final del problema:

$$\begin{bmatrix}\text{Pago total}\\ \text{por las vacas}\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}\text{Pago total}\\ \text{por los caballos}\end{bmatrix}$$

$$7(x) = 2[2(x + 30)]$$
$$7x = 4x + 120$$
$$x = 40$$

∴ Total de animales = $4(40)+60$ = S/.220

PROBLEMA 19

Los ahorros de un niño consta de (p+1), (3p-5) y (p+3) monedas de 5, 10 y 20 soles respectivamente. ¿A cuánto ascienden sus ahorros?, si al cambiarlo en monedas de 25 soles, el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 soles.

Resolución:

Recuerda que si multiplicamos el número de monedas de una denominación por el valor en soles de cada moneda, nos resulta el monto en soles. Entonces, el niño tiene:

	de 5 soles	de 10 soles	de 20 soles
# monedas	p + 1	3p − 5	p + 3
monto en soles	5(p+1)	10(3p−5)	20(p+3)

Total ahorrado = 5(p+1)+10(3p−5)+20(p+3)

Total ahorrado = $\boxed{55p + 15}$ .... (1)

Luego, al cambiar el total de sus ahorros en monedas de 25 soles, el número de monedas que obtiene, según el dato, es 2(p+1). Entonces: el total ahorrado = 25 . 2(p+1)

= $\boxed{50p + 50}$ ...... (2)

Pero entendemos que sólo se ha cambiado el tipo de moneda mas no el total ahorrado, lo que significa que debemos igualar (1) y (2) así:

$$55p + 15 = 50p + 50 \Rightarrow p = 7$$

Reemplazamos p=7 en (2)

∴ Total ahorrado = 400 soles

PROBLEMA 20

Si te doy lo que a ti te falta para tener lo que yo tengo y tú me das todo lo que te pido, que es lo que me falta para tener el doble de lo que tienes, resulta que lo mío y lo tuyo estarían en la relación de 5 a 4. ¿En qué relación se encontraban nuestras cantidades iniciales?

Resolución:

Sea lo que: Yo tengo = $\boxed{x}$

Tú tienes = $\boxed{y}$

donde, por condición del problema, $x > y$

Te falta para tener lo que yo tengo = $x - y$

Me falta para tener el doble de lo que tienes = $2y - x$

Luego, si yo te doy $\boxed{x - y}$ y tú me das $\boxed{2y - x}$,

yo tendría = $\boxed{x - (x - y) + (2y - x) = 3y - x}$

tú tendrías = $\boxed{y + (x-y) - (2y - x) = 2x - 2y}$

Entonces, la relación sería de 5 a 4, es decir:

$$\frac{3y - x}{2x - 2y} = \frac{5}{4}$$

De esta ecuación obtenemos: $\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$

∴ Las cantidades iniciales estaban en la relación del **11 a 7**

PROBLEMA 21

En una familia se cuenta varios niños y niñas. Alguien les preguntó: "¿Cuántos son?" y la niña mayor responde que tiene tantos hermanos como 5 veces el número de hermanas; pero el niño mayor dijo que tenía tantos hermanas como 3 veces el número de hermanas. ¿Cuántos niños son en total?

Resolución:

Sea el número de hermanas de la niña mayor igual a x.

Primero, la niña mayor dice que tiene tantos hermanos como 5 veces el número de hermanas, o sea:

niña mayor

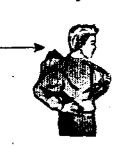
: hermanas $\boxed{x}$ hermanos $\boxed{5x}$

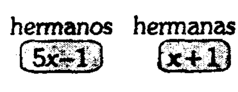
Entonces podemos deducir que:

Total de varones = $5x$
Total de mujeres = $x + 1$

A partir de esto, podemos indicar:

niño mayor





Luego, de lo que dice el niño mayor planteamos:

$$5x - 1 = 3(x + 1)$$
$$x = 2$$

Finalmente, el número total de niños, entre varones y mujeres, es: $6x+1 = 6(2)+1 = 13$

PROBLEMA 22

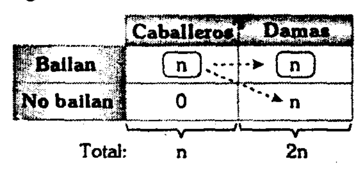
En una fiesta hay tantos caballeros bailando como damas sin bailar y ningún caballero sin bailar; una vez que se retiran 70 damas y 20 caballeros y todos salen a bailar, nadie se quedaría sin bailar. ¿Cuántas personas habían inicialmente?

Resolución:

Sabemos que en una fiesta, donde hay damas y caballeros, lo más lógico es que se baile en pareja, entonces podemos afirmar que:

caballeros que bailan = # damas que bailan

luego, según los datos:



	Caballeros	Damas
Bailan	n	n
No bailan	0	n
Total:	n	2n

Luego, se retiran 20 caballeros y 70 damas; entonces quedan:

Caballeros	Damas
$n - 20$	$2n - 70$

Pero, por dato nadie se queda sin bailar, entonces el número de caballeros y damas que quedan son iguales, es decir:

$$n - 20 = 2n - 70 \rightleftarrows n = 50$$

$\therefore$ El número total de personas que había inicialmente fue $3n = 3(50) = 150$

PROBLEMA 23

Se tiene 48 palitos de fósforos divididos en 3 grupos. Del primer grupo se pasan al segundo tantos palitos como tiene éste; luego, del segundo grupo se pasan al tercero tantos palitos como tiene éste y lo mismo se hizo del tercero al primero, resultado al final los tres grupos con igual cantidad de palitos. ¿Cuántos palitos tenía el primer grupo al inicio?

Resolución:

Nos piden averiguar cuántos palitos tenía el primer grupo al inicio.

Digamos que al inicio el número de palitos que había en cada grupo era:

1er. grupo	2do. grupo	3er. grupo
x	y	z

Luego, del primero se pasa y palitos al segundo grupo, quedando así:

1er. grupo	2do. grupo	3er. grupo
$x - y$	$2y$	z

Después, del segundo se pasa z palitos al tercer grupo, quedando así:

1er. grupo	2do. grupo	3er. grupo
$x - y$	$2y-z$	$2z$

Finalmente, del tercero se pasa $x-y$ palitos al primer grupo y quedan cada uno de los grupos con igual número de palitos, es decir con $48 \div 3 = 16$ palitos. Así:

1er. grupo	2do. grupo	3er. grupo
$2x - 2y$	$2y-z$	$2z-(x-y)$
16	16	16

Entonces:

$$\begin{cases} x-y = 8 \quad \ldots(1) \\ 2y-z = 16 \quad \ldots(2) \\ 2z-x+y = 16 \quad \ldots(3) \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (3): $2z = 24 \rightleftarrows z = 12$

Reemplazamos $z=12$ en (2) : $y = 14$

Reemplazamos $y=14$ en (1) : $x = 22$

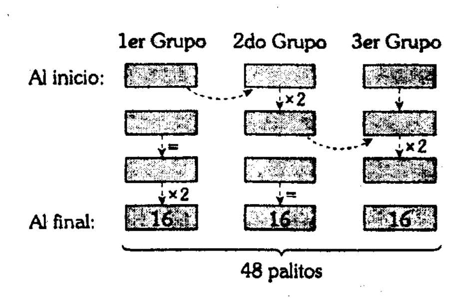
$\therefore$ Al inicio, en el primer grupo había 22 palitos

El problema 23 se ha resuelto utilizando tres variables (x, y, z) para representar a las cantidades iniciales de palitos en cada grupo, ya que éstas eran desconocidas. Finalmente se llegó a plantear tres ecuaciones. Es decir, se ha dado una solución algebraica al problema.

Ahora lo que vamos a ver, amigo lector, es otra forma, otro método para resolver el problema, de modo que no se emplee variables. Esto es utilizando un **procedimiento regresivo**. Es decir, de las **condiciones finales** vamos a **regresar** a las **condiciones iniciales**.

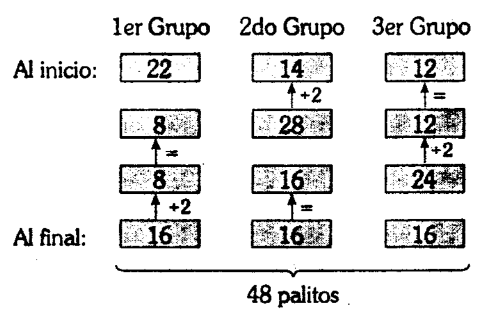
Cuando en el problema se afirma que del primer grupo se pasa al segundo tantos palitos como hay en éste se entiende que se le está duplicando la cantidad de palitos del segundo grupo. Así mismo ocurre, cuando se pasa palitos del 2° al 3° y del 3° al 1°.

Podemos indicar lo que ocurre, en el siguiente gráfico:



Ahora, lo que tenemos que hacer es **regresar**, del final al inicio. Para ello realizamos operaciones contrarias a las ya indicadas, por ejemplo, si en la **ida** se multiplicó por 2 ahora en el **regreso** se divide entre 2. Además, recuerda que en todo momento, el total de palitos es 48, es decir la suma de lo que hay en los tres grupos debe ser 48 palitos.

Entonces **regresamos** de abajo hacia arriba, en el gráfico:



$\therefore$ Al inicio en el primer grupo había 22 palitos.

PROBLEMA 24

Cada vez que Raúl se cruza con Marcos, éste le duplica el dinero que lleva Raúl en ese momento y en retribución, Raúl le entrega 10 soles.

Si se han cruzado 3 veces luego de los cuales Raúl tiene 250 soles y Marcos 100 soles. ¿Cuánto tenía cada uno al inicio?

Resolución:

Sea al inicio:		Por dato, al final:	
Raúl	Marcos	Raúl	Marcos
x	y	250	100

Pero entendemos que el total de dinero al inicio y al final deben ser iguales, es decir:

$$x + y = 250 + 100 \ldots\ldots\ (1)$$

Cada vez que Raúl se ha cruzado con Marcos, el dinero que tenía Raúl, primero fue duplicado y después fue disminuido en 10 soles.

Raúl empezó con x soles, después del primer cruce tiene $2x-10$. Después del segundo cruce tiene $2(2x-10)-10$ y luego del tercer cruce tiene:

$$2[2(2x-10)-10]-10 = 250 \ldots\ldots (2)$$

Resolviendo: $\boxed{x = 40}$

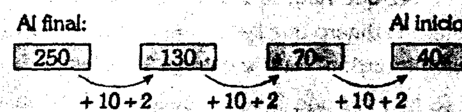
Reemplazando $x=40$ en (1), se obtiene:

$$\boxed{y = 310}$$

∴ Al inicio, Raúl tiene 40 soles y Marcos 310 soles

Hemos calculado lo que tenía Raúl, al inicio, mediante la ecuación (2), pero ahora vamos a calcularlo usando un **procedimiento regresivo**.

Como en el proceso de **ida**, cada vez que se cruzaban, el dinero de Raúl primero **fue** duplicado y después disminuido en 10 soles. Ahora en el proceso de **regreso**, hacemos lo contrario, primero sumamos 10 soles y después dividimos entre 2. Así lo hacemos tres veces consecutivas a partir de 250 soles.



Entonces, al inicio Raúl tenía 40 soles.

Fíjate que se obtiene lo mismo que en la ecuación (2).

PROBLEMA 25

En una reunión, unos estamos jugando, otros charlando y bailando la cuarta parte de los reunidos.

- Después 4 de ellos dejan el juego por el baile.
- Uno deja la charla por el juego.
- Dos dejan el baile por la charla.

Resulta entonces que bailan tantos como juegan y juegan tantos como charlan. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

Resolución:

Al inicio **bailan la cuarta parte del total de personas**. Al final el número de los que bailan, juegan y charlan, son iguales. Es decir. el **total queda dividido en tres partes iguales**. Por eso es conveniente que el número total de personas tenga cuarta y tercera parte, es decir que sean como 12.

Sea el número total de personas igual a $12x$. Entonces al inicio bailan: $3x$

Al final bailan: $4x$

Luego:

	Inicio	1°	2°	3°	Final
		Procesos Efectuados			
Juegan:	[redacted]	−4	+1		$\boxed{4x}$
Charlan:	[redacted]		−1	+2	$\boxed{4x}$ ← Iguales
Bailan:	$\boxed{3x}$	+4		−2	$\boxed{4x}$
Total:	$12x$				$12x$

Para las personas que bailan, podemos plantear:

$$\boxed{3x} + 4 - 2 = \boxed{4x}$$

Resolviendo: $x = 2$

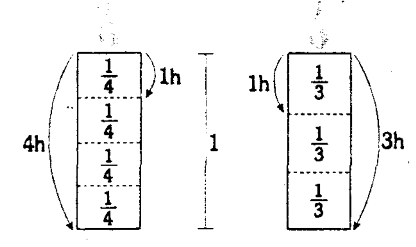
∴ El número total de personas es $12(2) = 24$

PROBLEMA 26

Dos cirios de igual altura se encienden simultáneamente, el primero se consume en 4 horas y el segundo, en 3 horas. Si cada cirio se quemó en forma constante. ¿Dentro de cuántas horas, después de haber encendido los cirios, la altura del primero es el doble que la altura del segundo?

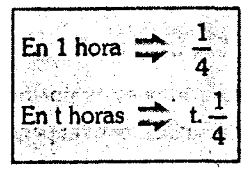
Resolución:

Según los datos iniciales, los cirios son de igual altura, la cual equivale a la unidad. Uno se consume en 4 horas y el otro, en 3 horas.

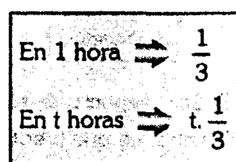


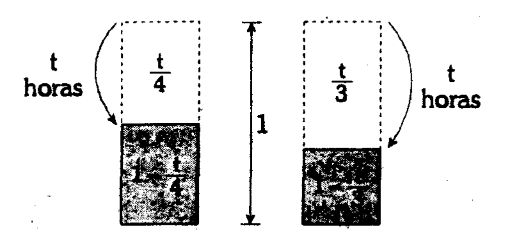
Después de t horas de haber encendido, ambos cirios, se consumen así:

Para el primero:



Para el segundo:





Por condición del problema, ahora la altura del primero es el doble de la del segundo, es decir:

$$1-\frac{t}{4}=2\left(1-\frac{t}{3}\right)$$

$\therefore$ Resolviendo: $t=\dfrac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ horas

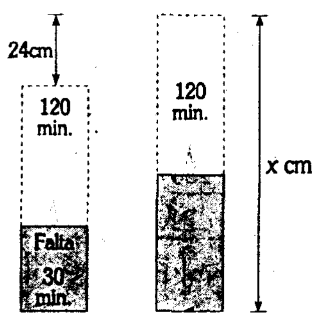
PROBLEMA 27

De dos velas de igual calidad una tiene 24cm de longitud más que la otra. Se prenden ambas y se observa que 30 minutos antes de terminarse la menor, la longitud de la vela mayor es 4 veces la de la menor. ¿Cuál fue la longitud inicial de la vela mayor, si la menor duró 150 minutos en total?

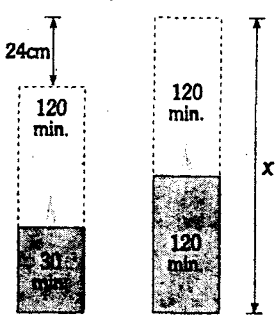
Resolución:

Cuando se afirma que son de igual calidad significa que si se prenden simultáneamente, entonces, después de un cierto tiempo lo consumido en uno es igual a lo consumido en el otro.

Sea x la longitud de la vela mayor. Según el enunciado del problema, la vela menor duró 150 minutos. Entonces cuando le falte 30 minutos para terminarse, ya habrá transcurrido 120 minutos en ambas velas y en ese instante tendremos:



Según el problema, en este momento, la altura de la vela mayor es 4 veces la altura de la menor; por lo tanto, su tiempo de duración será 4 veces el tiempo de la menor, veamos:



Del gráfico: x cm → 240 minutos

24cm → 90 minutos

$$\Rightarrow x=\frac{24\times 240}{90}$$

$$\therefore\ x=64\text{cm}$$

PROBLEMA 28

Si por S/.200 dieran 6 pelotas más de las que dan, la docena costaría S/.90 menos. ¿Cuánto vale cada pelota?

Resolución:

En el problema hay dos casos que analizar, un caso real (dan) y un caso supuesto (dieran).

Sea n el número de pelotas que dan por 200 soles, entonces:

	Dan	Dieran
# pelotas	n	n + 6
precio de 1 pelota	S/. $\frac{200}{n}$	S/. $\frac{200}{n+6}$
precio de 1 docena	S/.$12\left(\frac{200}{n}\right)$	S/.$12\left(\frac{200}{n+6}\right)$

Según el problema, en el caso supuesto, la docena costaría 90 soles menos. Su planteamiento es:

$$12\left(\frac{200}{n}\right) - 12\left(\frac{200}{n+6}\right) = 90$$

Simplificando: $\frac{80}{n} - \frac{80}{n+6} = 3$

Resolviendo: $n = 10$

$\therefore$ Cada pelota vale: $\frac{200}{10} = 20$ soles

PROBLEMA 29

Dos negociantes de vino ingresaron, por una de las fronteras del Perú, portando uno de ellos 64 botellas de vino y el otro, 20, todos de la misma calidad. Como no tienen suficiente dinero para pagar los derechos de aduana, el primero paga con 6 botellas y recibe 80 soles de vuelto y el segundo paga con 2 botellas de vino pero recibe 40 soles de vuelto. ¿Cuál es el precio de cada botella de vino?

Resolución:

Sean: $\begin{cases} a \rightarrow \text{valor del impuesto de cada botella} \\ b \rightarrow \text{valor de cada botella de vino} \end{cases}$

El 1° tenía **64 botellas**   El 2° tenía **20 botellas**

El 1er. negociante sólo paga impuestos por 58 botellas, ya que 6 botellas las utiliza para el pago de dichos impuestos y todavía recibe 80 soles de vuelto; por eso planteamos la siguiente ecuación.

$$6b = 58a + 80 \quad \ldots\ldots (1)$$

El 2do. negociante sólo paga impuestos por 18 botellas, ya que 2 botellas las usa para el pago de impuestos y recibe 40 soles de vuelto, entonces.

$$2b = 18a + 40 \quad \ldots\ldots (2)$$

Simplificando las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$\begin{cases} 3b = 29a + 40 \\ b = 9a + 20 \end{cases}$$

Resolviendo: $a = 10$; $b = 110$

$\therefore$ **El precio de cada botella de vino es 110 soles**

PROBLEMA 30

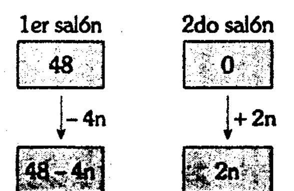
Un salón está iluminado por 48 focos y otro salón está a oscuras. Si en el primer salón se apaga 4 focos y en el segundo se enciende 2, y esta operación se repite hasta que ambos salones queden con igual número de focos encendidos, entonces el número total de focos encendidos es:

Resolución:

Según el enunciado, en cada operación, en el primer salón se apagan 4 focos y en el segundo se encienden 2 focos.

Entonces después de n operaciones, se han apagado 4n focos en el primero y se han encendido 2n focos en el segundo salón. Así tendremos:

focos encendidos al inicio :



focos encendidos al final :

Pero, al final ambos salones quedan con igual número de focos encendidos, es decir:

$$48 - 4n = 2n \Rightarrow n = 8$$

Reemplazando: $n = 8$

	1er salón	2do salón
Al final:	16	16

$\therefore$ Total de focos encendidos: 32

PROBLEMA 31

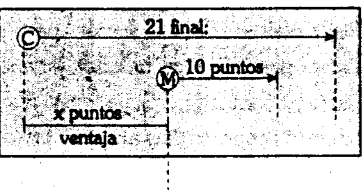
Al finalizar el juego de pin-pong, Carmen comenta a María: "Si te hubiera dado tres puntos menos de ventaja, te habría ganado con una diferencia de seis puntos". Se sabe que María anotó 10 puntos (sin contar con la ventaja dada) y el juego de pin-pong es hasta los 21 puntos, ¿cuántos puntos de ventaja dio Carmen a María?

Resolución:

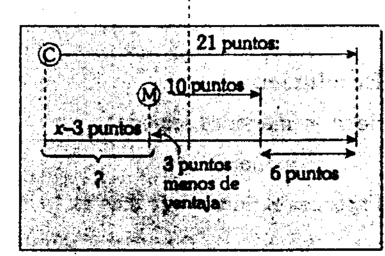
Sea x puntos la ventaja que le dio Carmen a María. Según los datos, se está comparando un caso real con otro supuesto, además, Carmen ha ganado, es decir, Carmen ya hizo los 21 puntos y María todavía.

Así podemos graficar:

Caso Real:



Caso Supuesto:



Del gráfico:

$$x - 3 + 10 + 6 = 21 \Rightarrow x = 8$$

$\therefore$ La ventaja fue 8 puntos.

PROBLEMA 32

En un viaje realizado fuera de la ciudad, pude observar:

- Llovió 7 veces en la mañana o en la tarde
- Cuando llovía en la tarde, estaba despejada la mañana
- Hubo 5 tardes despejadas
- Hubo 6 mañanas despejadas

¿Cuántos días duró mi viaje?

Resolución:

Sea n el número de días, entonces hubo n mañana y n tardes. Ordenando los datos en una tabla tenemos:

	Despejadas	Lluviosas (7)
# mañanas (n)	6	n-6
# tardes (n)	5	n - 5

Según el dato, llovió 7 veces: $(n-6)+(n-5) = 7$

$$n=9$$

$\therefore$ El viaje duró 9 días

PROBLEMA 33

Podría ahorrar S/.20 diarios, pero cada mañana de sol gasto S/.9 en helados y cada mañana fría gasto S/.6 en café. Si ya tengo ahorrado S/.258, ¿durante cuántos días ahorré? (sólo hay mañanas frías o soleadas).

Resolución:

Sean x mañanas soleadas

y mañanas frías

Entonces el número de días es: $x + y$

	mañanas soleadas	mañanas frías
# días	x	y
ahorro diario	$20-9=11$	$20-6=14$

Luego el ahorro total, en soles, es 258:

$$\boxed{11x + 14y = 258} \ldots\ldots (\alpha)$$

La ecuación (α) tiene dos variables (x e y), las cuales sólo pueden admitir valores enteros positivos. Dicha ecuación recibe el nombre de **Ecuación Diofántica**.

Para resolver la ecuación tenemos que encontrar valores enteros positivos para x é y de modo que se cumpla con la igualdad. Es posible que una ecuación diofántica tenga más de una solución, eso depende de las condiciones de cada problema (se debe relacionar siempre los resultados con la realidad).

En este caso, vamos a utilizar propiedades de los múltiplos, veamos:

$$11x + 14y = 258$$

$$11x + 11y + 3y = 11(23) + 5$$

$$\overset{\circ}{11} + \overset{\circ}{11} + 3y = \overset{\circ}{11} + 5$$

$$3y = \overset{\circ}{11} + 5$$

$$\boxed{y = \frac{\overset{\circ}{11}+5}{3}} \text{ pero } \overset{\circ}{11} = 0, 11, 22, 33, 44, \ldots$$

Lo que tenemos que hacer es reemplazar un $\overset{\circ}{11}$ de modo que obtengamos para y un valor entero positivo. Evaluando, al reemplazar 22 se obtiene $\boxed{y=9}$.

Ahora, reemplazamos $y=9$ en (α):

$$11x + 14(9) = 258 \Rightarrow \boxed{x = 12}$$

$\therefore$ El número de días que ahorré es $12+9=21$

Nota:

Si seguimos evaluando con los múltiplos de 11, al reemplazar 55 obtenemos $y=20$ y luego en (α), obtenemos $x=-2$. Pero sabemos que x no puede ser negativo por lo tanto descartamos esta solución.

De la misma forma, si evaluamos para 88, obtenemos $y=31$ y $x=-16$. Pero también, esta solución queda descartada. Entonces podemos asegurar que la única solución válida es $x=12$, $y=9$.

PROBLEMA 34

Hace muchos años pudo comprarse pavos a S/.10, patos a S/.5 y pollos a S/.0,5. Si en total se pudo comprar 100 animales, entre pavos, patos y pollos, con S/.100, ¿cuántos fueron los animales de cada especie?

Resolución:

Sea:	# pavos	# patos	# pollos
	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$
	c/u: S/.10	c/u: S/.5	c/u: S/. $\frac{1}{2}$

Pudo comprarse 100 animales:

$$\Rightarrow a + b + c = 100 \ldots\ldots (1)$$

Además, el gasto total fue 100 soles

$$10a + 5b + \frac{c}{2} = 100$$

multiplicamos por 2:

$$20a + 10b + c = 200 \ldots\ldots (2)$$

Restamos (2) – (1):

$$\boxed{19a + 9b = 100} \ldots\ldots (\alpha)$$

La ecuación (α) es también una ecuación diofántica donde las variables a y b son enteros positivos.

Evaluamos para $\boxed{a=1}$, en (α):

$$19 + 9b = 100 \Rightarrow \boxed{b = 9}$$

Luego, reemplazamos a=1 y b=9 en (1):

$$1 + 9 + c = 100 \Rightarrow \boxed{c = 90}$$

∴ Fueron: 1 pavo, 9 patos y 90 pollos.

Nota:

Si seguimos evaluando en (α), para a y b veremos que ya no hay más soluciones enteras positivas.

La ecuación (α) también se puede resolver usando múltiplos, veamos:

$$19a + 9b = 100$$

$$18a + a + 9b = 99 + 1$$

$$\overset{o}{9} + a + \overset{o}{9} = \overset{o}{9} + 1$$

$$\boxed{a = \overset{o}{9} + 1} \Rightarrow a = 1, 10, 19, 28, \ldots$$

Pero evaluando en la ecuación (α) la igualdad sólo verifica para $\boxed{a = 1}$ y se obtiene $\boxed{b = 9}$.

Luego, al reemplazar a=1 y b=9 la ecuación (1), se obtiene $\boxed{c=90}$.

PROBLEMA 35

Un negociante cambia 2 monedas de S/. 1 y le dan monedas de 25 céntimos y de 10 céntimos. ¿Cuántas monedas como máximo recibe entonces dicho comerciante?

Resolución:

Según el enunciado, podemos plantear que el valor del dinero que el comerciante entrega debe ser igual al valor de lo que le dan. Es decir:

$$\begin{pmatrix}\text{2 monedas}\\ \text{de 1 sol}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x \text{ monedas}\\ \text{de 25 céntimos}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y \text{ monedas}\\ \text{de 10 céntimos}\end{pmatrix}$$

si expresamos todo en céntimos, tendremos:

$$200 = 25x + 10y$$

simplificando:

$$\boxed{5x + 2y = 40} \ldots\ldots (\alpha)$$

Nuevamente estamos frente a una ecuación diofántica, donde x é y son variables que sólo pueden admitir valores enteros positivos.

Pero en el problema queremos calcular el número máximo de monedas que recibe el comerciante. Entonces, para que esto ocurra, el comerciante debe recibir más monedas de 10 céntimos que de 25 céntimos.

Es decir que **y** debe admitir su mayor valor y **x** su menor valor.

Es decir:

$$\underset{\text{mínimo}}{5x} + \underset{\text{máximo}}{2y} = 40$$

Analizando la ecuación:

$$5x + \underset{\text{es par}}{2y} = \underset{\text{es par}}{40}$$

$5x$ debe ser par $\Rightarrow x = 2, 4, 6, \ldots\ldots$

Empezamos dándole un valor mínimo a x : es decir $\boxed{x=2}$, *y luego reemplazamos para obtener* el valor máximo de y, así:

$$5(2) + 2y = 40 \Rightarrow \boxed{y = 15}$$

∴ El número máximo de monedas es 2+15=17

PROBLEMA 36

Pedro reparte 26 caramelos entre sus 4 sobrinos. Comen, cada uno de los cuatro, varios caramelos. Al cabo de una hora Pedro comprueba que le queda a cada uno el mismo número. Si el mayor había comido tantos como el tercero; el segundo comió la mitad de su número inicial y el cuarto comió tantos como los otros 3 juntos, ¿cuántos caramelos recibió el menor de los sobrinos?

Resolución:

Sea a el número de caramelos que le quedó a cada uno al final, y sea x el número de caramelos que comió el mayor. Entonces, según el enunciado, regresando del final al inicio:

	Inicio	Comieron	Final
Mayor	x + a	x	a
Segundo	2a	a	a
Tercero	x + a	x	a
Menor	2x + 2a	2x + a	a

Total: 4x + 6a = 26

2x + 3a = 13

2 3 (es la solución)

5 1 (se descarta ya que 1 no es varios)

$\Rightarrow$ x = 2 y a = 3

∴ El menor recibió: 2(2) + 2(3) = 10 caramelos

PROBLEMA 37

Luego de gastar exactamente la mitad de su dinero, Tania observa que tiene tantos centavos como pesos tenía al entrar a la tienda y tantos pesos como la mitad de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero (en centavos) tendría finalmente, si lograse ganar tantos centavos como pesos tiene y tantos pesos como centavos tiene, sabiendo que la cantidad que tenía al inicio es lo mínimo posible?

Observación: 1 peso < > 100 centavos

Resolución:

Sea lo que tenía: a pesos y 2b centavos, *entonces:*

	Pesos		Centavos
Tenía:	a	y	2b
Tiene:	b	y	a
Si ganase:	a	y	b
Tendría:	a+b	y	a+b

Según el enunciado, ella gastó la mitad de su dinero. Entonces, lo que tiene es igual a la mitad de lo que tenía, lo cual expresado en centavos es:

$$100b + a = \frac{1}{2}(100a + 2b)$$

Operando, obtenemos:

$$99b = 49a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{99}{49}$$

Pero por dato lo que tenía al inicio es lo mínimo posible. Entonces **a** y **b** deben ser mínimos:

$$\therefore \quad a = 99 \quad y \quad b = 49$$

Finalmente, si lograse ganar:

	Pesos		Centavos
Tendría	148	y	148 ;

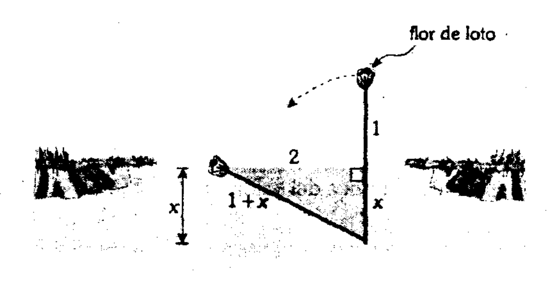
$\therefore$ Tendría $148 \times 100 + 148 = 14948$ centavos

PROBLEMA 38

En un estanque donde hay gansos y cisnes, se observa la parte superior de un loto, 1 m por encima de la superficie del agua. Forzado por el viento se inclina desde su base y la parte superior desapareció a 2 m hacia un lado. ¿Cuál es la profundidad del estanque?

Resolución:

Si la profundidad del estanque es x metros, entonces, según el enunciado, podemos graficar:



Por el teorema de Pitágoras:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 4$$

Resolviendo: $x = 1{,}5$

$\therefore$ La profundidad del estanque es 1.5 metros.

PROBLEMA 39

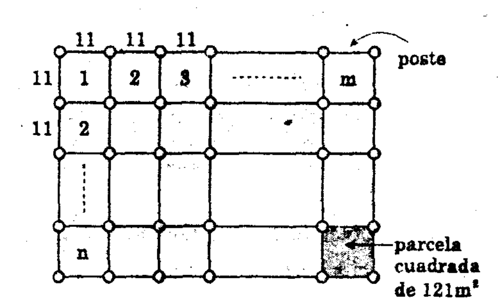
Se divide un terreno rectangular en parcelas lográndose 108 parcelas cuadradas de 121 m^2 cada uno. En cada esquina de las parcelas, se coloca un poste, empleándose en total 130 postes. Halle la diferencia entre el largo y el ancho del terreno rectangular.

Resolución:

Sean m parcelas a lo largo del terreno y n parcelas a lo ancho.

Entonces, a lo largo se cuenta (m+1) postes y a lo ancho se cuenta (n+1) postes.

Gráficamente:



Para el número de parcelas planteamos:

$$m \cdot n = 108 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Para el número de postes:

$$(m+1)(n+1) = 130 \ldots\ldots (2)$$

Resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$\boxed{m = 12} \quad y \quad \boxed{n = 9}$$

Finalmente, las dimensiones del terreno son:

Largo = 11m = 11(12) = 132 metros

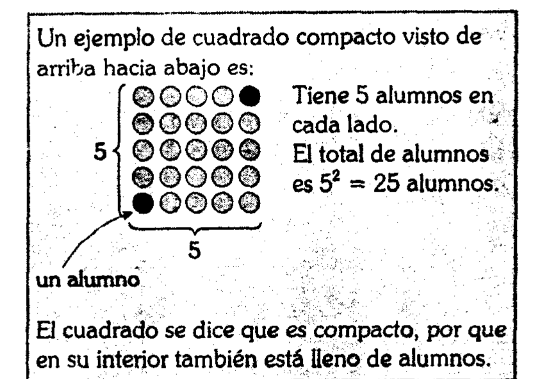
Ancho = 11n = 11(9) = 99 metros

La diferencia entre el largo y el ancho es:

$$\therefore \ 132 - 99 = 33 \text{ metros}$$

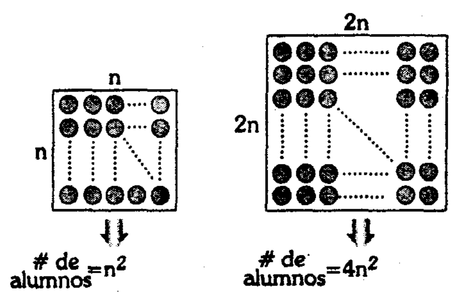
PROBLEMA 40

Con los alumnos de un salón se formaron 2 cuadrados compactos y se observa que el número de alumnos ubicados en cada lado del primero y segundo cuadrado se encuentran en la relación de 1 a 2. Si en el salón hubiera 20 alumnos más, se formaría un sólo cuadrado compacto. Halle la cantidad de alumnos del salón si es la menor posible.



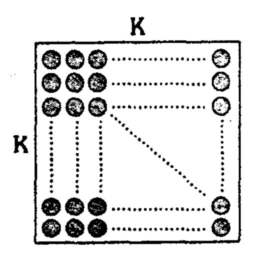
Según el problema, con los alumnos del salón se formaron 2 cuadrados compactos.

Digamos que en el lado del primero hay n alumnos, entonces en el lado del segundo habrá 2n alumnos, así:



⇒ Total de alumnos del salón $= n^2+4n^2=5n^2$

Si en el salón hubiera 20 alumnos más, se formaría un sólo cuadrado compacto así:



Total de alumnos $= k^2$

Entonces, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\boxed{5n^2 + 20 = k^2} \; \ldots\ldots\ (\alpha)$$

Analizando con múltiplos:

$$\underset{\overset{\circ}{5}}{5n^2} + \underset{\overset{\circ}{5}}{20} = \underset{\text{Debe ser } \overset{\circ}{5}}{K^2}$$

Por condición del problema n debe ser el menor valor posible: $(n \in Z^+)$

Si k=5, entonces n=1, pero n tiene que ser mayor que 1 para que se forme el cuadrado pequeño. Entonces descartamos esta solución.

Si $\boxed{k = 10}$ entonces en (α)

$5n^2 + 20 = 100 \Rightarrow \boxed{n = 4}$ (este valor si es posible)

∴ Total de alumnos del salón: $5n^2 = 5(4)^2 = 80$

Problemas Propuestos

1. Elena repartió sus ahorros entre 15 mendigos. ¿Cuál es la mínima cantidad de dinero que pudo haber aumentado a lo que repartió para que cada mendigo hubiese recibido exactamente S/.10 más de lo que recibió?

A) S/.120 B) S/.140 C) S/.160
D) S/.130 E) S/.150

2. Se tiene un número impar, se le añade el par de números impares que le anteceden y los tres números pares que son inmediatamente anteriores a dicho número, dando un resultado de 939 unidades. Halle la suma de cifras del número impar mencionado.

A) 26 B) 15 C) 13
D) 19 E) 20

3. Para envasar 15 000 litros de aceite se disponen de botellas de ½ litro, 1 litro y 5 litros. Por cada botella de 5 litros, hay 10 de un litro y 20 de medio litro. Al terminar de envasar el aceite no sobró ninguna botella vacía. ¿Cuántas botellas habían en total?

A) 14 600 B) 18 600 C) 27 000
D) 24 200 E) 16 000

4. Sobre un estante se pueden colocar 24 libros de RM y 20 libros de RV ó 36 libros de RM y 15 libros de RV. ¿Cuántos de RM únicamente entrarían en el estante?

A) 8 B) 24 C) 240
D) 120 E) 72

5. Con 195 soles se compraron chompas de 7, 8 y 13 soles respectivamente. ¿Cuántas chompas se compraron si en total se compraron el máximo número de chompas y por lo menos se compró uno de cada precio?

A) 23 B) 30 C) 24
D) 26 E) 25

6. Con motivo de su cumpleaños, los hijos de la señora María decidieron hacerle un regalo. Magaly propuso dar cada uno S/.6, pero faltó S/.8 para comprar el regalo, por lo que decidieron optar por contribuir cada uno con S/.7, de esta manera compraron un regalo cuyo precio era la mitad del primero y aún sobró S/.20. ¿Cuál es la suma de los precios de los dos regalos?

A) S/.44 B) S/.22 C) S/.60
D) S/.72 E) S/.66

7. Con billetes de 100 soles y de 50 soles se pagó una deuda de 2 800 soles. El número de billetes de 50 soles excede en 8 al número de billetes de 100 soles. Si los billetes que tenemos de 100 soles, los contamos como billetes de 50 soles y viceversa, ¿qué cantidad de dinero tendríamos?

A) S/.4 500 B) S/.2 900
C) S/.3 200
D) S/.3 800 E) S/.4 200

8. Un comerciante tiene al inicio del día 8 lapiceros de 10 soles cada uno y 4 lapiceros de 20 soles cada uno; si al final del día tiene 120 soles, ¿cuántos lapiceros le sobran si le quedan por lo menos 1 lapicero de cada precio?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 2 E) 3

9. En una granja, por cada gallina hay tres pavos y por cada pavo hay 4 patos. Si en total se han contado 160 patas de animales, ¿cuántos pavos hay?

A) 14 B) 10 C) 15
D) 20 E) 8

10. Un caminante ha recorrido 1 000 metros unas veces avanzando otras retrocediendo. Si sólo ha avanzado 350 metros, ¿cuántos metros recorrió retrocediendo?

A) 300m B) 425 m C) 325 m
D) 280 m E) 345 m

11. Dos depósitos contienen 2587 y 1850 litros de agua y con una bomba se traslada del primero al segundo 4 litros por segundo. ¿Después de cuánto tiempo uno contendrá el doble de litros que el otro?

A) 4 min 37 s B) 3min 21 s C) 4 min 38 s
D) 5 min 24 s E) 3 min 42 s

12. Un maestro y su ayudante trabajan juntos. El primero gana 25 soles por día más que el segundo. Si después de trabajar cada uno el mismo número de días, el primero recibe 1 050 soles y el segundo, 875 soles. ¿Cuál es el jornal del ayudante?

A) S/.120 B) S/.115 C) S/.152
D) S/.125 E) S/.130

13. Tres jugadores A, B y C convienen en que el perdedor de cada partida; duplicará el dinero de los otros dos. Pierden una partida cada uno en orden alfabético y al final cada uno se queda con 40 soles. ¿Con cuánto dinero empezó cada uno?

A) 65 ; 35 y 20 soles.
B) 100 ; 30 y 18 soles.
C) 80 ; 45 y 23 soles.
D) 96 ; 30 y 14 soles.
E) 41 ; 23 y 16 soles.

14. La regla de juego de cierta competencia de azar es que el perdedor de cada partida duplique el dinero de los otros participantes y además les dará S/.10. Si hay 3 personas que están jugando y cada uno pierde una partida y al final tienen cada uno S/.70, halle el dinero inicial del participante que tuvo mayor cantidad.

A) S/. 120 B) S/. 180 C) S/. 110
D) S/. 140 E) S/. 220

15. Maribel va al cine con sus primas y al querer sacar entradas para mezanine de 30 soles cada una, observa que le falta dinero para 3 de ellas, por tal motivo tiene que sacar entradas de 15 soles cada una, entrando todas al cine y sobrándole aún 30 soles para las gaseosas. ¿Cuántas primas fueron al cine con Maribel?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

16. Si compro 2 revistas gastaría 2 soles más que si comprara 3 periódicos. Pero si comprara 5 periódicos gastaría 2 soles más que si comprara 2 revistas. ¿Cuánto cuesta cada periódico?

A) S/. 4 B) S/. 3 C) S/. 5
D) S/. 1,5 E) S/. 2

17. Entre pollos, patos y pavos un granjero tiene en total 75 aves. Si tuviera 12 pavos más, 4 patos más y 7 pollos menos, tendría la misma cantidad de aves de cada especie. El número de pollos que tiene es:

A) 42 B) 33 C) 39
D) 35 E) 40

18. Milagros viaja en el último vagón de un tren, el cual tiene 9 vagones, cuando avanza de un vagón a otro tiene que pagar S/.16 y cuando retrocede de un vagón a otro le pagan S/.12. Si para llegar al primer vagón realizó 24 cambios de vagones, calcule la cantidad que tenía inicialmente si es igual a la suma de lo que pagó y cobró, además lo que pagó excede a lo que cobró en 10 veces la cantidad que pagó por avanzar un vagón.

A) S/. 350 B) S/. 352 C) S/. 298
D) S/. 344 E) S/. 426

19. En un salón de clases, hay 6 asientos desocupados, 9 estudiantes sentados y 3 estudiantes de pie al lado de la pizarra. Si 7 estudiantes salen del salón y 8 entran, ¿cuántos asientos desocupados habrá cuando se sientan todos los alumnos?

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

20. En una familia, el hermano mayor dice:
"Mis hermanos son el doble de mis hermanas". Y la hermana mayor dice:
"Tengo 5 hermanos más que hermanas"
¿Cuántas hijas tiene la familia?

A) 9 B) 11 C) 3
D) 10 E) 8

21. "Pagué 12 centavos por los duraznos que compré al almacenero", explicó la cocinera, "pero me dió dos duraznos extra, porque eran muy pequeños, eso hizo que en total pagara un centavo menos por docena que el primer precio que me dio". ¿Cuántos duraznos compró la cocinera?

A) 14 B) 20 C) 18
D) 12 E) 16

22. Si tú me dieras 2 de tus canicas, tendríamos la misma cantidad; en cambio, si yo te diera 3 de las mías, tú tendrías el doble de los que a mí me quedaría. ¿Cuántas canicas tenemos entre los dos?

A) 40 B) 30 C) 35
D) 60 E) 42

23. María, cada día, gasta la mitad de lo que tiene más 2 soles. Si después de 3 días le queda 30 soles, ¿cuánto tenía al inicio?

A) 234 B) 300 C) 268
D) 240 E) 215

24. Se lanza 3 dados simultáneamente. El triple del resultado del primer dado, más el doble del resultado del segundo dado, más el resultado del tercer dado suman diez. ¿Cuántos posibles resultados pudieron darse?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Una sala tiene 3 metros más de largo que de ancho. Si el largo fuese 3 metros más de lo que es y el ancho fuese dos metros menos, la superficie del piso sería la misma. Halle el área de dicha superficie.

A) 150 m^2 B) 180 m^2 C) 160 m^2
D) 170 m^2 E) 120 m^2

26. Dos señoras llevan al mercado 100 manzanas. Una de ellas tenía mayor número de manzanas que la otra; no obstante, ambas obtuvieron iguales sumas de dinero. Una de ellas le dice a la otra: *"Si yo hubiese tenido la cantidad de manzanas que tú tuviste y tú la cantidad que yo tuve, hubiésemos recibido respectivamente 15 y 20/3 soles."* ¿Cuántas manzanas tenía cada una?

A) 30 y 70 B) 45 y 55 C) 20 y 80
D) 40 y 60 E) 48 y 52

27. Un comerciante compró 2 500 botellas a 20 soles el ciento. En el camino se el rompieron 190 botellas y luego regala 5 botellas por cada 100 que vendía. ¿En cuánto vendió el ciento si en total ganó 116 soles?

A) S/.30 B) S/.32 C) S/.25
D) S/.28 E) S/.26

28. Un estudiante gasta 7 soles en pasajes cuando va a una conferencia. Si en n días ha gastado p soles. ¿Cuántos días no asistió a la conferencia durante los n días?

A) $n - \frac{p}{2}$ B) $n - \frac{p}{7}$ C) $n - \frac{p}{n}$

D) $p - \frac{n}{7}$ E) $p - \frac{n}{7p}$

29. Un tren al final de su recorrido llega con 40 adultos y 30 niños con una recaudación de 20 soles. Cada adulto y cada niño pagan pasajes únicos de 0,2 y 0,1 soles respectivamente. ¿Con cuántos pasajeros salió de su paradero inicial si en cada parada suben 3 adultos con 2 niños y bajan 2 adultos junto con 5 niños?

A) 160 B) 70 C) 80
D) 120 E) 90

30. Una señora quiso comprar cierto número de limones con cierta suma de dinero, pero al ver que el precio de cada limón había bajado en S/.2, compró 4 limones más por la misma suma. Si el número de soles que pagó por cada limón y el número de limones que compró suman 16, ¿cuánto gastó en la compra de limones?

A) S/.10 B) S/.60 C) S/.64
D) S/.48 E) S/.72

31. Un poste de a metros de longitud está pintado de rojo y blanco. Si se pinta b metros más de blanco, la mitad del poste estaría pintado de rojo. ¿Cuántos metros de poste están pintado de blanco?

A) $\frac{a-2b}{2}$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{a-b}{2}$

D) $\frac{a}{2+b}$ E) $\frac{a}{2-b}$

32. Un vendedor afirma que como hoy vendió cada caramelo a 10 céntimos más que ayer, vendió 10 caramelos menos que ayer. Además hoy vendió tantos caramelos como céntimos cobró por cada uno. Respecto a la venta de ayer, ¿cuánto ganó o perdió hoy día?

A) ganó 10 céntimos.
B) ganó S/.1.
C) perdió S/.1.
D) perdió 10 céntimos.
E) no gana ni pierde.

33. De un grupo de caramelos retiro 5 y el resto los reparto entre un grupo de niños a quienes les doy 11 caramelos a cada uno, menos al último a quien le doy 15. Si antes de repartirlos retirase 20 caramelos más ahora sólo podría darles 9 caramelos a todos menos al último a quien ahora sólo podrían darle 5 caramelos. ¿Cuántos niños hay?

A) 6 B) 9 C) 11
D) 75 E) 30

34. En el tercer día de su viaje, una nave del planeta Pin llega al planeta Pum. Al bajar a la superficie uno de sus tripulantes le dice a su compañero: *"Los habitantes de este planeta, aunque tienen 20 dedos en total como nosotros, tiene una extremidad menos y un dedo más en cada extremidad."* ¿Cuántas extremidades tienen los habitantes del planeta Pum?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 6 E) 10

35. Un comerciante compró telas de dos calidades por el valor de 300 soles. De la primera calidad adquiere 6m más que de la segunda. Si por la tela de la primera calidad hubiera pagado el precio de la segunda, su costo hubiera sido 180 soles; pero, si por la tela de la segunda calidad hubiera pagado el precio de la primera, el costo hubiera sido 120 soles. ¿Cuántos metros compró de cada calidad?

A) 10 m y 16 m B) 14 m y 20 m
C) 8 m y 14 m
D) 18 m y 12 m E) 11 m y 17 m

36. Un asta de metal se rompió en cierto punto quedando con la parte de arriba doblada a manera de gozne y la punta tocando el piso en un punto localizado a 20 pies de la base. Se reparó, pero se rompió de nuevo. Esta vez en un punto localizado 5 pies más abajo que la vez anterior y la punta tocando el piso a 30 pies de la base. ¿Qué longitud tenía el asta?

A) 43 pies B) 55 pies C) 58 pies
D) 50 pies E) 62 pies

37. Si se corta una banda de un centímetro de ancho de todo el contorno de una hoja rectangular de papel, su área disminuye en 66 cm^2; si, además, se sabe que el largo excede al ancho en 5 cm antes de cortarse, ¿cuál es el largo y el ancho de la hoja original del papel?

A) 20 cm y 26 cm
B) 30 cm y 35 cm
C) 21 cm y 25 cm
D) 17 cm y 22 cm
E) 15 cm y 20 cm

38. Si se posaran (n-1) jilgueros en cada uno de los n postes, sobrarían 10 jilgueros; pero si en cada poste se posaran 3 jilgueros más, quedarían 2 postes vacíos. ¿Cuánto es la mitad del número de postes?

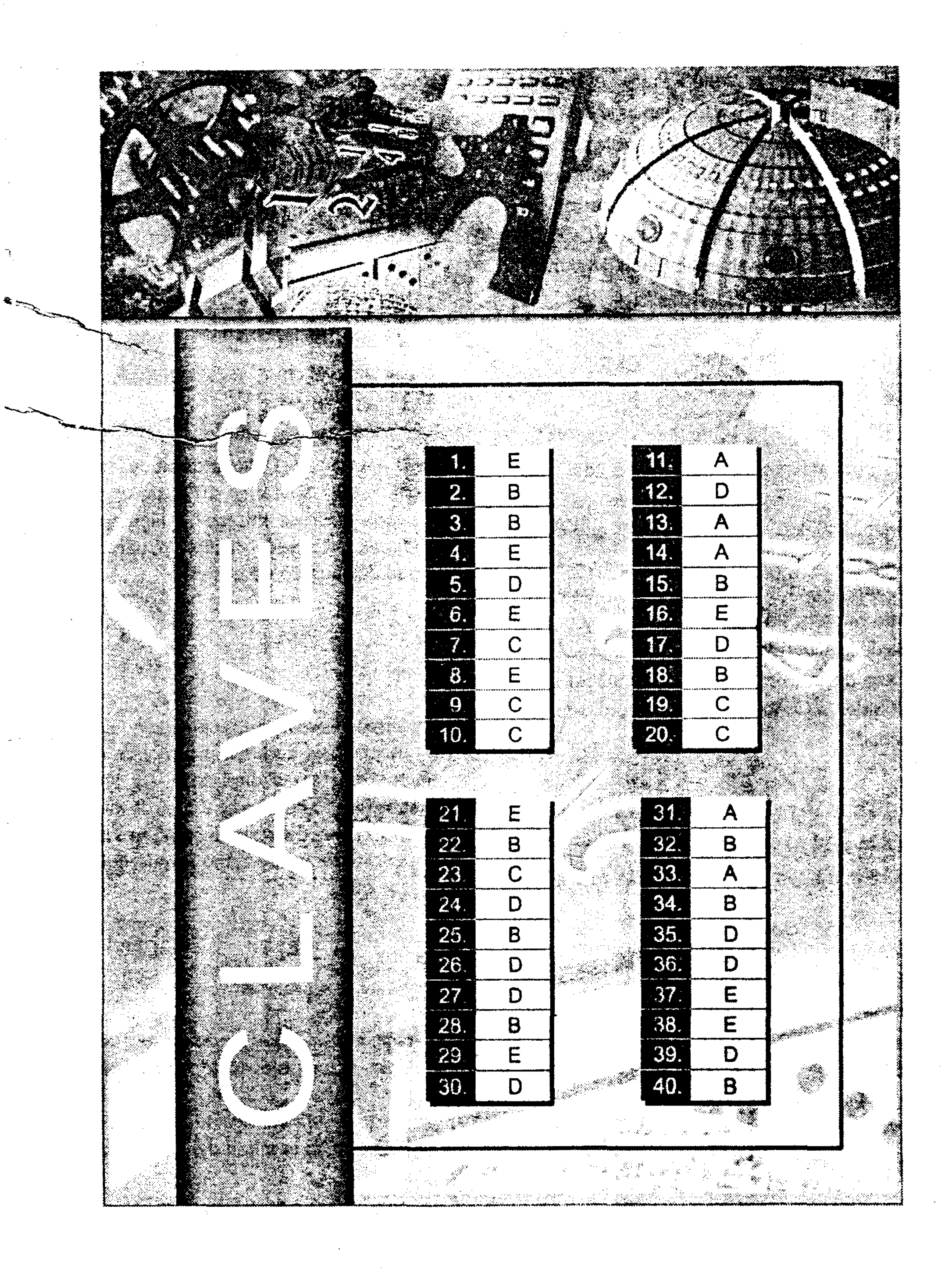
A) 14 B) 10 C) 8
D) 12 E) 7

39. Un terreno tiene forma rectangular. Si tuviera 5 metros más de largo y 5 metros más de ancho, su área se duplicaría. Si tuviera 2 metros menos de largo y 2 metros menos de ancho, el área disminuiría en 46 m^2. Halle el área del terreno y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 5 B) 7 C) 8
D) 6 E) 9

40. Al regalar el Sr. Pérez tantas veces 5 céntimos de soles como soles tenía en su bolsillo, le quedó 38 soles. ¿Cuántos soles le hubiera quedado si hubiera regalado tantas veces 50 céntimos como la mitad del número de soles que tenía?

A) 20 B) 30 C) 35
D) 25 E) 40



CLAVES

1.	E	11.	A	21.	E	31.	A
2.	B	12.	D	22.	B	32.	B
3.	B	13.	A	23.	C	33.	A
4.	E	14.	A	24.	D	34.	B
5.	D	15.	B	25.	B	35.	D
6.	E	16.	E	26.	D	36.	D
7.	C	17.	D	27.	D	37.	E
8.	E	18.	B	28.	B	38.	E
9.	C	19.	C	29.	E	39.	D
10.	C	20.	C	30.	D	40.	B

Tartaglia y Cardano: Sobre la Ecuación de Tercer Grado

Los babilonios ya conocían reglas para resolver ecuaciones de segundo grado en forma de problemas (1 700 a.n.e.), como el de hallar 2 números conociendo su suma y su producto. Más adelante los griegos perfeccionaron ese conocimiento pues demostraron tales reglas y consiguieron, mediante la utilización de procedimientos geométricos, obtener raíces irracionales aún en una época en que los números irracionales todavía no eran conocidos. En 1 494 el monje Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, renombrado profesor de matemática, escribió el libro Suma de Aritmética y Geometría un buen compendio de matemática, que contiene nociones de cálculo aritmético, radicales, problemas con ecuaciones de primer grado y segundo grado. Hasta la aparición del álgebra de Raphael Bombelli, en 1 752, el libro de Luca Pacioli tuvo gran divulgación y prestigio. Como era costumbre, la incógnita que hoy llamamos x *en él se denominaba "la cosa" mientras que* x^2 *era "censo",* x^3 *era "cubo" y* x^4 *"censo censo". El Álgebra en esa época era llamada "el arte de la cosa", después de enseñar, en forma de versos, la regla para resolver la ecuación de segundo grado, Pacioli afirmaba que no podía haber regla general para la solución de una ecuación cúbica.*

Muchos matemáticos, entre ellos Girolamo Cardano, creyeron esa afirmación perentoria de Pacioli, por lo menos, uno no la creyó. Scipione Ferro (1 465 – 1 526), profesor de la Universidad de Bolonia, personaje sobre cuya vida muy poco se conoce, fue quien pudo resolver la ecuación cúbica. Hasta donde se sabe, nadie superó su logro, al resolver un problema que haya desafiado el ingenio de los matemáticos por más tiempo. Lo curioso es que Ferro nunca publicó su solución. Se sabe que él comunicó a dos personas el secreto de la solución uno era Annibale Della Nave (más tarde su yerno y sucesor en la silla de Matemática en Bolonia) y Antonio María Fiore, a este último le dio la regla pero no la prueba. Probablemente el descubrimiento haya sido en 1 515. En 1 535 Fiore tuvo la infeliz idea de desafiar a Tartaglia (Nicolo Fontana) para una contienda matemática. Tartaglia era profesor en Venecia y ya había derrotado a otros desafiantes. Fiore propuso 30 problemas, todos tenían que ver con ecuaciones de 3er. grado. Tartaglia hizo también su lista de naturaleza más variada. La única arma de Fiore era la fórmula de Ferro. Las de Tartaglia eran su sólido conocimiento y su inteligencia. Ocho días antes del encuentro, después de largos intentos, a Tartaglia se le ocurrió cómo deducir la fórmula de la ecuación de 3er. grado. Sin duda esto fue un descubrimiento notable, pero no tanto como el de Ferro.

Llegó la hora de la contienda y Tartaglia resolvió de un golpe los 30 problemas de Fiore, ganó la contienda y rehusó magnánimamente los 30 banquetes estipulados como recompensa al ganador. Luego el doctor Girolamo Cardano, al enterarse de este incidente, se interesa por conocer más de cerca a los autores de la solución de la ecuación cúbica, que Pacioli juzgara imposible. Cardano hizo todo lo posible para llevar a Tartaglia a su casa y una vez allí, mediante la promesa de guardar el secreto, obtuvo de él, en 1 539 la regla para resolver la ecuación $x^3 + px = q$.

La vida de Nicoló Tartaglia (1 499 + 58 = 1 557) fue muy difícil. Nacido en Brescia, quedó huérfano de padre a los seis años y fue criado, con sus tres hermanos por una madre devota y paupérrima. A los 14 años, en el saqueo de Brescia por las tropas francesas, se refugió en la Catedral pero, allí mismo, fue herido seriamente en el rostro por golpes de sable que le dejaron desfigurado y, por largo tiempo, casi sin poder hablar.

Esto le valió el apodo de Tartaglia (el tartamudo), que posteriormente asumió como sobrenombre. Aprendió solo, "solamente en compañía de una hija de la pobreza llamada Diligencia, estudiando continuamente las obras de los difuntos". Superó todas las dificultades y consiguió llegar al límite del conocimiento de la época en matemática, mecánica, artillería y agrimensura. Descubrió la ley de formación de los coeficientes de $(x + a)$ y fue autor de algunos descubrimientos sobre tiro y fortificaciones. Por esta causa, soñaba con obtener recompensa del comandante militar de Milán. Éste fue el señuelo usado por Cardano para atraerlo.

Girolamo Cardano (1 501 - 1 576). Era médico, astrónomo, astrólogo, matemático, filósofo, jugador inveterado e investigador incansable, cuya curiosidad de interés por todos los tipos de conocimiento no tenían límites. Había conseguido mejorar varios asuntos tratados por Pacioli y Cardano pretendía publicar un libro de álgebra, ayudado por su brillante y fiel discípulo Ludovico Ferrari. Después de la visita de Tartaglia, Cardano, con algún esfuerzo, consiguió demostrar la validez de la regla para resolver la ecuación $x^3 + px = q$. En aquella época, no se acostumbraba concentrar los términos de una ecuación en el primer miembro y dejar sólo cero después del signo de igualdad. Ni se percibía que una ecuación sin el término x^2 era lo mismo que tener el mismo término con coeficiente cero. Cardano mostró que la sustitución $x = y - a/2$ permite eliminar el término en x^2 en la ecuación $x^3+ax^2+bx++c=0$ y, en total, dedujo las fórmulas para resolver 13 tipos de ecuaciones de tercer grado!. Evidentemente, hoy esas fórmulas se reducirían a una única. Pero es necesario observar que en aquel tiempo todas las ecuaciones eran numéricas. (El uso de letras para representar números en álgebra tuvo inicio con Francois Viete, en 1 591). Luego, en rigor, no había fórmulas y sí recetas o reglas, explicadas con ejemplos numéricos, una regla para $x^3+px=q$, otra para $x^3+px^2=q$, etc.

Los estudios de Cardano, hechos con la colaboración de Ferrari, quien obtuvo una solución por radicales de la ecuación de cuarto grado, condujeron a importantes avances en la teoría de ecuaciones, como el reconocimiento de raíces múltiples en varios casos, relaciones entre coeficientes y raíces, y la aceptación de raíces negativas, irracionales e imaginarias. Cardano nunca enunció explícitamente que una ecuación cualquiera de tercer grado debe tener tres raíces y una de cuarto grado, cuatro raíces. Esto fue hecho después por Bombelli. Todos esos progresos eran razones más que suficientes para la publicación de un libro sobre el asunto. Pero él estaba impedido de hacerlo en virtud de su juramento a Tartaglia.

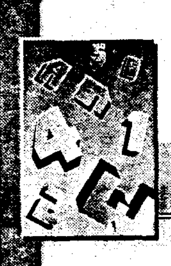
En 1 542, entretanto, Cardano y Ferrari visitaron Bolonia y allí obtuvieron permiso de Della Nave para examinar los manuscritos dejados por Ferro, entre los cuales estaba la solución de la ecuación $x^3+px=q$. El juramento de Cardano le prohibía publicar la solución de Tartaglia pero no la de Ferro, obtenida mucho antes. Por eso, él se consideró eximido de cualquier compromiso y se volcó, con energía, a la preparación de su gran libro Ars Magna, que fue publicado en 1 545. La aparición de esa notable obra fue recibida favorablemente por los entendidos pero produjo una reacción bastante desfavorable de Tartaglia.

En efecto, en el año siguiente (1 546), Tartaglia publica los Quesiti e Inventioni Diverse, libro ya mencionado anteriormente, en donde él, además de presentar soluciones para varios problemas que le fueron propuestos, describe hechos autobiográficos y cuenta la historia de sus relaciones con Cardano, a quien ataca ásperamente por romper un juramento solemne.

PROBLEMAS SOBRE EDADES

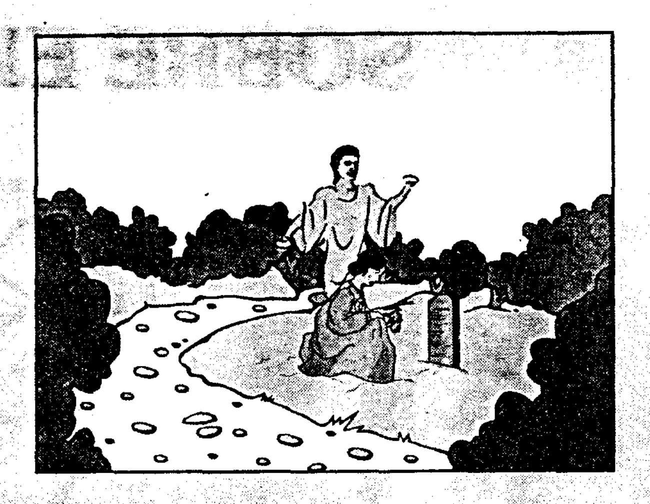
"La escalera de la sabiduría tiene sus peldaños hechos de números"
Blavatski

Una forma práctica para desarrollar y potenciar las habilidades adquiridas en el tema Planteo de ecuaciones consiste en resolver problemas sobre edades.



Lectura 6

El enigma de la edad de Diofanto



Fue Diofanto quien por primera vez introdujo letras y signos para los cálculos, de allí que a su Álgebra se le ha llamado "Álgebra sincopada" que antecede al Álgebra simbólica actual. Un problema atribuido a Hypatia de Alejandría y colocado en la lapida de su tumba nos señala con precisión la edad que tuvo al morir:

"¡Caminante esta tumba contiene a Diofanto!¡Oh gran maravilla! -Y la tumba dice con arte la medida de su vida - Dios hizo que fuera niño una sexta parte de su vida. Añadiendo un doceavo, las mejillas tuvieron la primera barba. Le encendió el fuego nupcial después de un séptimo,y en el quinto año después de su boda le concedió un hijo. Pero ¡ay!, niño tardío y desgraciado, en la mitad de la medida de la vida de su padre, lo arrebató la helada tumba. Después de consolar su pena en cuatro años con esta ciencia del cálculo, llegó al término de su vida".

Dime ¿Cuántos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte?

Este epitafio plantea la siguiente ecuación, donde x representa la edad que tuvo cuando murió:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x \qquad x = 84$$

La solución de esta ecuación nos dice que Diofanto murió a los 84 años de edad. Además, podemos deducir que fue niño hasta los 14 años, le salió la barba a los 21, se casó a los 33 y tuvo un hijo a los 38, el cual murió cuando su padre tenía 80 años.

FUENTE : El Matemática moderna 1 Rubén Romero Méndez

PROBLEMAS SOBRE EDADES

Objetivos

1. Ejercitar las capacidades para resolver los diferentes tipos de problemas sobre edades.
2. Utilizar, de manera adecuada, las tablas de doble entrada para la resolución de problemas sobre edades que involucren a 2 o más sujetos.
3. Aplicar métodos prácticos para el planteo y resolución de los problemas de manera rápida y sencilla.
4. Consolidar lo aprendido en el tema: Planteo de Ecuaciones, mediante la resolución de problemas que constituyen una continuación de dicho tema ya estudiado.

Introducción

Como podrás apreciar en la lectura final, la leyenda encerraba un problema sobre la vida de Diofanto, en el cual nos pide calcular la edad que tuvo al morir este insigne matemático griego.

Así como éste, existen muchos problemas en los cuales la incógnita es la edad de uno o más sujetos. Este tipo de problemas serán objeto de nuestro estudio en el presente capítulo.

Como estos ejercicios tienen un texto que debemos interpretar y traducir, cabe plantear la siguiente interrogante: ¿Por qué no se estudiaron este tipo de problemas en el capítulo anterior sobre Planteo de Ecuaciones? Lo que sucede es que esta clase de ejercicios pueden ser resueltos empleando formas particulares y prácticas muy interesantes y efectivas (incluso sin ecuaciones), y es por ello que ameritan ser tratados en un capítulo aparte en el cual se propondrán otras técnicas de planteo y resolución de problemas. Resulta conveniente indicar que el presente capítulo es la continuación del tema: planteo de ecuaciones, por lo cual sería adecuado tener un conocimiento básico del mismo.

La importancia del tema aquí desarrollado queda en evidencia por cuanto contribuye a enriquecer nuestro conocimiento de otras técnicas de planteo y resolución de ecuaciones y consolida las ya estudiadas en el capítulo anterior.

En todo problema sobre edades se pueden distinguir principalmente 3 elementos: sujetos, tiempos y edades, sobre ellos trataremos a continuación.

NOCIONES PREVIAS

SUJETOS

Son los protagonistas del problema, a quienes corresponden las edades y que intervienen en el problema.

Ejemplo:

Paola es 5 años menor que **Junior**, pero 3 años mayor que **Kelly**.

TIEMPOS

Es uno de los elementos más importantes, ya que las condiciones del problema ocurren en tiempos diferentes (pasado, presente o futuro) y todo depende de su correcta interpretación. Como hemos mencionado, los tiempos pueden ser: pasado, presente y futuro. Es decir:

Tiempos	Expresiones
Presente En un problema existe un solo presente. Se le identifica por las siguientes expresiones:	◆ Tengo... ◆ Tienes... ◆ Tenemos... ◆ Hoy la edad... ◆ La suma de nuestras edades es..... ◆ Etc.
Pasado En un problema pueden darse uno o más pasados. Se le identifica por las siguientes expresiones:	◆ Hace... ◆ Tenía, tuve... ◆ Teníamos... ◆ Tenías, tuviste... ◆ Tuvimos ... ◆ La suma de nuestras edades fue... ◆ Etc.
Futuro En un problema pueden darse uno o más futuros. Se le identifica por las siguientes expresiones:	◆ Dentro de.. ◆ Tendremos ... ◆ Tendré... ◆ Tendrás... ◆ La suma de nuestras edades será... ◆ Etc.

EDAD

La edad representa el tiempo de vida de un sujeto. Entre las edades se establecen determinadas relaciones, llamadas condiciones, las cuales se cumplen en un mismo tiempo o entre tiempos diferentes.

Ejemplo:

Hoy tengo 26 años, pero dentro de 4 años tendré el doble de la edad que tenía hace 11 años.

Tiempo	Hace 11 años	Hoy	Dentro de 4 años
Edad	15	26	30

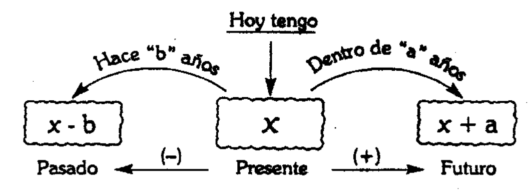
Para facilitar su resolución, clasificaremos los problemas en dos tipos:

CON UN SOLO SUJETO

(Cuando interviene la edad de un solo sujeto)

Esquema:

Si mi edad actual es "x" años, entonces, dentro de "a" años y hace "b" años, mi edad se expresará así:



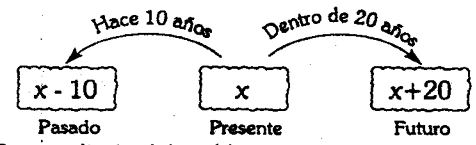
Cuando en el texto de un problema nos mencionan; "Hace..." o "dentro de...", se debe tomar como punto de referencia el tiempo presente; a partir de allí se cuenta el tiempo transcurrido (hace...) o el tiempo a transcurrir (dentro de...).

Ejemplo 1

Dentro de 20 años tendré 3 veces la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tuve hace 3 años?

Resolución:

Asumiendo la edad actual "x" años:



Por condición del problema:

$x + 20 = 3(x - 10)$

$x + 20 = 3x - 30$

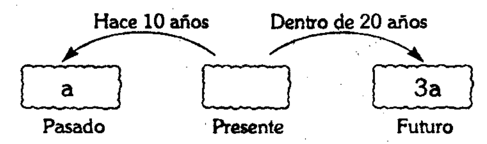
$\Rightarrow \quad x = 25$

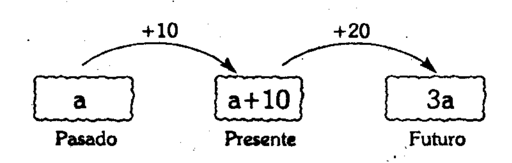
Edad actual : 25 años

$\therefore$ Hace 3 años tuve 22 años.

Otra forma:

Partimos de la relación existente entre la edad del pasado y futuro.





Luego:

$\Rightarrow \quad a + 10 + 20 = 3a \Rightarrow a = 15$

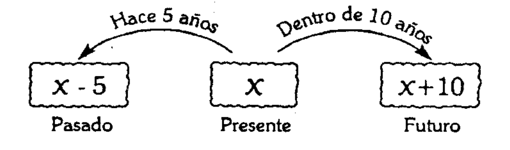
Edad actual : $15 + 10 = 25$ años

$\therefore$ Hace 3 años tuve 22 años.

Ejemplo 2

Cuatro veces la edad que tendré dentro de 10 años, menos 3 veces la edad que tenía hace 5 años, resulta el doble de mi edad actual. ¿Cuántos años me faltan para cumplir 60 años?

Resolución:



Por condición del problema:

$4(x+10)-3(x-5)= 2x$

$\Rightarrow \quad x+55 = 2x$

$\Rightarrow \quad x = 55$ (Edad actual)

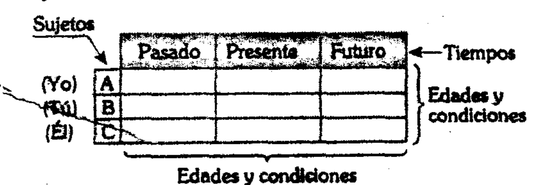
$\therefore$ Para cumplir 60 años me faltan:

$60 - 55 = 5$ años

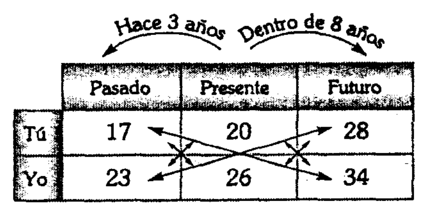
CON VARIOS SUJETOS

(Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos)

Para este tipo de problemas se recomienda utilizar un cuadro de doble entrada, como el que apreciaremos a continuación:



Aquí hay que tener en cuenta dos observaciones importantes, las cuales se apreciarán en el siguiente cuadro:



	Pasado	Presente	Futuro
Tú	17	20	28
Yo	23	26	34

1. La diferencia de edades de dos personas permanece constante en el tiempo (es la misma en el pasado, presente y futuro)

En el pasado		En el presente		En el futuro	
23 – 17	=	26 – 20	=	34 – 28	= 6

2. Las sumas en aspa de valores colocados simétricamente son iguales.

$$17 + 26 = 23 + 20$$
$$20 + 34 = 26 + 28$$
$$17 + 34 = 23 + 28$$

A partir de estas dos consideraciones se plantean dos clases de problemas:

Problemas con tiempo especificado

En estos problemas se hace mención de cuándo va a ocurrir una determinada condición o cuando ya ocurrió; es decir, mencionan *"dentro de cuánto tiempo"* o *"hace cuánto tiempo"* ocurrirá u ocurrió la condición del problema.

Ejemplo 1

Hace 4 años la edad de Ana era el cuádruple de la edad de Juan, pero dentro de 5 años será el triple. Hallar la suma de las edades actuales.

Resolución:

	Hace 4 años	Presente	Dentro de 5 años
Ana	$4x$ →	$4x+4$ →	$4x+9$
Juan	x →	$x+4$ →	$x+9$

De la última condición:

$$4x + 9 = 3(x+9)$$
$$\Rightarrow x = 18$$

Edades actuales:

Ana: $4x + 4 = 4(18) + 4 = 76$

Juan: $x + 4 = 18 + 4 = 22$

$\therefore$ Suma: $76 + 22 = 98$ años

Otra forma:

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	4		3
Juan	1		1

Nota:

Los valores colocados en el cuadro no son las edades correspondientes, sólo son valores que representan los datos del problema.

Para calcular las edades correctas debemos realizar 2 pasos:

Paso 1: Verificar que las diferencias de edades sean iguales.

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	4		3
Juan	1		1
	Dif. = 3		Dif. = 2

Observamos que las diferencias no son iguales, entonces haremos que sean iguales. ¿Cómo? . . . multiplicando en el pasado por 2 y en el futuro por 3 a los valores en el cuadro.

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	8		9
Juan	2		3
	Dif. = 6		Dif. = 6

Observará que ya las diferencias son iguales y además la proporción en los datos no se ha alterado.

Paso 2: Verificar el tiempo que transcurre.

9 años

4 5

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	8		9
Juan	2		3

Observamos que, según los tiempos especificados, del pasado al futuro transcurren 9 años, esto quiere decir que para cada persona deben transcurrir 9 años; sin embargo para cada persona, según sus edades, transcurre sólo 1 año. Para que se cumpla el dato debemos multiplicar por 9 a los valores del cuadro.

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	72		81
Juan	18		27

Podemos observar que para cada persona están pasando 9 años, también se puede comprobar que las diferencias siguen siendo iguales. Esto quiere decir que los valores que tenemos son las edades correspondientes.

Entonces pasamos a calcular las edades actuales:

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 5 años
Ana	72	76	81
Juan	18	22	27

∴ La suma de sus edades actuales es:

$$76 + 22 = 98 \text{ años}$$

Para que se entienda mejor esta forma de resolver este tipo de problemas desarrollaremos un segundo ejemplo:

Ejemplo 2

Dos jóvenes estudiantes conversaban: "Hace 2 años, mi edad era los 4/3 de tu edad", decía el primero. "Sin embargo, dentro de 2 años, mi edad será los 4/5 de tu edad", replicaba el segundo. Halle las edades de los jóvenes y dé como respuesta la suma de ellas.

Resolución:

El 1ro: "Hace 2 años, mi edad era 4/3 de tu edad"

El 2do: "Dentro de 2 años, mi edad será los 4/5 de tu edad"

	Hace 2 años	Actual	Dentro de 2 años
1ro.	4		5
2do.	3		4

Los valores colocados en el cuadro no son las edades correspondientes, sólo son números que representan los datos.

Para calcular la edades debemos realizar 2 pasos:

Paso 1: Verificar que la diferencia de edades sea la misma en ambos casos.

	Hace 2 años	Actual	Dentro de 2 años
Yo	4		5
Tú	3		4
	Dif. = 1		Dif. = 1

Se observa que las diferencias son iguales, entonces realizamos el siguiente paso.

Paso 2: Verificamos el tiempo que transcurre.

4 años

	Hace 2 años	Actual	Dentro de 2 años
1°	4		5
2°	3		4

Observamos que, según los tiempos especificados, el tiempo que transcurre del pasado al futuro es 4 años, esto quiere decir que para cada persona deben transcurrir 4 años, sin embargo se observa que para cada persona sólo transcurre 1 año, para que se cumpla el dato multiplicamos a todas las edades por 4.

	Hace 2 años	Actual	Dentro de 2 años
1ro.	16		20
2do.	12		16

Observará que el tiempo que transcurre para cada uno es 4 años, además las diferencias siguen siendo iguales. Esto quiere decir que estos valores ya son las edades correctas.

Pasamos, entonces, a calcular las edades actuales:

	Hace 2 años	Actual	Dentro de 2 años
1ro.	16	18	20
2do.	12	14	16

∴ La suma de las edades actuales es:

$$18 + 14 = 32 \text{ años}$$

Ejemplo 3

Yo tengo el doble de tu edad, pero él tiene el triple de la mía. Si, dentro de 6 años, él va a tener el cuádruple de la edad que tú tengas, ¿dentro de cuántos años tendré 26 años?

Resolución:

	Presente	Dentro de 6 años
Yo	2x	→ 2x + 6
Tú	x	→ x + 6
Él	6x	→ 6x + 6

De la última condición:

$$\underbrace{6x+6}_{\text{él va a tener}} = \underbrace{4(x+6)}_{\text{tú tengas}} \Rightarrow x=9$$

Yo tengo: $2(9)=18$ años

∴ Tendré 26 años, dentro de 8 años.

Problemas con tiempo no especificado

En estos problemas no se hace mención de cuándo va a ocurrir o cuándo ya ocurrió una determinada condición; es decir, no se especifica el tiempo exacto a transcurrir o ya transcurrido, sólo se limitan a decir que ocurrirá en el futuro o en el pasado.

Ejemplo 1

Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, pero cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será de 63 años. Halle la suma de las edades actuales.

Resolución:

- "Yo tengo el doble de la edad que tú tenías"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo		2x	
Tú	x		

- "Cuando yo tenía la edad que tú tienes"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	y	2x	
Tú	x	y	

Aplicando el criterio de las sumas en aspa:

$$2y = 3x \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2K \\ y = 3K \end{array}$$

Reemplazamos en el cuadro:

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	3K	4K	
Tú	2K	3K	

- "Cuando tengas la edad que tengo la suma de nuestras edades será 63 años"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	3K	4K	5K
Tú	2K	3K	4K

Suma = 63

Este valor lo calculamos aplicando sumas en aspa

Del cuadro:

$$5K + 4K = 63 \Rightarrow K=7$$

Luego:

Edades actuales

Yo : 4(7) = 28 años

Tú : 3(7) = 21 años

∴ **La suma de edades actuales es:**

$$28 + 21 = 49 \text{ años}$$

Ejemplo 2

Yo tengo los 13/9 de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tú tienes. Cuando tengas la edad que yo tengo, la diferencia de nuestras edades será de 6 años. ¿Qué edad tuve yo hace 10 años?

Resolución:

- "Yo tengo $\frac{13}{9}$ de la edad que tú tenías"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo		13x	
Tú	9x		

- "Cuando yo tenía la edad que tú tienes"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	y	13x	
Tú	9x	y	

Aplicamos sumas en aspa

$$2y = 22x \Rightarrow y = 11x$$

Reemplazamos:

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	11x	13x	
Tú	9x	11x	

- "Cuando tengas la edad que yo tengo, la diferencia de nuestras edades será 6 años"

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	11x	13x	15x
Tú	9x	11x	13x

Dif = 6

Este valor lo calculamos aplicando sumas en aspa

Del cuadro:

$$15x - 13x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Luego, las edades en el presente son:

Yo : 13(3) = 39 años

Tú : 11(3) = 33 años

∴ Hace 10 años yo tuve 29 años.

Analicemos la siguiente situación:

Estamos en setiembre del año 2000.

Ana nació en marzo de 1980, por lo tanto tiene 20 años; Betty nació en mayo de 1985, por lo tanto tiene 15 años; Carlos nació en octubre de 1978, por lo tanto tiene 21 años; David nació en diciembre de 1969, por lo tanto tiene 30 años; Elena nació en agosto de 1990, por lo tanto tiene 10 años; Francisco nació en noviembre de 1965, por lo tanto tiene 34 años.

Ahora, sumamos la edad con el año de nacimiento de cada uno.

	Edad		Año de Nacimiento		
Ana	: 20	+	1980	=	2000
Betty	: 15	+	1985	=	2000
Carlos	: 21	+	1978	=	1999
Elena	: 10	+	1990	=	2000
David	: 30	+	1969	=	1999
Francisco	: 34	+	1965	=	1999

Podemos apreciar que para Ana, Betty y Elena el resultado es 2000, independientemente de sus edades y años de nacimiento, esto se debe a que ellos ya cumplieron años (recuerda que estamos en setiembre y ellos nacieron en meses anteriores). En cambio, para Carlos, David y Francisco el resultado es 1999, debido a que aún no han cumplido años (nacieron después de setiembre).

De acuerdo a esto podemos enunciar las siguientes conclusiones:

1. Cuando una persona ya cumplió años, se cumple:

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad actual} = \text{Año actual}$$

2. Cuando una persona aún no cumple años, se cumple:

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad actual} = \text{Año actual} - 1$$

Ejemplo de aplicación

En agosto de 1997, sumé las edades de mis 5 hermanos obteniendo "A"; luego sumé sus años de nacimiento, obteniendo "B". Si al sumar "A" y "B" obtengo 9982, ¿cuántos de mis hermanos aún no cumplen años?

Resolución:

Estamos en 1997, suponiendo que todos ya cumplieron años; entonces:

Edad	+	Año de Nacimiento	=	Año Actual
E_1	+	A_1	=	1997
E_2	+	A_2	=	1997
E_3	+	A_3	=	1997
E_4	+	A_4	=	1997
E_5	+	A_5	=	1997
A (Suma de edades)		B (Suma de años de nacimiento)		9985

Suponiendo que todos ya cumplieron años, "A"+"B" debería resultar 9985; pero según el dato del problema, "A+B" es 9982; se puede observar que en nuestro supuesto hay un exceso de 9985–9982=3 unidades, lo cual significa que 3 de sus hermanos aún no cumplen años.

∴ La respuesta es: 3 personas aún no cumplen años.

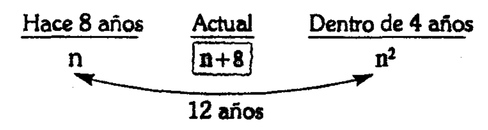
Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

La edad de un niño será, dentro de 4 años, un cuadrado perfecto. Hace 8 años, su edad era la raíz cuadrada de ese cuadrado. ¿Qué edad tendrá dentro de 8 años?

Resolución:

Planteando los datos obtenemos:



Del esquema:

$\Rightarrow$ $n + 12 = n^2 \Rightarrow n^2 - n = 12$

$\Rightarrow$ $n(n-1) = 12 = 4\times3 \Rightarrow n = 4$

Entonces, la edad actual del niño es:

$$4 + 8 = 12 \text{ años}$$

$\therefore$ Dentro de 8 años, tendrá 20 años.

PROBLEMA 2

Si al doble de mi edad se le quita 13 años, se obtendría lo que me falta para tener 50 años. ¿Cuántos años me faltan para cumplir el doble de lo que tenía hace 5 años?

Resolución:

Sea mi edad actual: "x" años,

planteando la condición:

$$\overbrace{2x - 13}^{\text{Al doble de mi edad le quitan 13}} = \overbrace{50 - x}^{\text{Me falta para tener 50 años}}$$

$2x + x = 50 + 13$

$3x = 63 \Rightarrow x = 21$

Entonces, mi edad actual es 21 años

$\Rightarrow$ Para cumplir $\underbrace{2(21-5)}_{\text{Lo que tenía hace 5 años}} = 32$ años

$\therefore$ Me faltan 11 años.

PROBLEMA 3

A una persona se le pregunta por su edad y ésta contesta: "Toma tres veces los años que tendré dentro de 3 años, réstales tres veces los años que tenía hace tres años y resultará, exactamente, los años que tengo ahora". ¿Cuántos años tiene la persona?

Resolución:

Hace 3 años	Edad Actual	Dentro de 3 años
$x - 3$	x	$x + 3$

Luego planteamos:

$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$

resolviendo $x = 18$

$\therefore$ La persona tiene 18 años.

PROBLEMA 4

Si al año que cumplí 10 años le sumamos el año en que cumpliré los 20, y a éste resultado le restas la suma del año en que nací con mi edad actual, obtendremos el año actual. ¿Cuánto resultará al sumar mi edad actual con el año en que cumpliré los 30 años y restarle el año en que cumpliré los 40 años?

Resolución:

Sea el año en que nací: "A"

Sea mi edad actual: "x" años

Año que Nací	Año que cumplí 10 años	Año Actual	Año que cumpliré 20 años
A	A + 10	A + x	A + 20

Planteamos según los datos:

$(A+10) + (A+20) - (A+x) = A + x$

Resolviendo: $x = 15$

Luego:

$$\underbrace{15}_{\text{Edad actual}} + \underbrace{(\cancel{A}+30)}_{\text{Año que cumpliré los 30 años}} - \underbrace{(\cancel{A}+40)}_{\text{Año que cumpliré los 40 años}} = 5$$

∴ El resultado es 5

PROBLEMA 5

A una persona en el año 1965 se le preguntó por su edad y contestó: "Tengo, en años, las dos terceras partes del número que forman las dos últimas cifras del año de mi nacimiento". Halle la suma de las cifras de su edad en dicho año.

Resolución:

Planteando los datos obtenemos:

Año de nacimiento	En 1965 edad:
$\overline{19ab}$	$\frac{2}{3}(\overline{ab})$ años

Luego planteamos:

$$1965 = \frac{2}{3}(\overline{ab}) + \overline{19ab}$$

$$1965 = 1900 + \overline{ab} + \frac{2}{3}(\overline{ab})$$

$$65 = \frac{5}{3}(\overline{ab}) \Rightarrow \overline{ab} = 39$$

Entonces la edad de la persona es:

$$\frac{2}{3}(39) = 26 \text{ años}$$

∴ La suma de cifras de su edad es:

$$2 + 6 = 8$$

PROBLEMA 6

Jorge multiplica la fecha del día de su nacimiento por 12 y el número del mes por 31, luego suma estos dos productos obteniendo 170. ¿Cuándo nació Jorge?

Resolución:

$12d + 31m = 170$

$$\underbrace{12d}_{\text{número par}} + 31m = \underbrace{170}_{\text{número par}}$$

Se deduce que: $31m$ = número par

$\Rightarrow$ $m = 2 ; 4 ; 6 ; \ldots$

Luego:

$12d + 31m = 170$

para $m = 2 \Rightarrow d = 9$

para $m = 4 \Rightarrow d = 3{,}8$ (no es solución)

Tampoco hay solución para otros valores de "m".

$\Rightarrow$ $m = 2$; $d = 9$

Luego el número de mes es 2 y el día es 9.

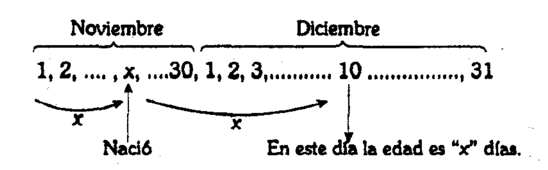
∴ Jorge nació el 9 de febrero.

PROBLEMA 7

Un niño nació en noviembre, el 10 de diciembre tiene una edad igual al número de días transcurridos del 1° de noviembre hasta el día de su nacimiento, inclusive. ¿Qué fecha será cuando, a partir de la fecha de su nacimiento, transcurran tantos días como la mitad de los días que faltan para culminar el mes de su nacimiento?

Resolución:

Planteando los datos obtenemos:



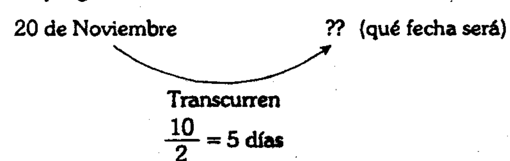
En el gráfico se puede observar que su edad el 10 de diciembre es igual a: $(30 - x + 10)$ días.

Luego planteamos:

$$x = 30 - x + 10 \Rightarrow x = 20$$

Entonces, el niño nació el 20 de noviembre y faltan 10 días para que culmine noviembre.

La pregunta es:



∴ La fecha es 25 de noviembre.

PROBLEMA 8

Irene nació en un año en el cual la suma de las 2 últimas cifras excede en 4 a la suma de las 2 primeras cifras. Además se sabe que a los 24 años tuvo a su segundo hijo. ¿Cuántos años tiene su hija mayor, si se sabe que nació cuando Irene tenía 21 años en un año en el cual se cumple que la diferencia entre dicho año y el año actual es un número impar? Año actual: 2000

Resolución:

Sea $\overline{19ab}$ el año del nacimiento de Irene.

Por condición del problema: $(a + b) - (1+9) = 4$

$\Rightarrow a + b = 14$

Luego, el año $\overline{19ab}$ podrá ser:

$\overline{19ab}$
1959
1968
1977
1986
1995

(1977, 1986, 1995) Se desechan, pues ella tendría a lo sumo 23 años (hasta el 2000) y el dato dice que tuvo a su segundo hijo a los 24 años.

Analicemos:

Si nació en 1959, entonces tuvo 21 años en 1980 por condición: 2000 – 1980 = 20 (# par), lo cual contradice el dato de que esta diferencia es impar.

Si nació en 1968, entonces en el año 1989 tuvo 21 años y, precisamente, la diferencia entre este año 1989 y el año actual (2000) sería de 11 años (# impar).

∴ Su hija nació en 1989 y actualmente tiene 11 años.

PROBLEMA 9

Cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tú tienes, tú tuviste la mitad de tu edad actual. En cambio cuando yo tenía la mitad de la edad que tengo, la suma de nuestras edades era 48 años. ¿Cuál es la edad que tengo?

Resolución:

- "Cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tú tienes"

	Tuve / Tuviste	Tenía / Tenías	Tengo / Tienes
Yo	x		
Tú			$3x$

- "Tú tuviste la mitad de tu edad actual"

	Tuve / Tuviste	Tenía / Tenías	Tengo / Tienes
Yo	x		
Tú	$3x/2$		$3x$

Podemos duplicar todos los valores sin alterar en absoluto los datos del problema.

	Tuve Tuviste	Tenía Tenías	Tengo Tienes
Yo	$2x$		$5x$
Tú	$3x$		$6x$

Ha sido calculado aplicando sumas en aspa

- "En cambio cuando yo tenía la mitad de la edad que tengo, la suma de nuestras edades era 48 años"

	Tuve Tuviste	Tenía Tenías	Tengo Tienes
Yo	$2x$	$5x/2$	$5x$
Tú	$3x$		$6x$

Suma = 48

Duplicamos todos los valores en el cuadro:

	Tuve tuviste	Tenía tenías	Tengo tienes
Yo	$4x$	$5x$	$10x$
Tú	$6x$	$7x$	$12x$

Suma = 48

Ha sido calculado aplicando sumas en aspa

Del cuadro se tiene:

$$5x + 7x = 48 \Rightarrow x = 4$$

$\therefore$ Yo tengo: 10(4) = 40 años

PROBLEMA 10

Cuando tú tenías la mitad de la edad que yo tengo, yo tenía la edad que tú tienes; y cuando tú tengas la edad que yo tengo, la diferencia de nuestras edades será de 8 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

- "Cuando tú tenías la mitad de la edad que yo tengo"

	Tenía Tenías	Tengo Tienes	Tenga Tengas
Yo		$2x$	
Tú	x		

- "Yo tenía la edad que tú tienes"

	Tenía Tenías	Tengo Tienes	Tenga Tengas
Yo	y	$2x$	
Tú	x	y	

Aplicando sumas en aspa

$$2y = 3x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} y = 3K \\ x = 2K \end{matrix}$$

Reemplazando:

	Tenía Tenías	Tengo Tienes	Tenga Tengas
Yo	3K	4K	
Tú	2K	3K	

- "Cuando tú tengas la edad que yo tengo, la diferencia de nuestras edades será de 8 años"

	Tenía Tenías	Tengo Tienes	Tenga Tengas
Yo	3K	4K	5K
Tú	2K	3K	4K

Dif = 8

Lo calculamos aplicando sumas en aspa

$$5K - 4K = 8 \Rightarrow K = 8$$

$\therefore$ Yo tengo: 4(8) = 32 años

PROBLEMA 11

Omar le dice a Óscar: "Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, yo tendré el doble de la edad que tenías hace 12 años". ¿Cuánto suman sus edades actuales?

Resolución:

Al plantear los datos obtenemos:

	Pasado	Presente	Futuro
Omar (Yo)	$4x$	$9x$	$10x$
Óscar (Tú)	$3x$	$8x$	$9x$

Por condición: $\underbrace{10x}_{\text{yo tendré}} = 2\underbrace{(8x-12)}_{\text{tú tenías hace 12 años}}$

Resolviendo: $x = 4$

Luego, las edades actuales son:

Omar : $9(4) = 36$ años

Óscar: $8(4) = 32$ años

$\therefore$ Las edades actuales suman

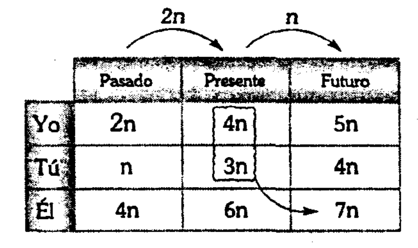
$36 + 32 = 68$ años

PROBLEMA 12

Cuando tú tengas la edad que yo tengo, tendrás lo que él tenía, cuando tenías la tercera parte de lo que tienes y yo tenía la tercera parte de lo que él tiene, que es 5 años más de los que yo tendré cuando tengas lo que ya te dije y él tenga lo que tú y yo tenemos. Entonces yo tengo:

Resolución:

Del enunciado:



	Pasado	Presente	Futuro
Yo	2n	4n	5n
Tú	n	3n	4n
Él	4n	6n	7n

Por condición:

Lo que él tiene es 5 años más de los que yo tendré.

$6n - 5n = 5 \Rightarrow n = 5$

$\therefore$ Yo tengo $4(5) = 20$ años

PROBLEMA 13

Dentro de 8 años, la edad de un padre será el doble de la edad que tendrá su primer hijo; dentro de 10 años, la edad del padre será el doble de la edad que tendrá su segundo hijo y, dentro de 16 años, la edad del padre será el doble de la edad de su tercer hijo. Si la edad del padre excede en 4 años a la suma de las edades de sus tres hijos, ¿cuántos años tiene el padre?

Resolución:

Planteando los datos obtenemos:

	Presente	Dentro de 8 años
Padre	$2x-8$	$2x$
1er Hijo	$x-8$	x
2do Hijo		
3er Hijo		

	Presente	Dentro de 8 años	Dentro de 10 años
Padre	$2x-8$	$2x$	$2x+2$
1er Hijo	$x-8$	x	
2do Hijo	$x-9$		$x+1$
3er Hijo			

	Presente	Dentro de 8 años	Dentro de 10 años	Dentro de 16 años
Padre	$2x-8$	$2x$	$2x+2$	$2x+8$
1er Hijo	$x-8$	x		
2do Hijo	$x-9$		$x+1$	
3er Hijo	$x-12$			$x+4$

Por condición:

Padre — Suma de edades de los hijos

$(2x-8)-[(x-8)+(x-9)+(x-12)]=4$

$(2x-8)-(3x-29)=4$

Resolviendo: $x=17$

∴ La edad actual del padre es:

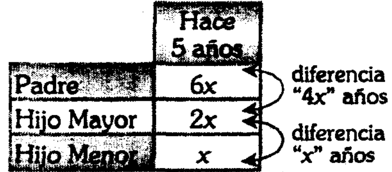
$$2x-8=2(17)-8=26 \text{ años}$$

PROBLEMA 14

Hace 5 años, la edad de un hijo se diferenciaba en el doble de su edad con la edad de su padre, y en la mitad de su edad con la edad de su hermano menor. Si dentro de 7 años, el menor tendrá la edad que tiene su hermano mayor, calcular la edad que tuvo el padre cuando nació su primer hijo.

Resolución:

Al plantear los datos del problema obtenemos:



	Hace 5 años
Padre	6x
Hijo Mayor	2x
Hijo Menor	x

Luego:

	Hace 5 años	Presente	Dentro de 7 años
Padre	$6x$	$6x+5$	
Hijo Mayor	$2x$	$2x+5$	
Hijo Menor	x	$x+5$	$x+12$

Por condición:

Dentro de 7 años el menor tendrá la edad que tiene su hermano mayor.

El menor tendrá — El mayor tiene

$x+12=2x+5 \Rightarrow x=7$

Luego:

Edad del padre: $6(7)+5=47$ años

Edad del hijo mayor: $2(7)+5=19$

∴ Cuando el hijo mayor nació el padre tenía:

$$47-19=28 \text{ años}$$

PROBLEMA 15

Yo tengo el doble de tu edad, pero él tiene el triple de la mía. Si, dentro de 6 años, él va a tener el cuádruple de la edad que tú tengas, ¿dentro de cuántos años tendré 20 años?

Resolución:

	Presente	Dentro de 6 años
Yo	$2x$	$2x+6$
Tú	x	$x+6$
Él	$6x$	$6x+6$

Por condición:

el tendrá — tú tengas

$6x+6=4(x+6) \Rightarrow x=9$

Entonces, yo tengo $2(9)=18$ años

∴ Dentro de 2 años tendré 20 años.

PROBLEMA 16

Se sabe que, de hoy a 5 años, "A" será tan viejo como lo es hoy "B", quien tiene la cuarta parte de la edad que tendrá "C" en ese entonces. Hallar la suma de las edades de los tres dentro de 10 años si, además, "C" es mayor que "B" en 16 años.

Resolución:

Del enunciado obtenemos:

	Presente	Dentro de 5 años	Dentro de 10 años
A	$x-5$	x	
B	x		
C	$x+16$	$4x$	

Suma = ? ?

5

Del cuadro: $(x + 16) + 5 = 4x$

$\Rightarrow x = 7$

Reemplazando en el presente:

	Presente	Dentro de 10 años
A	2	12
B	7	17
C	23	33

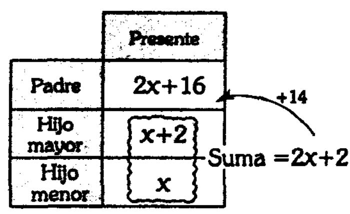
∴ Suma: $12 + 17 + 33 = 62$ años

PROBLEMA 17

Hace 10 años la suma de las edades de dos hijos era 1/3 de la edad de su padre. Si el hijo mayor tiene 2 años más que el otro y la suma de sus edades actuales es 14 años menos que la de su padre, ¿cuántos años tiene uno de los hijos?

Resolución:

"El hijo mayor tiene 2 años más que el otro y la suma de sus edades es 14 años menos que la de su padre"



	Presente
Padre	2x+16
Hijo mayor	x+2
Hijo menor	x

	Hace 10 años	Presente
Padre	$2x + 6$	$2x + 16$
Hijo mayor	$x - 8$	$x + 2$
Hijo menor	$x - 10$	x

"Hace 10 años la suma de las edades de los hijos era 1/3 de la de su padre"

$$\underbrace{(x-8) + (x-10)}_{\text{suma de los hijos}} = \frac{1}{3}\underbrace{(2x+6)}_{\text{padre}}$$

Resolviendo: $x=15$

Como nos piden la edad de uno de los hijos, no especifican si el menor o el mayor, entonces:

∴ Hijo mayor: 17 años

Hijo menor: 15 años

PROBLEMA 18

A principios de los años ochenta, un maestro universitario tuvo una edad igual a la raíz cuadrada del año de su nacimiento. ¿En qué año cumplió 60 años?

Resolución:

Asumimos año de nacimiento: a^2

Principios de los años ochenta: $\overline{198n}$

$$\underbrace{\text{Año de nacimiento : } a^2}_{\text{edad: 0 años}} \qquad \underbrace{\text{En } \overline{198n}}_{\text{edad: "a" años}}$$

"a" años

Luego $\overline{198n} - a = a^2$

$\Rightarrow a^2 + a = \overline{198n}$

Tabulando $\begin{cases} 43^2 + 43 = 1892 \text{ (No)} \\ 44^2 + 44 = 1980 \text{ (Si)} \\ 45^2 + 45 = 2070 \text{ (No)} \end{cases}$

Luego concluimos que:

Año de nacimiento es: $44^2 = 1936$

∴ Cumplió 60 años en el año:

$$1936 + 60 = 1996$$

PROBLEMA 19

Luis dice: "Mi tía tiene 2 veces mi edad actual; su edad es el séxtuplo de la edad que mi enamorada tenía cuando yo tenía 2 años más de la edad que mi enamorada tiene; pero cuando yo tenga el cuádruplo de la edad que mi enamorada tiene, la suma de las 3 edades será 221 años. Si mi suegra nació tres años antes que mi tía y tuvo a su hijo Fredy cuando tenía 23 años, ¿cuántos años más que yo tiene Fredy?

Resolución:

Del enunciado:

	Pasado	Presente	Futuro
Luis	$y + 2$	$3x$	4 y
Enamorada	x	y	
Tía		$6x$	

Suma = 221

Aplicamos sumas en aspa:

$$y + 2 + y = x + 3x \Rightarrow y = 2x - 1$$

	Pasado	Presente	Futuro
Luis	$2x + 1$	$3x$	$8x - 4$
Enamorada	x	$2x - 1$	$7x - 5$
Tía		$6x$	$11x - 4$

Suma = 221

Han sido calculados aplicando sumas en aspa

Luego:

$(8x - 4) + (7x - 5) + (11x - 4) = 221$

$\Rightarrow x = 9$

A partir de lo obtenido, calculamos las edades actuales:

- Luis: 27 años
- Enamorada: 17 años
- Tía: 54 años

La suegra nació 3 años antes que la tía; entonces tiene 3 años más, es decir, 54+3=57 años.

Conclusión:

Fredy: 57–23=34 años (tiene 23 años menos que su mamá)

$\therefore$ Fredy tiene $34 - 27 = 7$ años más que Luis

PROBLEMA 20

Rosa le dice a Eva: "Cuando yo tenía tu edad, María tenía 10 años"; y Eva le responde: "Cuando yo tenga tu edad, María tendrá 26 años". María añade: "Si sumamos los años que ustedes me llevan de ventaja, resultará el doble de mi edad actual". ¿Cuál es la edad de la mayor?

Resolución:

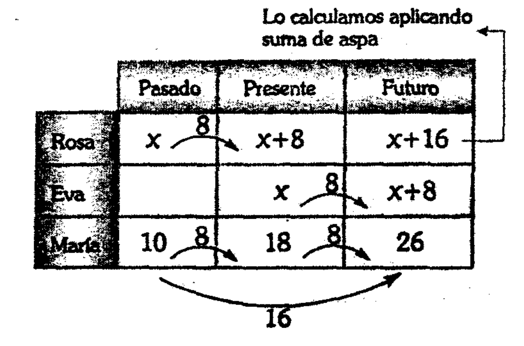
Del enunciado:

	Pasado	Presente	Futuro
Rosa	x	y	
Eva		x	y
María	10		26

16

Observará que del pasado al presente (ver a Rosa) el tiempo que transcurre es el mismo tiempo que transcurre del presente al futuro (ver Eva).

Entonces:



Lo calculamos aplicando suma de aspa

	Pasado	Presente	Futuro
Rosa	x → 8	$x+8$	$x+16$
Eva		x → 8	$x+8$
María	10 → 8	18 → 8	26

16

María dice:

Ventaja de Rosa a María; Ventaja de Eva a María

$$(x + 8 - 18) + (x - 18) = 2(18) \Rightarrow x = 32$$

La mayor de las tres es Rosa.

$\therefore$ La edad de Rosa: $32 + 8 = 40$ años

PROBLEMA 21

Jorge le dice a Luis: "La suma de nuestras edades es 46 años y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando yo nací. "Entonces, ¿cuántos años tiene Luis actualmente?

Resolución:

Del enunciado:

	Cuando Jorge nació	Pasado	Presente
Jorge	0	3x	11x
Luis	x	4x	12x

Suma = 46

$11x + 12x = 46 \Rightarrow x = 2$

∴ Edad de Luis: 12(2)=24 años

PROBLEMA 22

Un individuo nació el 3 de abril de 1903 y otro el 7 de mayo de 1991. ¿En qué fecha (día, mes y año), la edad del primero fue el triple de la edad del otro?

Resolución:

Primero, averigüemos qué tiempo ha transcurrido desde el nacimiento de uno hasta el nacimiento del otro:

Uno nació: 3 de abril de 1903 } 8 años
3 de abril de 1911 } 34 días
El otro nació: 7 de mayo de 1911

Entonces:

	7 de mayo de 1911	Fecha = ?
Un Individuo	8 años 34 días	3n
El Otro	0	n

n

Observará que la fecha buscada es:

7 de mayo de 1911 + n

Diferencia de edades:

8 años 34 días – 0 = 3n – n = 2n

⇒ n = 4 años 17 días

∴ Fecha: 7 mayo de 1911+4 años 17 días

= 24 de mayo de 1915

PROBLEMA 23

La diferencia de los años de nacimiento de Sandra y Richard es de 5 años. Sandra, que es la menor, dice: "Si ayer hubiera sumado mi año de nacimiento con mi edad, hubiera obtenido lo mismo que obtuviste tú el día de hoy con esta operación, ya que hoy no resultó igual". ¿En cuánto se diferenciaban las edades de los dos en el momento en que habló Sandra? Año actual: 1997.

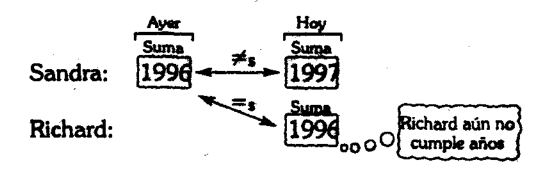
Resolución:

Sabemos que para una persona se cumple:

(Año de Nacimiento) + (Edad Actual) = { 1997 ;Si ya cumplió años. (Año actual) / 1996 ;Si todavía no cumple años.

Para el problema, cuando Sandra suma su año de nacimiento con su edad puede obtener como resultado 1996 ó 1997, lo mismo ocurre para Richard.

Entonces:



Por dato del problema, Richard es mayor que Sandra en 5 años, pero hoy que todavía no cumple años, será mayor en 5+1 = 6 años.

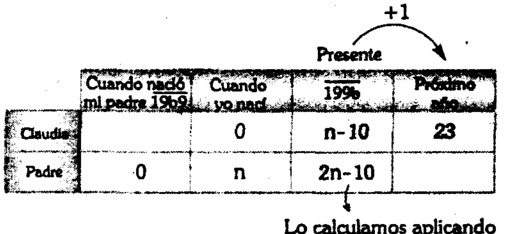
∴ Diferencia de edades: 6 años

PROBLEMA 24

Claudia comenta: "Hoy tengo 10 años menos de la edad que tenía mi padre cuando nací, además las dos últimas cifras del año en que nació mi padre son iguales a las dos últimas cifras del año en que nos encontramos, pero en orden invertido". (Año presente>1990). Entonces, ¿en qué año su padre tuvo 23 años, si el próximo año ella cumplirá esa edad?

Resolución:

Del enunciado:



	Cuando nació mi padre $\overline{19b9}$	Cuando yo nací	Presente $\overline{199b}$	Próximo año
Claudio		0	n-10	23
Padre	0	n	2n-10	

El próximo año:

$$(n-10)+1=23 \rightarrow n=32$$

Del cuadro se observa que:

$\overline{19b9} + (2n-10) = \overline{199b}$

$1900 + \overline{b9} + 54 = (1900 + \overline{9b})$

$54 = \overline{9b} - \overline{b9}$

$54=(90+b)-(10b+9)$

$54=81-9b \Rightarrow 9b=27 \Rightarrow b=3$

El año en que el padre tuve 23 años fue:

$$\therefore \underbrace{1939}_{\text{Año de nacimiento}} + 23 = 1962$$

PROBLEMA 25

La edad promedio de "P" alumnos en un salón de clase es de "K" años, en dicho salón estudian un grupo de trillizos. Si ninguno de los alumnos es mayor de "M" años, ¿cuál es la mínima edad que puede tener uno de los trillizos?

Resolución:

Sea "E" la edad de los trillizos.

Entonces, el promedio de las edades es:

$$\frac{\overbrace{\underbrace{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots}_{\text{"P - 3" alumnos}} \underbrace{+ E + E + E}_{\text{trillizos}}}^{\text{"P" alumnos}}}{P} = K$$

$$\Rightarrow \overbrace{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots}^{\text{"P - 3" alumnos}} + 3E = PK$$

Según el enunciado, E es mínimo.

Para que "E" pueda ser mínimo cada uno de las otras edades debe ser máxima.

Además "ninguno" de los alumnos es mayor de "M" años, es decir, la edad máxima que puede tener cada uno de los "P – 3" alumnos restantes es de "M" años.

Luego:

$$\overbrace{M + M + M + \ldots + M}^{\text{"P - 3" alumnos}} + 3E = PK$$

$$\Rightarrow M(P-3) + 3E = PK$$

$$\therefore E_{\text{mínimo}} = \frac{PK - M(P-3)}{3}$$

PROBLEMA 26

En un aula, se calculó el promedio de las edades de todos los alumnos, luego se calculó el promedio de los años de nacimiento. Finalmente se sacó el promedio de ambos promedios, cuyo resultado es:

∗ Todos ya cumplieron años.

Resolución:

Sabemos que si una persona ya cumplió años, se cumple:

Año de nacimiento + Edad actual = Año actual

$\Rightarrow A + E = \text{Año actual}$

Calculando el promedio de las edades de los "n" alumnos:

$$P_1 = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n}{n}$$

Calculando el promedio de los años de nacimiento:

$$P_2=\frac{A_1+A_2+A_3+.....+A_n}{n}$$

Calculando el promedio de ambos promedios:

$$P=\frac{P_1+P_2}{2}=\frac{\frac{E_1+E_2+...+E_n}{n}+\frac{A_1+A_2+...+A_n}{n}}{2}$$

$$P=\frac{\overbrace{(E_1+A_1)}^{\text{Año actual}}+\overbrace{(E_2+A_2)}^{\text{Año actual}}+...+\overbrace{(E_n+A_n)}^{\text{Año actual}}}{2n}$$

$$P=\frac{n(\text{Año actual})}{2n}=\frac{\text{Año actual}}{2}$$

∴ Resultado final: P= mitad del año actual

PROBLEMA 27

Una familia consta de 8 personas y realizan una fiesta por cada cumpleaños. Estando todos reunidos en mayo de 1995, sumaron los años en que habían nacido y luego sumaron las edades de todos ellos, dando la suma total un resultado de 15955. ¿Cuántas fiestas faltan realizarse durante este año?

Resolución:

Año actual: 1995

Suponiendo que todos ya cumplieron años, entonces:

Edades		Año de nacimiento			
E_1	+	A_1	=	1995	8 sumandos
E_2	+	A_2	=	1995	
E_3	+	A_3	=	1995	
⋮		⋮		⋮	
E_8	+	A_8	=	1995	
M	+	N	=	15960	

Si todos ya hubiesen cumplido años, el resultado debió ser de 15960, pero como el resultado real es de 15955, quiere decir entonces que 5 personas (15960–15955=5) aún no cumplen años todavía.

∴ Faltan 5 fiestas durante este año

PROBLEMA 28

Al preguntarle la edad a un abuelo, él contestó: "No tengo menos de 60 años, pero aún no soy noventón". Se sabe que cada uno de sus hijos le ha dado tantos nietos como hermanos tienen y su edad es, exactamente, el doble del número de hijos, más el número de nietos que tiene. Hallar la edad del abuelo.

Resolución:

Por dato:

$$60\leq \text{Edad del abuelo}<90$$

de Hijos: $1^{er}, \overbrace{2^{do}, 3^{er}, 4^{to}, ..., n^{mo}}^{\text{"n-1" Hermanos del 1}^{ro}}$

Nietos por cada hijo: $\underbrace{n-1,\ n-1,\ n-1,\ n-1, ...\ n-1,}_{\text{\# Total de nietos = n(n-1)}}$

$$\text{Edad del abuelo: }\overbrace{2n}^{\text{\# Hijos}}+\overbrace{n(n-1)}^{\text{\# Nietos}}$$

$$\text{Edad del abuelo}=n^2+n$$

Reemplazando en la condición inicial:

$$60\leq n^2+n<90$$

cumple para n = 8

∴ Edad del abuelo: $n^2+n=8^2+8=72$ años

PROBLEMA 29

Ayer 15 de marzo de 1981, dos amigos, Carlos y Víctor, hicieron lo siguiente: Carlos sumó a su año de nacimiento la edad de Víctor, y Víctor sumó a su año de nacimiento la edad de Carlos; se sumaron después ambos resultados, obteniéndose 3951. Ven que están equivocados ya que Carlos, por distraído, obtuvo un resultado 1973, que es incorrecto. Si Carlos ya cumplió años y Víctor aún no, ¿cuál es la diferencia de las edades de Carlos y Víctor?

Resolución:

Del dato final obtenemos:

	Año de nacimiento		Edad actual		
Víctor :	A_V	+	E_V	= 1980	(Aún no cumple años)
Carlos :	A_C	+	E_C	= 1981	(Ya cumplió años)

$A_V + A_C + E_V + E_C = 3961$ (Resultado correcto)

↕ 10

Del dato inicial:

$\underbrace{(A_C + E_V)}_{\text{Operación de Carlos}} + \underbrace{(A_V + E_C)}_{\text{Operación de Víctor}} = 3951$ (Resultado incorrecto)

+10: 1973 ← incorrecto; 1983 ← correcto

Entonces:

$$(A_C + E_V) = 1983$$
$$(A_C + E_C) = 1981 \quad (-)$$
$$\therefore E_V - E_C = 2$$

PROBLEMA 30

La suma de las edades de un hombre y su esposa es 6 veces la suma de las edades de sus hijos. Hace 2 años, la suma de las edades de los esposos era 10 veces la suma de las edades de sus hijos y, dentro de 6 años, la suma de las edades de los esposos será 3 veces la suma de las edades de los hijos. ¿Cuántos hijos tienen?

Resolución:

Sea el número de hijos: "n"

De los datos:

	Hace 2 años	Presente	Dentro de 6 años
Suma de las edades de los esposos	6S - 2(2)	6S	6S + 2(6)
Suma de las edades de los n hijos	S - 2n	S	S + 6n

$6S-4=10(S-2n)$ → $\boxed{S=5n-1}$

$6S+12=3(S+6n)$ → $\boxed{S=6n-4}$

⇨ $5n-1 = 6n-4$

$n=3$

$\therefore$ # de hijos: $= 3$

PROBLEMA 31

Carolina tuvo su primer hijo a los 18 años, 3 años después tuvo a su segundo hijo y 5 años después a su tercer hijo. Si en 1995 las edades de los 4 sumaban 79 años, ¿en qué año nació Carolina?

Resolución:

(3 años, 5 años)

				1995
Carolina	18	21	26	
1er Hijo	0	3	8	
2do Hijo		0	5	
3er Hijo			0	

Suma = 79

Luego:

		1995
Carolina	26	
1er Hijo	8	
2do Hijo	5	
3er Hijo	0	

Suma = 39 → (40) → Suma = 79

Se observa que, de una suma a otra suma está aumentando 40, pero estas sumas corresponden a 4 personas, esto quiere decir que cada persona aumenta $\frac{40}{4} = 10$.

	1995
Carolina	26 →(10) 36
1er Hijo	8 →(10) 18
2do Hijo	5 →(10) 15
3er Hijo	0 →(10) 10

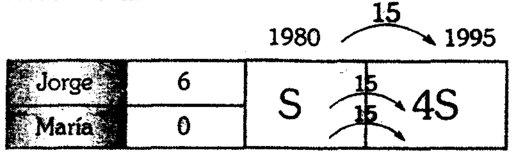
Del cuadro tenemos que: en 1995 Carolina tenía 36 años.

$\therefore$ Carolina nació en el año $1995 - 36 = 1959$

PROBLEMA 32

Jorge nació 6 años antes que María. En 1980, la suma de sus edades era la cuarta parte de la suma de sus edades en 1995. ¿En qué año nació cada uno de ellos?

Resolución:



"S" y "4S" representan la suma de sus edades

Del cuadro:

$S + 30 = 4S$

$S = 10$ ... (es la suma de edades en 1980)

		1980
Jorge	6	
María	0	

Suma = 10

Diferencia = 6

Las edades en 1980 son: 8 y 2

Entonces:

		1980
Jorge	6	8
María	0	2

Luego:

Jorge tenía 8 años en 1980 $\Rightarrow$ nació en 1972

María tenía 2 años en 1980 $\Rightarrow$ nació en 1978

PROBLEMA 33

Cuando yo tenía 1 año menos de la edad que tú tienes, tú tenías 5 años menos de la edad que yo tengo. Pero cuando tengas la edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 42 años. ¿Qué edad tenemos tú y yo respectivamente?

Resolución:

- "Cuando yo tenía 1 año menos de la edad que tú tienes tú tenías 5 años menos de la edad que yo tengo"

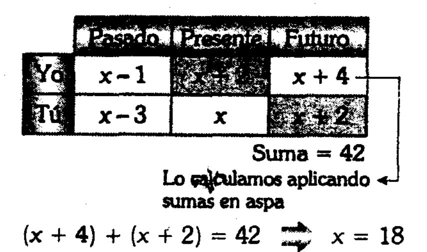
	Pasado	Presente	Futuro
Yo	$x-1$	y	
Tú	$y-5$	x	y

$(x-1) + x = (y-5) + y \Rightarrow y = x + 2$

Reemplazando:

	Pasado	Presente
Yo	$x-1$	$x+2$
Tú	$x-3$	x

"Pero cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 42 años"



	Pasado	Presente	Futuro
Yo	$x-1$	$x+2$	$x+4$
Tú	$x-3$	x	$x+2$

$(x+4) + (x+2) = 42 \Rightarrow x = 18$

$\therefore$ Nuestras edades son:

Tú : 18 años

Yo : 20 años

PROBLEMA 34

Le preguntaron a David por su edad, y él contestó: "Mi edad, más 2 veces mi edad, más 3 veces mi edad, y así sucesivamente hasta tantas veces mi edad como la edad que tengo, suman en total 4200". ¿Cuál es la edad de David?

Resolución:

Sea "x" la edad de David

Entonces según lo dicho por él planteamos:

$$x + 2x + 3x + \ldots + \underbrace{x(x)}_{\text{"tantas veces mi edad ... como edad tengo"...}} = 4\,200$$

$$x\,(1+2+3+\ldots+x) = 4\,200$$

$$x\left[\frac{x(x+1)}{2}\right] = 4\,200$$

$$\Rightarrow x^2\,(x+1) = 8\,400$$

$$\Rightarrow x^2\,(x+1) = 20^2 \times 21 \Rightarrow x=20$$

$\therefore$ David tiene 20 años

PROBLEMA 35

Un alumno nació en el año $\overline{19ab}$ y en 1980 tuvo "a+b" años. ¿En qué año tuvo "2a+b" años?

Resolución:

Año de nacimiento: $\overline{19ab}$

En el año 1980 tuvo "a+b" años

Luego:

$$1980 = \overline{19ab} + (a + b)$$

$$1980 = 1900 + \overline{ab} + a + b$$

$$80 = 11a + 2b$$

Tabulando: $80 = 11a + 2b$

$$\begin{matrix} & \downarrow & \downarrow \\ & 6 & 7 \end{matrix} \Rightarrow a=6 \quad b=7$$

Reemplazando:

Año de nacimiento: 1967

Entonces tuvo: $2a + b = 2(6)+7 = 19$ años

en el año $1967 + 19 = 1986$

PROBLEMA 36

La suma de las edades de Antonio y Beatriz es 5/2 de la edad de Antonio. Hace 3 años la edad de Beatriz era la misma que tendrá Antonio dentro de 9 años. ¿Cuántos años tiene Antonio?

Resolución:

	Hace 3 años	Actual	Dentro de 9 años
Antonio		$2x$	
Beatriz			

Suma = $5x$

	Hace 3 años	Actual	Dentro de 9 años
Antonio		$2x$	$2x + 9$
Beatriz	$3x - 3$	$3x$	

Por dato: $3x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x = 12$

Reemplazando:

$\therefore$ Antonio tiene $2(12) = 24$ años

PROBLEMA 37

Estando reunidas Ana, Betty y Carmen se escucha la siguiente conversación:

- **Betty**: "Mi edad es la misma que tuvo Ana cuando Carmen nació".
- Ana: "Así es, y en ese entonces nuestras edades sumaban 30 años".
- Carmen: "Mi edad actual es la misma que tuvo Betty cuando yo nací".

¿Cuál será la edad que tenga Ana cuando Carmen tenga la edad que tiene Betty?

Resolución:

	Pasado	Actual
Betty		x
Ana	x	
Carmen	0	

	Pasado	Actual
Betty	$30-x$	x
Ana	x	
Carmen	0	

Suma = 30

	Pasado	Actual
Betty	$30-x$	x
Ana	x	
Carmen	0	$30-x$

Luego: $(30-x)+(30-x)=0+x \Rightarrow x=20$

Reemplazando:

	Pasado	Actual
Betty	10	20
Ana	20	30
Carmen	0	10

Ahora contestamos la pregunta:

	Actual	Futuro
Betty	20	
Ana	30	y
Carmen	10	20

$30+20=10+y$

$y=40$

∴ Ana tendrá 40 años

PROBLEMA 38

Al preguntarle por su edad a Silvia, ella contestó: "Mi edad es la suma de todos aquellos números naturales tales que el cuadrado, de su quíntuplo disminuido en 4, es mayor que 16, pero menor que 900. ¿Cuál es la edad de Silvia?

Resolución:

"Mi edad es la suma de todos aquellos números naturales ..."

A esos números naturales les vamos a representar con "N".

Entonces planteamos:

$16 < (5N-4)^2 < 900$

$4 < 5N-4 < 30$

$8 < 5N < 34 \Rightarrow \frac{8}{5} < N < \frac{34}{5}$

$\Rightarrow 1{,}6 < N < 6{,}8$

Como "N" es un número natural, los valores de "N" son: 2; 3; 4; 5; 6.

∴ De acuerdo a las condiciones iniciales, la edad de Silvia es: 2+3+4+5+6=20años

PROBLEMA 39

Un abuelo, su hijo y su nieto tienen juntos 100 años. El abuelo dice: "Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días, y mi nieto tiene tantos meses como yo años". La edad del abuelo es: (Considerar 1 mes = 30 días)

Resolución:

"Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días"

	Años	Meses	Seman.	Días
Abuelo				
Hijo				
Nieto				

Suma=100

Estos valores son iguales, los colocaremos luego del siguiente dato

"Mi nieto tiene tantos meses como yo años"

	Años	Meses	Semanas	Días
Abuelo	x			
Hijo				
Nieto		x		

Para el nieto: su edad que está en meses lo convertimos en días y en años.

	Años	Meses	Seman.	Días
Abuelo	x			
Hijo			30x	
Nieto	x/12	x		30x

Suma=100

Recuerda que estos valores eran iguales según el primer dato

Para el hijo: su edad que está en semanas debemos convertirlo en años y usar la información que juntos suman 100 años. Sin embargo no podemos hacerlo de manera directa porque no hay una relación exacta entre semanas y años. La conversión la haremos de la siguiente manera: su edad en "semanas" la convertimos en "días" (multiplicamos por 7), luego su edad en "días" la convertimos en "años" (dividiendo entre 360. Recuerda que nos dijeron que consideremos 1 mes=30 días, entonces 1 año = 360 días).

	Años	Meses	Seman.	Días
Abuelo	x			
Hijo	210x/360		30x	210x
Nieto	x/12	x		30x

Suma=100

$$x + \frac{210x}{360} + \frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 60$$

∴ El abuelo tiene 60 años

PROBLEMA 40

Una madre, su hijo e hija conversan. La madre dice: "Nuestras edades suman 100 años". El hijo dice: "Cuando yo tenía la edad de mi hermana, nuestras edades sumaban 70 años". La hija dice: "Cuando yo tenga los años que mamá tenía, cuanto tú tenías los años que nos dijiste, nuestras edades sumaran 160 años". La madre dice: "Pero si yo tuviera los años que tenía, tengo y tendré resultaría también 160 años. "¿Qué edad tiene la hija?

Resolución:

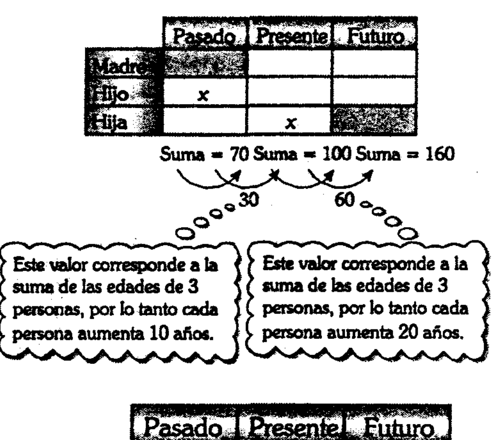
Madre: "Nuestras edades suman 100 años".

Hijo: "Cuando yo tenía la edad de mi hermana, nuestras edades sumaban 70 años"

	Pasado	Presente	Futuro
Madre			
Hijo	x		
Hija		x	

Suma=70 Suma=100

Hija: "Cuando yo tenga los años que mamá tenía, nuestras edades sumarán 160 años"



	Pasado	Presente	Futuro
Madre		10	20
Hijo	x	10	20
Hija		10 x	20

	Pasado	Presente	Futuro
Madre	x + 20	x + 30	x + 50
Hijo	x		
Hija		x	x + 20

Madre: "Si yo tuviera los años que tenía, tengo y tendré, resultaría 160 años.

$$\underbrace{x + 20}_{\text{tenía}} + \underbrace{x + 30}_{\text{tengo}} + \underbrace{x + 50}_{\text{tendré}} = 160$$

$x = 20$

∴ La hija tiene 20 años

Problemas Propuestos

1. Si al doble de la edad que tendré dentro de 2 años, le resto el doble de la edad que tenía hace 2 años, se obtiene la edad que tengo. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

   A) 12 años B) 14 años C) 20 años
   D) 15 años E) 10 años

2. Una persona tiene, en 1988, tantos años como el producto de las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de cifras de la edad que tenía en 1980?

   A) 6 B) 4 C) 5
   D) 7 E) 8

3. Los 5/7 de la edad de una persona menos 4 años, es igual a la edad que tenía hace 12 años. ¿Cuál era su edad hace 12 años?

   A) 14 años B) 18 años C) 16 años
   D) 20 años E) 22 años

4. Laura al ser interrogada por su edad responde: "Si al año en que cumplí 14 años le suman el año en que cumpliré 23 años y, si a este resultado le restan la suma del año en que nací con el año actual, obtendrán 19. ¿Cuál es la edad de Laura?

   A) 18 años B) 23 años C) 19 años
   D) 16 años E) 22 años

5. Alfredo nació en el presente siglo y en este año cumplirá tantos años como la suma de cifras, del año en que nació y el año actual. ¿Cuál será la edad actual de Arturo, si este año cumple tanto como la quinta parte del producto de cifras del año de nacimiento de Alfredo?
   Observación: Considerar año actual: 1995

   A) 27 años B) 25 años C) 23 años
   D) 19 años E) 30 años

6. La edad que tenía hace "a" años es, a lo que tendré dentro de "a" años, como 2 es a 3. ¿Qué edad tendré dentro de "2a" años?

   A) 5a años B) 6a años C) 7a años
   D) 8a años E) 9a años

7. Le preguntan a un individuo por su edad y él contesta: "Mi edad, más dos veces mi edad, más tres veces mi edad y así sucesivamente hasta tantas veces mi edad como la edad que tengo, suman en total 4200". Hallar la edad de dicho individuo.

   A) 20 años B) 25 años C) 16 años
   D) 24 años E) 18 años

8. Hace 5 años, la edad de un padre fue cuatro veces la edad de su hijo; y dentro de 5 años será solamente el doble de la de su hijo. ¿Qué edad tendrá el padre, cuando el hijo tenga los años que tuvo el padre cuando nació el hijo?

   A) 40 años B) 50 años C) 30 años
   D) 45 años E) 35 años

9. Hace 10 años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de 8 años. Si tú naciste cuando yo tenía 15 años, ¿cuál será la suma de nuestras edades cuando yo tenga el doble de la edad que tuve hace 11 años?

   A) 53 B) 62 C) 36
   D) 57 E) 72

10. Dentro de 10 años tú tendrás la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tuve hace 34 años. ¿Cuántos años tengo si dentro de 20 años la suma de nuestras edades será 98?

    A) 32 años B) 38 años C) 40 años
    D) 43 años E) 37 años

11. Pedro tiene 47 años y Jesús 32 años. ¿Cuántos años hace que la edad de Pedro fue el cuádruplo de la de Jesús?

A) 21 B) 25 C) 27
D) 30 E) 32

12. Dentro de 8 años la suma de nuestras edades será de 46 años; pero hace "m" años la diferencia de nuestras edades era de 4 años. ¿Hace cuántos años la edad de uno era el triple de la edad del otro?

A) 9 B) 11 C) 14
D) 22 E) 23

13. Pedro le dice a Juan: "Dentro de 10 años, yo tendré el doble de la edad que tú tendrás". Juan responde: "Hace 5 años tu edad era el quíntuplo de la que yo tenía?. "Si Juan nació en 1920, ¿en qué año nació Pedro?

A) 1900 B) 1905 C) 1908
D) 1910 E) 1912

14. La edad de un padre sobrepasa, en 5 años, a la suma de las edades de sus tres hijos. Dentro de 10 años, él tendrá el doble de la edad del hijo mayor, dentro de 20 años, tendrá el doble de la edad del segundo, y dentro de 30 años, tendrá el doble de la edad del tercero. Halle la edad del padre.

A) 60 B) 70 C) 65
D) 50 E) 40

15. Dentro de 8 años la edad de Nora será la que Matilde tiene ahora, pero dentro de 15 años Nora tendrá los 4/5 de la edad que tendrá Matilde. Calcular la suma de las edades de ambas cuando Matilde tenía el doble de la edad de Nora.

A) 17 B) 24 C) 25
D) 33 E) 40

16. Cuando Raúl nació, Lucía tenía la tercera parte de lo que Raúl tiene. Si Paola tiene 10/9 de la edad de Raúl, ¿cuál de los dos es más joven y qué edad tiene; si la suma de las edades actuales de Raúl y Paola es 38 años?

A) Raúl, 20 años B) Paola, 18 años
C) Raúl, 24 años
D) Lucía, 24 años E) Raúl, 18 años

17. Diana le dice a Carlos: "Mi edad es 4 años menor de la edad que tú tenías cuando yo tenía 8 años menos de la edad que tú tienes; y cuando tú tengas el doble de la edad que tengo nuestras edades sumarán 82 años". ¿Qué edad tiene Diana?

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

18. Un padre, una madre y su hija estaban reunidos y ésta preguntó por la edad de su madre y su padre le dijo: "Nuestras tres edades juntas suman sesenta años. Como yo soy seis veces más viejo de lo que tú eres ahora, puede decirse que cuando sea el doble de viejo que tú, nuestras edades juntas serán el doble de lo que son ahora?. ¿Qué edad tiene la madre?

A) 32 B) 30 C)29
D) 28 E) 25

19. Hace "a+b+c" años tu edad era "a+b" veces la mía. Cuando tú tengas "b+c" veces mi edad, habrán transcurrido a partir de hoy "c+b–a" años. Entonces yo tenía en años:

A) $2\left(\frac{b+c}{b-c}\right)$ B) $2b(b+c)$ C) $\frac{2(a+b)}{c}$

D) $2abc$ E) $2\left(\frac{b+c}{a-c}\right)(b+c-1)$

20. Cuando él nació yo tenía la edad que tú tienes, que a su vez es la edad que él tendrá cuando tú tengas 20 años y yo el doble de lo que tienes. ¿Qué edad tienes, si él tiene la edad que yo tenía cuando tú naciste, y en ese entonces mi edad era 5 años menos que tu edad actual?

A) 5 años B) 10 años C) 15 años
D) 18 años E) 20 años

21. Actualmente nuestras edades suman el doble de lo que tenía mi abuelo en el año de 1982. Además ocurre que yo tengo la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tuviste, cuando yo tuve la tercera parte de la edad que tengo ahora. ¿Qué edad tienes actualmente?
Observación: El abuelo nació en 1912.

A) 32 B) 80 C) 74
D) 48 E) 90

22. Dentro de 8 años, la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora. Dentro de 15 años, Pedro tendrá 4/5 de la edad que tendrá Juan. ¿Cuál era la suma de las edades de Juan y Pedro, cuando Juan tenía el doble de la edad de Pedro?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

23. Yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tuviste cuando yo tuve la novena parte de la edad que tengo ahora. Si nuestras edades suman 57 años, ¿cuántos años tengo?

A) 27 B) 37 C) 47
D) 36 E) 26

24. Luis dice: "La raíz cuadrada del año en que mi bisabuelo nació más la raíz cuadrada del año cuando murió, es igual a la edad que tuvo cuando murió". Las raíces cuadradas dan números exactos. ¿A qué edad murió el bisabuelo de Luis?

A) 83 B) 85 C) 87
D) 89 E) 91

25. Una herencia de 288 libras de oro se deben repartir entre tres hermanos en forma proporcional a sus edades. El menor se opone al reparto actual y propone repartirse dentro de 8 años ya que recibiría 8 soles más. Sin embargo, el mayor no está de acuerdo ya que recibiría 8 soles menos. Hallar las edades actuales de los tres, si suman 48 años.

A) 20,16 y 12 B) 22,16 y 10
C) 20,15 y 13
D) 24,13 y 11 E) 30,10 y 8

26. El señor Eduardo tuvo un hijo a los 32 años y un nieto, 18 años más tarde; actualmente el nieto tiene 22 años, el abuelo afirma tener 60 años y el hijo, 38. Hallar el producto de lo. años que ocultan ambos.

A) 26 B) 24 C) 22
D) 20 E) 18

27. Claudia comenta: "Hoy tengo 10 años menos de la edad que tenía mi padre cuando yo nací, además las dos últimas cifras del año en que nació mi padre son iguales a las dos últimas cifras del año en que nos encontramos, pero en orden invertido" (año actual > 1990), entonces. ¿En qué año su padre tuvo 23 años, si el próximo año ella cumplirá esa edad?

A) 1978 B) 1980 C) 1962
D) 1979 E) 1970

28. Los años bisiestos no tienen aniversarios anuales. El siguiente problema se planteó el 29 de febrero de 1896. Leyla dijo: "Mario, sabes bien que tú tenías el triple de mi edad cuando nos conocimos, y que yo tengo ahora, exactamente, la misma edad que tú tenías en ese entonces, y que cuando yo tenga tres veces mi edad actual nuestros años juntos sumarán cien". ¿Cuál será la edad de Mario el próximo 29 de febrero?
Obs: Cada uno cumple años en enero.

A) 21 B) 24 C) 16
D) 18 E) 29

29. El promedio de edades de 4 personas es "K" años. ¿Cuál es la edad mínima que puede tener cualquiera de ellas, si ninguna de las personas tiene más de "P" años?

A) 4K–3P B) 3K–4p C) $\frac{2}{3}(K-P)$

D) $\frac{3}{2}(P-K)$ E) 8K–3P

30. Mi abuelo nació el siglo XIX y, en 1887, cumplió tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento. Yo nací exactamente 100 años después del año de su nacimiento.
¿Cuántos años cumpliré este año 1995?

A) 20 B) 30 C) 29
D) 25 E) 18

31. Una persona nació un $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ cumplió b^2-a^2 años. Hallar su edad actual si es mayor de 70 años y menor de 80 años. (Año actual: 1997)

A) 71 B) 42 C) 79
D) 60 E) 52

32. En el mes de julio de 1993 se le pidió a 12 alumnos que sumen los años que tienen a los años en los cuales nacieron y dicho resultado fue 23908. ¿Cuántos alumnos todavía no cumplían años en ese momento?

A) 6 B) 8 C) 4
D) 17 E) 21

33. Jorge sumó: un año, más dos años, más tres años, y así sucesivamente, hasta la edad actual que tiene dando como resultado un número de tres cifras iguales. ¿Cuál es la edad de Jorge?

A) 36 B) 41 C) 42
D) 51 E) 54

34. Juan nació en la primera mitad del siglo XIX, 19 años antes que naciera José; en el año x^2 Juan cumplió una edad igual a la raíz cuadrada de ese año. ¿En qué año José cumplió 15 años?

A) 1847 B) 1850 C) 1843
D) 1840 E) 1839

35. Si Aurora tuviera "n" años menos, tendría "n+5" años y si Paola tuviera "n+1" años más, tendría "2n+8". Si las edades actuales de ambas suman 42 años, ¿cuál es la edad de Teresa, quien nació cuando Aurora tenía 5 años?

A) 19 B) 20 C) 22
D) 25 E) 27

36. En un grupo de seis personas, ninguna de ellas es menor de 15 años. Si el promedio aritmético de las edades es 18 años, ¿cuál es la máxima edad que puede tener una de ellas?

A) 30 B) 33 C) 42
D) 51 E) 15

37. Las edades de 3 hermanos (niños) están representados por números enteros positivos, tal que si a 100 veces la edad del 1° se le suma 10 veces la edad que tenía el 2° hace 4 años y luego se le añade la edad que tendrá el 3° dentro de 7 años, se obtendrá 953. Hallar la edad que tendrá el menor cuando el mayor tenga tantas veces su edad como los años que el mediano aventaja al menor.

A) 11 B) 13 C) 15
D) 14 E) 19

38. La diferencia de los cuadrados de las edades de 2 personas es 189. Hallar las edades que tendrán cuando la edad del mayor sea el doble de la del menor. Sabiendo que sus edades actuales suman 21.

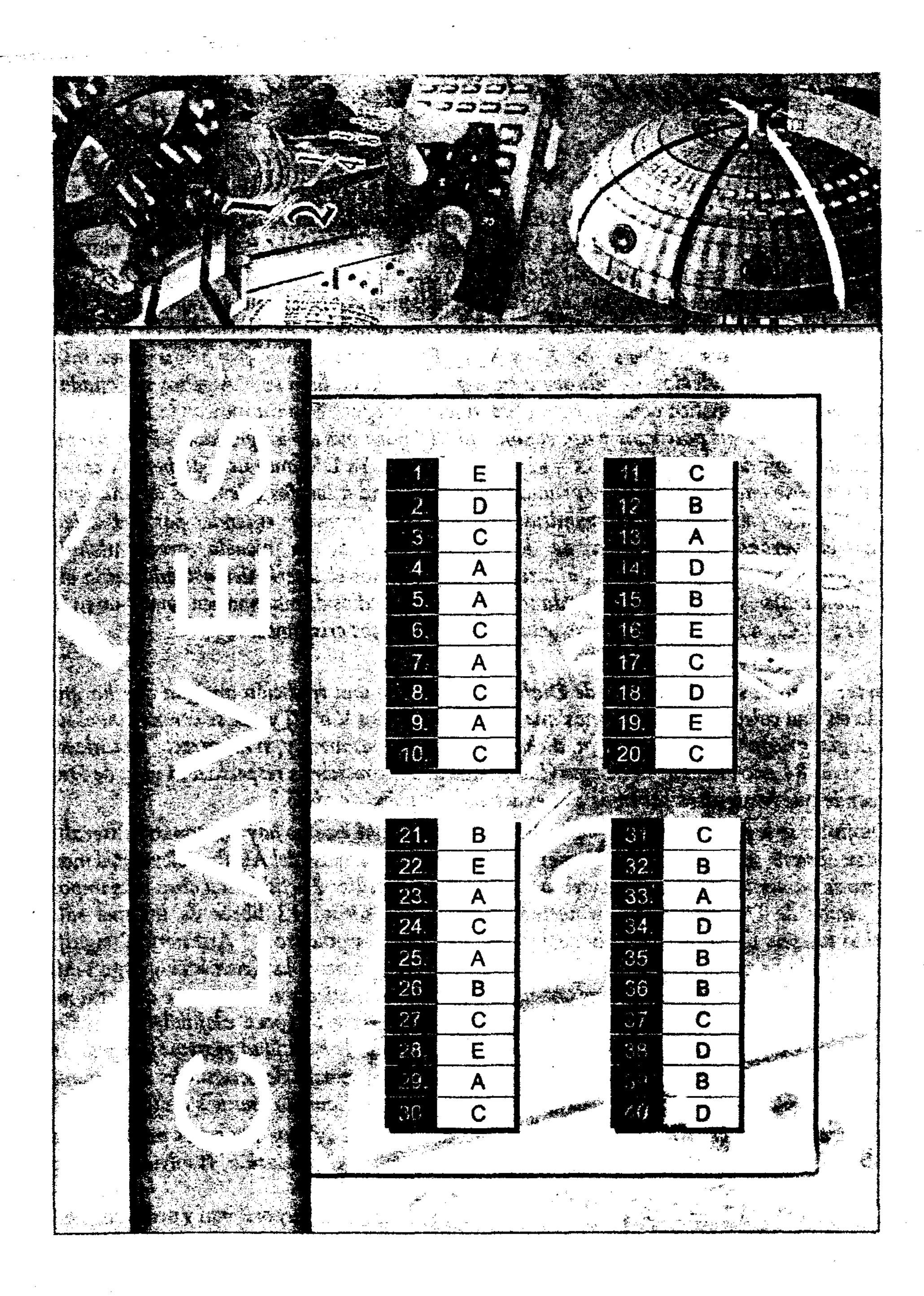
A) 28 y 14 B) 15 y 8 C) 24 y 12
D) 18 y 9 E) 26 y 13

39. En 1920 la edad de "A" era cuatro veces la edad de "B", en 1928 la edad de "A" fue el doble de la edad de "B". ¿Cuál fue la edad de "A" en 1945?

A) 60 B) 41 C) 42
D) 43 E) 64

40. La edad de Nora es un número de dos cifras que es igual a "x" veces la suma de sus cifras. Al invertir el orden de las cifras de su edad ésta sería la suma de las cifras multiplicada por:

A) x B) x+1 C) x–1
D) 11–x E) 11+x



1	E	11	C	21.	B	31	C
2.	D	12	B	22.	E	32.	B
3	C	13	A	23.	A	33.	A
4	A	14	D	24.	C	34.	D
5.	A	15	B	25.	A	35	B
6.	C	16	E	26	B	36	B
7.	A	17.	C	27	C	37	C
8.	C	18.	D	28.	E	38	D
9.	A	19.	E	29.	A	39	B
10.	C	20.	C	30	C	40	D

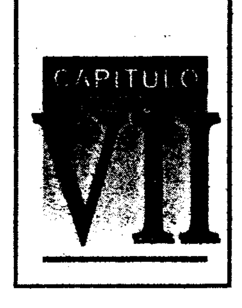
Diofanto de Alejandría

Parece que Diofanto de Alejandría vivió en el año 275 D.C. Escribió 13 libros de Aritmética, de los cuales sólo se conocen 6. Estos libros comenzaron a atraer la atención de los matemáticos europeos, 1200 años después de haber sido escritos. La obra de Diofanto tiene gran importancia, porque perfeccionó la notación matemática al mismo tiempo que dio amplia perspectiva al desarrollo de la matemática simbólica y sus aportes se evidenciaron con la creación de la primera escuela francesa en los siglos XV y XVI. Fue Diofanto quien por primera vez introdujo letras y signos para los cálculos, de allí que a su Álgebra se la ha llamado "Álgebra sincopada", que antecede al Álgebra simbólica actual. Introdujo la letra griega: "ξ" para indicar la incógnita, halló representaciones para sus potencias y usó el símbolo "T" para indicar la igualdad. Por ejemplo, con la notación de Diofanto, la ecuación 3x=12 sería: ξγ iTβ. Ya Diofanto usó, de modo explícito, la propiedad que dice que al sumar o restar una misma cantidad a los dos miembros de una igualdad, ésta no varía. Los conocimientos transmitidos por Diofanto permiten entender por qué se le puede considerar el verdadero algebrista de los matemáticos de la escuela greco alejandrina. Desgraciadamente su obra no tuvo seguidores, si exceptuamos el interés demostrado hacia ella por Hipatía, noble mujer, a la que se le recuerda tanto por sus estudios de matemática como por su trágico fin en el 415 D.C., a manos de una muchedumbre de fanáticos cristianos.

Su Aporte: Poco se sabe de la vida de Diofanto, aparte de una tradición antigua que ha quedado registrada en una colección de problemas que data de los siglos V o VI y que se conoce con el nombre de "Antología griega". Hemos visto ya, dicho acertijo, páginas atrás y, si es correcto históricamente, Diofanto vivió 84 años aunque la inseguridad en que nos encontramos respecto a la vida de Diofanto es tan grande que ni siquiera sabemos con exactitud en qué siglo vivió.

A Diofanto se le puede llamar el padre del Álgebra, aunque esto no hay que tomarlo literalmente, dado que su obra no contiene nada del material que constituye la base del Álgebra elemental moderna, ni tampoco se parece en absoluto al Álgebra geométrica que utilizó Euclides. La obra más importante que conocemos de Diofanto es: ***Aritmética,*** *tratado que consta 13 libros de los que sólo han sobrevivido los seis primeros. No olvidemos que en Grecia la palabra : "Aritmética" significaba, realmente, teoría de números y no teoría del cálculo; por este motivo la Aritmética griega tenía más en común con la Filosofía que con lo que podemos llamar Matemática y no es extraño que esta materia haya sido importante en el pensamiento neoplatónico durante la época alejandrina tardía. La Aritmética de Diofanto está caracterizada por un alto grado de habilidad matemática y de ingenio puestos en juego. Esta obra está dedicada a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas y debido al profundo estudio de estos temas es llamado análisis diofántico.*

Trató ecuaciones como: $x^2 = 1 + 30y^2$ *o bien* $x^2 = 1 + 26y^2$ *que son casos particulares de la "Ecuación de Pell":* $x^2 = 1 + py^2$, *aunque Diofanto da una única solución, resolvió ecuaciones del tipo:* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ x + y = 20 \end{cases}$ *y también* $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^3 + y^3 = 370 \end{cases}$ *aunque de modo muy original y práctico. Diofanto ejerció una influencia enorme sobre la teoría de números moderna, en particular, Fermat se vio conducido a su célebre teorema cuando intentó generalizar el problema de Diofanto: "Dividir un cuadrado dado en la suma de otros dos números cuadrados".*



PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

"Dadme un punto de Apoyo y moveré el mundo"

Arquímedes

Utilizando la teoría de Copérnico, Giordano Bruno destrozó las cúpulas de las esferas celestes con las estrellas eternamente fijas en ellas ¡Todo está en movimiento!

Lectura 1

El tiempo es relativo

Imaginémonos un tren de 5 400 000 kilómetros de longitud que marcha rectilínea y uniformemente a una velocidad de 2 400 000 kilómetros por segundo. Supongamos que, en algún momento, en el centro del tren se enciende una bombilla. En el primero y último vagones van instaladas unas puertas automáticas que se abrirán en el momento en que la luz incida sobre ellas. ¿Qué verá la gente que va en el tren y qué verá la gente que se encuentra en el andén (acera)?

Para contestar a esta pregunta, nos atendremos solamente a los factores experimentales. La gente que va sentada en los vagones del centro del tren verá lo siguiente: Ya que de acuerdo al experimento de Michelson, la luz se propaga respecto al tren a igual velocidad en todas las direcciones, es decir, a 300 000 kilómetros por segundo, pasados nueve segundo (2 700 000 : 300 000) la luz alcanzará, simultáneamente, el primero y último vagones y ambas puertas se abrirán a un mismo tiempo.

Einstein revolucionó la Física, la trascendencia de su obra sólo es comparable con la de Newton.

¿Qué es lo que verá la gente en el andén? Respecto a este andén, la luz también se propaga a una velocidad de 300 000 kilómetros por segundo. Pero el último vagón marcha al encuentro del rayo de luz. Por esto, la luz se encontrará con el último vagón dentro de 2 700 000/(300 000+240 000)= 5 segundos. El rayo de luz, por el contrario, debe alcanzar al vagón delantero y, por lo tanto, se encontrará con éste solamente transcurridos 45 segundos lo cual se obtiene así 2 700 000/(300 000 − 240 000). Así pues, a la gente del andén le parecerá que las puertas del tren no se abren simultáneamente. Primero se abrirá la puerta de atrás y solamente pasados 45 − 5=40 segundos se abrirá la puerta de delante. De esta manera, dos acontecimientos completamente similares, la apertura de las puertas de delante y de atrás, resultaron ser simultáneos para la gente del tren, y estar separados por un intervalo de 40 segundos para la gente del andén.

Mientras tuvimos que ver con velocidades pequeñas, en comparación con la velocidad de la luz, no pudimos descubrir la relatividad del concepto de simultaneidad. Y, solamente, al estudiar movimientos de velocidad comparables con el de la luz, nos vimos obligados a revisar el concepto de simultaneidad. El descubrimiento de la relatividad del tiempo, significa, en, sí, una evolución profunda en las opiniones del hombre respecto a la naturaleza. Esta es una de las victorias más grandes del pensamiento humano, sobre la rutina de las ideas formadas durante siglos, y solamente puede ser comparada con la revolución en las nociones humanas, relacionadas con el descubrimiento de la esfericidad de la tierra. El descubrimiento de la relatividad del tiempo fue hecho en 1 905, por el físico Albert Einstein (1880 - 1955). Este descubrimiento situó al joven de 25 años, Albert Einstein, en las filas de los titanes del pensamiento humano, situándose así junto a Copérnico y Newton como trazador de nuevos caminos en la ciencia. Lenin llamó a Einstein uno de los "grandes transformadores de la ciencia natural".

FUENTE: "Acerca de la teoría de la relatividad" Ed. Mir

PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

Objetivos

1. Entender y aplicar convenientemente las leyes del movimiento rectilíneo uniforme en la resolución de problemas tipo examen de admisión.
2. Dominar métodos prácticos para la resolución de problemas sobre móviles, aplicando nociones y criterios de proporcionalidad.
3. Ampliar los conocimientos, en el campo de los problemas sobre móviles, desarrollando un marco teórico, conciso pero adecuado, que sustente los métodos empleados.

Introducción

Quizá en este momento te encuentres sentado, leyendo estas líneas, en la biblioteca o en tu casa, estudiando o tan sólo hojeando este texto.
Mueves tus manos, mueves tus ojos, te acomodas en el asiento; pero sigues en el mismo sitio. No te has desplazado a otro punto de la habitación o del lugar donde te encuentras, pero . . . ¿Realmente no te has desplazado? ¿Crees que por continuar sentado(a), en tu carpeta o en tu silla, no has cambiado de lugar o que se mantiene tu posición?

El planeta, en el que vivimos, gira constantemente alrededor de su eje y todo lo que está sobre él también se mueve. La Tierra se desplaza en el espacio alrededor del Sol y esté con todo su cortejo de planetas, se mueve junto con la Vía Láctea, desplazándose en el espacio infinito.

Podemos concluir, entonces, que ningún cuerpo está realmente en reposo; absolutamente todos están en movimiento. Éste fenómeno será tratado específicamente por la física por ser la ciencia que estudia la materia, la energía, sus propiedades y los fenómenos y las leyes que las rigen o caracterizan. Una parte de ella: la mecánica estudia el movimiento de los cuerpos, la fuerza que lo produce y las condiciones de equilibrio. La mecánica se divide en: cinemática, dinámica y estática.

Pues bien, nos interesa para nuestro estudio la Cinemática; del griego (Kynema : movimiento); se le da este nombre a la rama de la Mecánica que estudia, única y exclusivamente, el movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que lo originan. Tomaremos en cuenta tan sólo aquellas situaciones que involucran el movimiento con velocidad constante.

Como decíamos líneas arriba, partiendo de que ningún cuerpo está realmente en reposo; veremos la importancia de comprender y manejar, correctamente, las relaciones que existen entre las magnitudes que intervienen cuando un cuerpo está en movimiento. Este capítulo tiene como finalidad afianzar los conocimientos adquiridos, de manera práctica, en la vida diaria (todos sabemos, por ejemplo, que si el autobús viaja más rápido llegaremos a nuestro destino en menos tiempo o que si suelto un objeto, éste caerá y avanzará cada vez más rápido; etc.) y realizaremos el estudio dentro de un marco teórico en el cual el arte de plantear ecuaciones será una herramienta importante a usar.

NOCIONES PREVIAS

El ser humano; tan ágil al lado del caracol o de la tortuga; no lo es tanto cuando sus movimientos son comparados con otros seres que nos rodea, aunque éstos no sean muy rápidos. El movimiento de los cuerpos, independientemente de las causas que lo originan; es estudiado por la Cinemática, parte de la Mecánica, la cual integra la Física.

Podríamos decir; en forma genérica, que **móvil** es el cuerpo o partícula que está en movimiento.

Se dice que un cuerpo está en **movimiento relativo** a otro, cuando su posición medida relativa al segundo cuerpo está cambiando con el tiempo. Ahora; si la posición relativa no cambia con el tiempo; se dice entonces que el cuerpo está en un **reposo relativo**.

Actualmente se considera que el reposo y el movimiento son conceptos relativos, que dependen de la condición del cuerpo en relación al objeto que sirve como referencia. Por ejemplo, en estos momentos, estás tal vez sentado o recostado, leyendo este libro, en un reposo relativo a nuestro planeta Tierra, pero en movimiento relativo respecto del Sol. Cada día, al movilizarnos, viajamos en autobús y cuando éste pasa frente a un grifo decimos que el bus está en movimiento relativo al grifo, pero un pasajero en el bus podría afirmar que es el grifo el que está en movimiento relativo, respecto del autobús, moviéndose en el sentido opuesto. Físicamente hablando, se dice que un móvil está en movimiento cuando su vector posición, con respecto a un sistema de ejes determinados, cambia con el tiempo. Si el vector posición del móvil no cambia con el tiempo, se dice que dicho móvil está en reposo relativo.

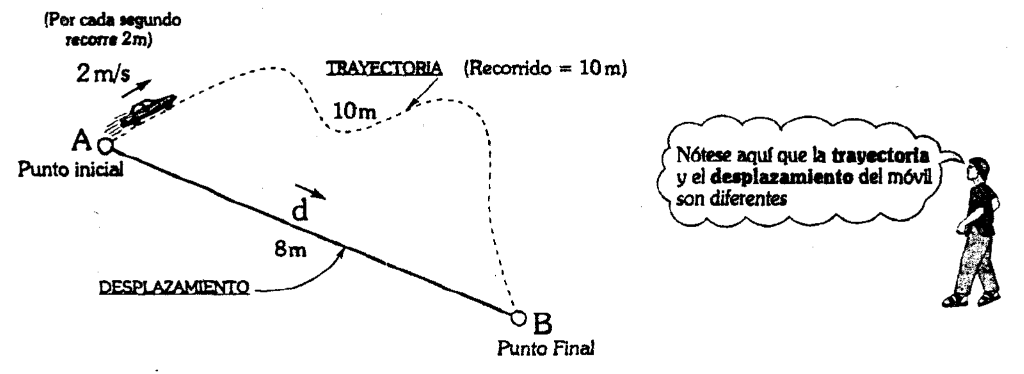
- La **trayectoria** es la línea recta o curva que describe el móvil en su movimiento.
- El **desplazamiento** es la variación entre dos vectores posición; aunque en términos más sencillos podemos decir, también, que es el vector que une el punto de partida con el punto de llegada.
- El módulo de desplazamiento es denominado **distancia**.
- Ahora, un cuerpo en movimiento de desplazamiento, cambia constantemente de posición; entonces se puede llamar **velocidad** ($\overrightarrow{V}$) a aquella magnitud vectorial, cuyo módulo (V) nos indica la **rapidez** con que se mueve un cuerpo de un lugar a otro. Cuando la rapidez es constante, se considera al movimiento como uniforme.

Por ejemplo, si un móvil recorre una trayectoria cualquiera con una rapidez constante de 5m/s, significa que en cada segundo de su movimiento, recorre 5m.

Es importante tener presente que en el capítulo veremos, principalmente, problemas que involucran el movimiento uniforme.

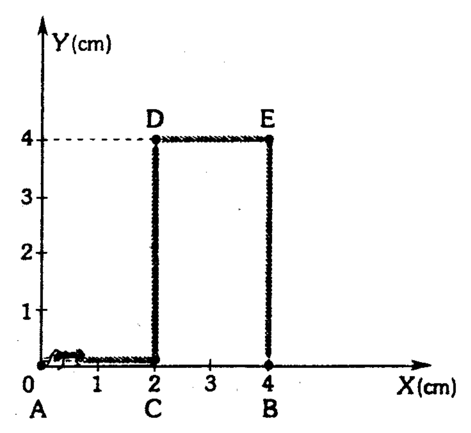
Ilustrando:

Un automóvil recorre, del punto "A" hacia "B", con rapidez constante (2m/s).



Ejemplo 1

Una hormiga se desplaza desde la posición "A" hasta la posición "B", describiendo la trayectoria mostrada. Determine la distancia y el recorrido, desde "A" hasta "B".



Resolución:

Distancia :

AC + CB = 2 + 2 = 4m

Recorrido:

AC + CD + DE + EB = 2 + 4 + 2 + 4 = 12

Observación:

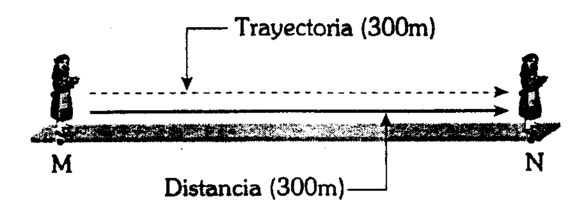
Cuando el movimiento es en línea recta (o sea, el movimiento es rectilíneo y uniforme), el desplazamiento y la trayectoria coinciden, lo cual implica que el recorrido y la distancia son iguales.

Ejemplo 2

Anita recorre de M hacia N con rapidez de 30 m/min., durante 10 min.; hallar la distancia y el espacio recorrido.

Resolución:

Se sabe que en 1' recorre 30 m, entonces en 10' recorrerá 10 veces lo que recorre en 1'; es decir: 10(30 m) = 300 m.



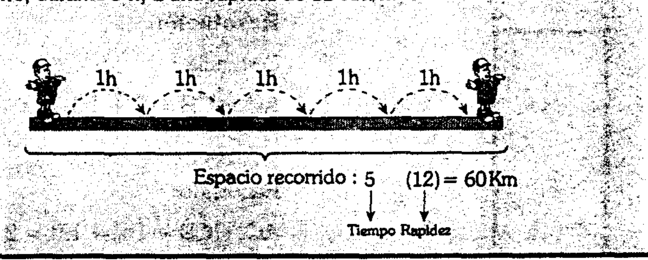
Comprobamos que:

El recorrido (e) = 300 m
La distancia (d) = 300 m
} **e = d**

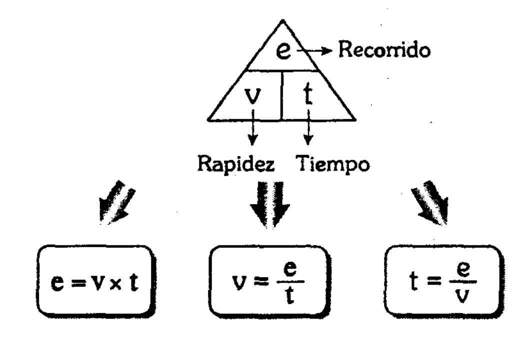
En el presente capítulo, desarrollaremos los problemas de móviles enmarcados dentro del movimiento rectilíneo uniforme, donde la aceleración es igual a cero.

Ejemplo:

Pedro recorre, durante 5 h, a una rapidez de 12 Km/h.



En general:



Ejemplo 3

Un automóvil viaja con rapidez constante de 72 Km/h. ¿Qué distancia recorrerá en 10 s?

Resolución:

Antes de aplicar: $e = V \times t$ debemos efectuar conversiones:

No olvidemos que 1Km < > 1000 m

1h < > 3600 s

Luego: $72\,\frac{Km}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,Km} \times \frac{1h}{3600\,s} = 72 \times \frac{1000}{3600}\,\frac{m}{s} = 72 \times \frac{5}{18}\,\frac{m}{s} = 20\,\frac{m}{s}$

Entonces: $72\,\frac{Km}{h}$ < > $20\,\frac{m}{s}$

Nos piden la distancia que el automóvil recorrerá en 10s.

como $e = V \times t$; tendremos $e = \left(20\frac{m}{s}\right)(10s) = 200m$.

$\therefore$ Recorrerá 200m.

Observación:

En el ejemplo resuelto podemos apreciar la conversión realizada de Km/h a m/s en la forma usual.

Una manera práctica de hacer la conversión dada se deduce de lo mostrado: bastará multiplicar la rapidez, en Km/h, por la constante 5/18 y el resultado nos dará la rapidez del móvil, en m/s.

Análogamente, si se desea convertir una rapidez dada, en m/s, a su equivalente, en km/h, bastará multiplicar por la constante 18/5 y la cantidad resultante indicará la rapidez, en km/h.

Luego: $V\frac{m}{s} \times \frac{18}{5} = \frac{18}{5}\, V\, \frac{Km}{h}$

$$\therefore \quad V\frac{Km}{h} <> \frac{5}{18}\, V\frac{m}{s}$$

Ejemplo 4

Un ciclista corre, con rapidez constante de 15 m/s. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en el último tramo en 5h a una rapidez equivalente, pero expresada en Km/h?

Resolución:

Convertimos la rapidez dada en m/s a una rapidez equivalente, pero expresada en Km/h.

Veamos:

$$V = 15\frac{m}{s} \rightleftarrows 15 \times \frac{18}{5}\,\frac{Km}{h} = 54\,\frac{Km}{h}$$

Como : $e = V \times t$ tendremos, $e = \left(54\,\frac{Km}{h}\right)(5h) = 270Km$

$\therefore$ El ciclista recorrerá : 270 Km.

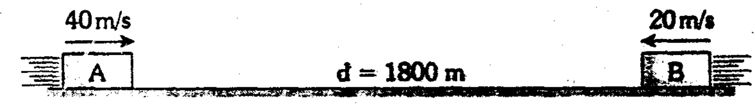
TIEMPO DE ENCUENTRO Y TIEMPO DE ALCANCE

TIEMPO DE ENCUENTRO

Ejemplo:

Dos móviles separados 1800m. van al encuentro, uno del otro, en direcciones contrarias, con rapidez de 40m/s y 20m/s. ¿En cuánto tiempo se encontrarán?

Resolución:



Por cada segundo, los dos móviles se aproximan:

$40 + 20 = 60\text{m} \ \ldots \ (V_A + V_B)$

por tanto, para que se encuentren, deben aproximarse, en total, 1800 m . . . (e_{total}) lo que significa que el tiempo a emplear será: $\dfrac{1800}{60} = 30\text{s}.$

Generalizando:

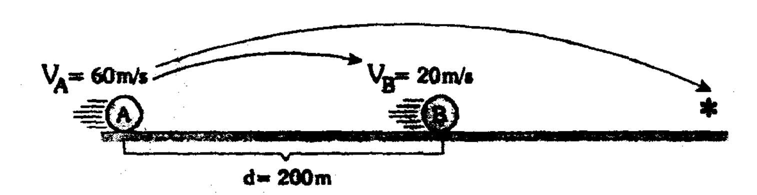
$$t_{encuentro} : \frac{d}{V_A + V_B}$$

TIEMPO DE ALCANCE

Ejemplo:

El móvil "A" persigue al móvil "B", separado de él 200m, con la rapidez indicada en el gráfico adjunto. ¿En cuánto tiempo lo alcanzará?

Resolución:



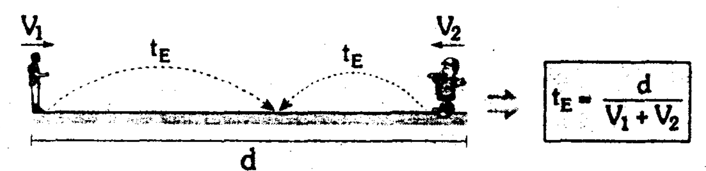
Según la rapidez, por cada segundo transcurrido, el móvil A descontará 40m = (60 - 20); luego, el tiempo total para alcanzarlo será: $\dfrac{200}{40} = 5\text{s}.$

$$t_{alcance}: \frac{200}{40} = \frac{200}{60 - 20}$$

Generalizando: $t_{alcance} = \dfrac{d}{V_A - V_B}$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

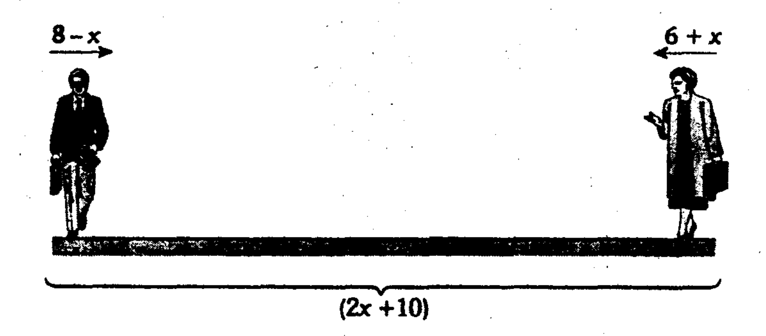
Tiempo de encuentro



Aplicando, en el problema siguiente:

Dos personas están separados 2x + 10 metros el uno del otro; si parten al mismo instante, con una rapidez de (8-x) y (6+x) metros por minuto, respectivamente, se encontrarán al cabo de un minuto; hallar *x*.

Resolución:

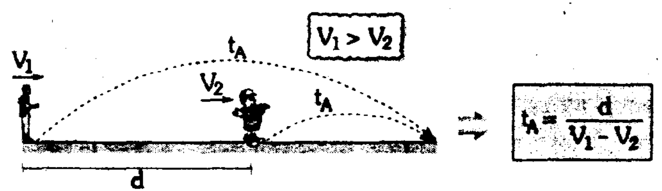


$V_1 = 8 - x$
$V_2 = 6 + x$
$t_E = 1$

Reemplazando en la relación: $\Rightarrow$ $1 = \dfrac{2x + 10}{8 - \not{x} + 6 + \not{x}} \Rightarrow$

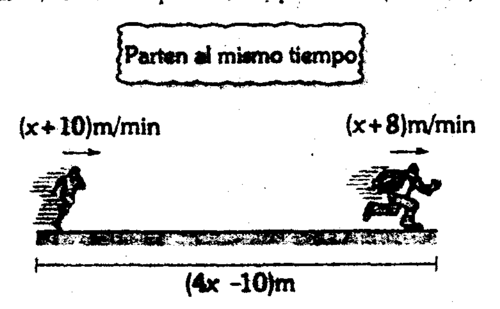
$14 = 2x + 10$
$4 = 2x$
$\therefore\ 2 = x$

Tiempo de alcance



Aplicando, en el problema siguiente:

Arturo debe alcanzar a Hugo dentro de x min., si la rapidez de ambos es de $(x+10)$ y $(x+8)$ metros por minuto en ese orden. Hallar x ; sabiendo que están separados: $(4x - 10)$ m.



$V_1 = x + 10$

$V_2 = x + 8$

$t_A = x$

Reemplazando en la relación: $\Rightarrow$ $x = \dfrac{4x - 10}{(\not{x} + 10) - (\not{x} + 8)}$ $\Rightarrow$ $2x = 4x - 10$

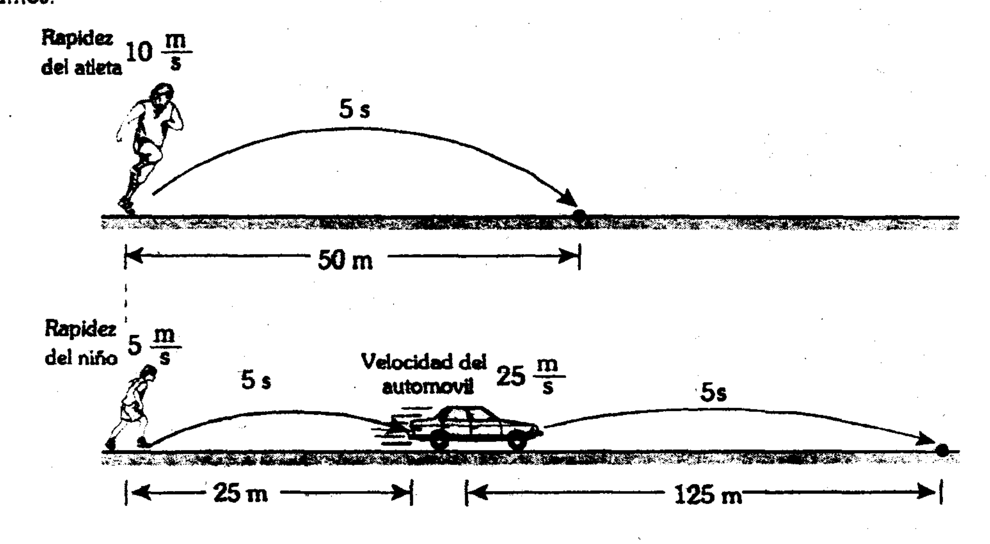
$5 = x$

RELACIÓN ENTRE LA RAPIDEZ Y ESPACIO RECORRIDO DE DOS MÓVILES PARA UN MISMO TIEMPO

Ejemplo 1

Un atleta está corriendo a razón de 10m/s y corre, durante 5 segundos; simultáneamente, en una pista paralela, un niño corre a razón de 5m/s el mismo tiempo que el atleta.

Veamos:



Podemos apreciar que la relación de la rapidez del niño y del atleta, respectivamente, es de 5 a 10; es decir como 1 es a 2 y siendo el tiempo constante, notamos que la relación de las distancias recorridas del niño y del atleta respectivamente es de 25 a 50; es decir, otra vez, de 1 a 2. Ahora, si comparamos la rapidez del atleta con la rapidez del automóvil apreciamos que ella es de 10 a 25; es decir, como 2 es a 5, y las distancias recorridas, siendo el tiempo constante e igual a 5s para ambos móviles, también están en la relación de 2 a 5, pues: $\frac{50}{125} <> \frac{2}{5}$.

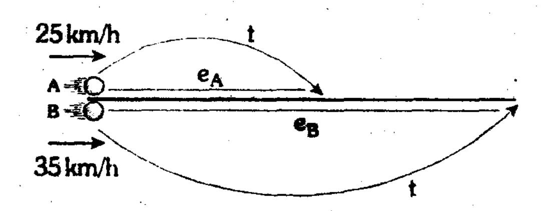
Luego:

Si la rapidez de dos móviles están en la relación de "m" a "n" y el movimiento se realiza durante el mismo tiempo para ambos (es decir: el tiempo es constante): entonces, la relación de las distancias recorridas será como "m" es a "n" y, en forma inversa: si las distancias recorridas son como "m" es a "n" (siendo el tiempo que dure el movimiento igual para ambos móviles): entonces, la rapidez de ambos estarán en la razón de "m" a "n".

Ejemplo 2

Dos móviles se desplazan durante cierto tiempo, con una rapidez de 25 km/h y 35 km/h, respectivamente. ¿Cuál es la relación de espacios recorridos?

Resolución:



Se sabe: $\frac{V_A}{V_B} = \frac{25}{35} <> \frac{5}{7}$

$\frac{e_A}{e_B} = \frac{5}{7} \rightarrow$ $e_A = 5K$, $e_B = 7K$

Ejemplo 3

Dos automóviles pasan simultáneamente por el punto "A", uno va a 35 Km/h y el otro con rapidez de 56 Km/h. Ambos corren durante cierto tiempo al cabo de los cuales están separados 294 km. Si en ese instante, el más rápido dista de B, 120 km. Calcular la distancia de A hasta B.

Resolución:

$V_1 = 56\frac{Km}{h}$ 8K 120 Km

A 5K 294 Km B

$V_2 = 35\frac{Km}{h}$

Luego: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{56}{35} <> \frac{8}{5}$ entonces, la distancia recorrida estará en la misma relación : $\frac{d_1}{d_2} = \frac{8K}{5K}$

Observando el gráfico:

$8K - 5K = 294$

$K = 98$ $\rightarrow$

Calculando AB según el móvil (1):

$AB = 8K + 120$

$AB = 8(98) + 120$

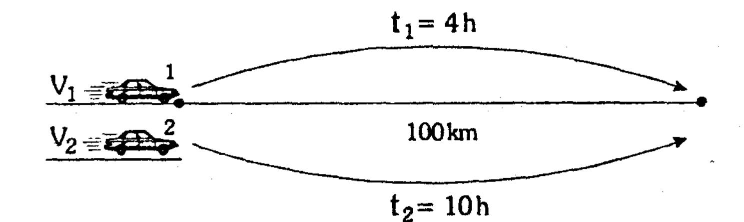
$AB = 904$ Km

Ejemplo 1

Dos autos van a recorrer 100 Km. Uno lo hace en 4 horas y el otro, en 10 horas. ¿En qué proporción está la rapidez de ambos y qué relación existe con la proporción de tiempos?

Resolución:

Veamos:



Como: $V = \dfrac{e}{t}$

Calculamos $V_1 = \dfrac{100\text{ Km}}{4\text{ h}} = \dfrac{25\text{Km}}{\text{h}}$; rapidez del primer móvil

y también $V_2 = \dfrac{100\text{ Km}}{10\text{ h}} = \dfrac{10\text{Km}}{\text{h}}$; rapidez del segundo móvil

Apreciamos, entonces, que la relación de rapideces es:

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{25}{10} < > \dfrac{5}{2}$ "V_1 es a V_2 como 5 es a 2" en forma contraria a lo que ocurre con la relación de tiempos: $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{4}{10} < > \dfrac{2}{5}$.

En general:

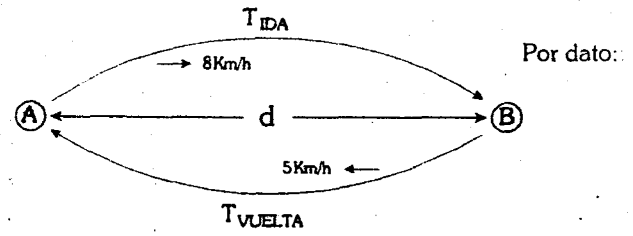
	Móvil 1	Móvil 2		Relación de rapidez 1° al 2°		Relación de tiempo 1° al 2°
Rapidez :	V_1	V_2	$\rightarrow$	$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{a}{b}$	$\rightarrow$	$\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{b}{a}$
Tiempo :	t_1	t_2				
Distancia :	d	d				

Ejemplo 2

Para ir de un punto a otro, una persona camina a razón de 8 Km/h y para volver al punto de partida, lo hace a razón de 5 km/h. Se desea saber la distancia que hay entre los puntos, sabiendo que en el viaje de ida y vuelta ha empleado, en total, 13 horas.

Resolución:

Del enunciado $\frac{V_{ida}}{V_{vuelta}} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{T_{ida}}{T_{vuelta}} = \frac{5}{8} \quad \therefore \quad T_{ida} : 5k \quad T_{vuelta} : 8k$



Por dato: $\underbrace{T_{ida}}_{5K} + \underbrace{T_{vuelta}}_{8K} = 13h$

$5K + 8K = 13 \Rightarrow K = 1$

$T_{ida} = 5h$

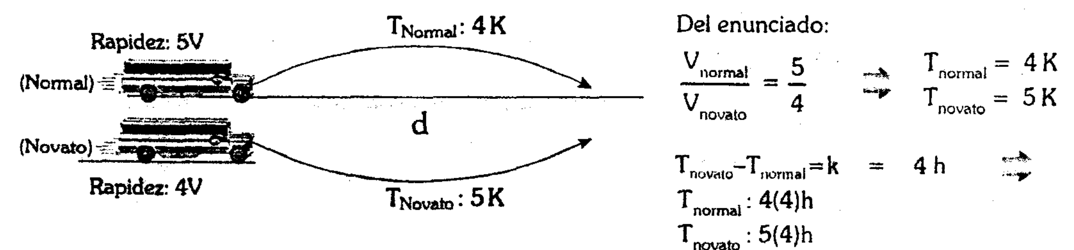
$T_{vuelta} = 8h$

Luego: $d = \left(8\frac{Km}{\not{h}}\right)(5\not{h}) = 40\ Km$

Ejemplo 3

Un microbús debía cubrir cierta distancia en un determinado tiempo, pero como el conductor era novato, recorrió todo el trayecto con 1/5 menos de la rapidez normal, llegando así con un retraso de 4 horas. ¿En cuántas horas debió llegar normalmente?

Resolución:



Del enunciado:

$\frac{V_{normal}}{V_{novato}} = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{matrix} T_{normal} = 4K \\ T_{novato} = 5K \end{matrix}$

$T_{novato} - T_{normal} = k = 4\ h \Rightarrow$

$T_{normal} : 4(4)h$

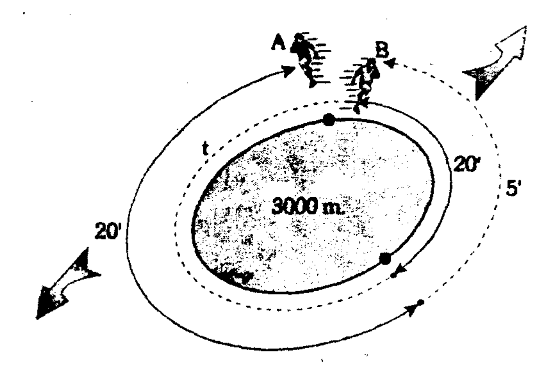
$T_{novato} : 5(4)h$

$\therefore$ Tiempo normal : 16 h

Ejemplo 4

En una pista circular de 3 000 metros, dos corredores parten juntos en sentidos contrarios y se cruzan al cabo de 20 minutos. Después de 5 minutos adicionales llega el más veloz al punto de partida. ¿Cuál es la rapidez del otro corredor en m/min.?

Resolución:



Observamos que la relación de tiempos para un mismo recorrido es: $\frac{t_A}{t_B} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Observación:

Recordar las relaciones de tiempos para un mismo espacio.

- Por lo tanto, para este tramo que es un mismo recorrido para los 2, la relación de tiempos deberá ser también de 1 a 4.

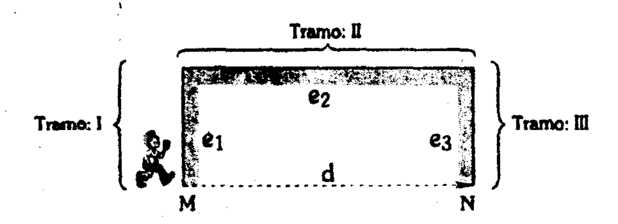
- $\frac{A}{B} = \frac{1}{4} = \frac{20'}{80'} \Rightarrow t = 80'$ (×20)

Luego: t_{total} del más lento (B) = 20 + 80 = 100'

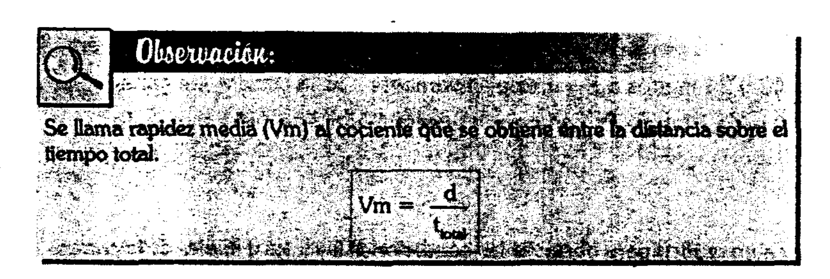
$\therefore\ V_B = \frac{3000\ m}{100\ min.} = 30\ \frac{m}{min}$.

Ejemplo 5

Una persona camina del punto "M" hacia el punto "N", con una rapidez de 20 km/h, durante 2 h, el tramo I; 4 h, el tramo II y 2 h, el tramo III. Hallar su rapidez media.



Resolución:



- No olvidemos que se llama distancia a la unión del punto de partida con el punto de llegada.

$$d = e_2 = \underbrace{20\frac{Km}{h}}_{V} \times \underbrace{4h}_{t} = 80\ Km$$

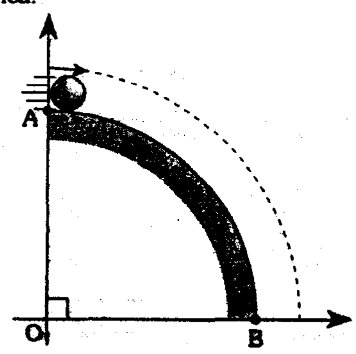
- Además, todo el tiempo que utilizó para desplazarse esta distancia es de: 2 h + 4 h + 2 h = 8 h.

$$\therefore\ V_m = \frac{d}{t_{total}} = \frac{80\,Km}{8\,h} = 10Km/h$$

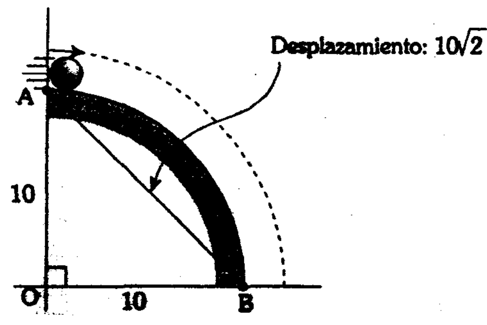
Ejemplo 6

Un móvil se desplaza de "A" hacia "B", en 10 s. Hallar la rapidez media del móvil si OA = OB = 10 m. (ver gráfica)

Gráfica:



Resolución:



$$V_m = \frac{d_{AB}}{t_{Total}} \Rightarrow V_m = \frac{10\sqrt{2}\,m}{10\,s}$$

$$V_m = \sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

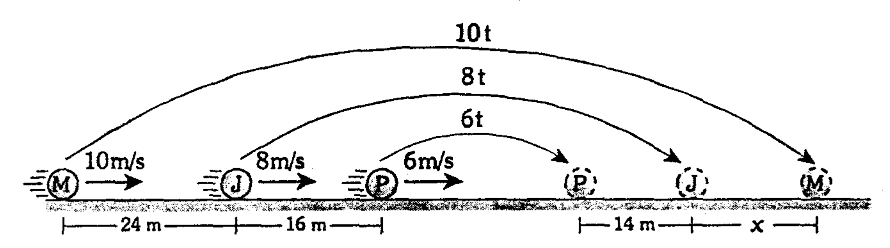
La rapidez de J, M y P es de 8, 10 y 6 m/s respectivamente. Participan en una carrera, donde M les da una ventaja de 40 y 24 metros a P y J respectivamente. Si la carrera fue ganada por M cuando J le llevaba una ventaja de 14 m. a P; ¿en cuánto aventajó M a J en dicho momento?

Resolución:

Vamos a recurrir a un gráfico para observar las condiciones iniciales y finales de la carrera, además de las distancias recorridas por cada uno.

Sea "t" el tiempo transcurrido: (el tiempo es el mismo para los tres móviles).

Observación: $e = V.t$



Del gráfico:

$8t = 16 + 6t + 14 \Rightarrow t = 15$

También:

$10t = 24 + 8t + x$

$2t = 24 + x$

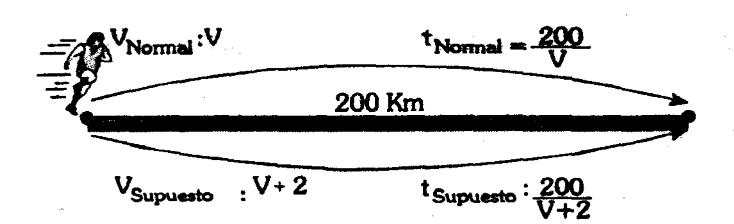
$30 = 24 + x \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ Respuesta : 6 m

PROBLEMA 2

Un móvil recorrió 200 Km con rapidez constante. Si hubiera viajado con una rapidez mayor en 2Km/h, hubiera empleado 5 horas menos. ¿En qué tiempo recorrerá 240 Km?

Resolución:



Sabemos, por dato, que el tiempo en el caso supuesto es menor que el tiempo del caso real, en 5 h; por lo tanto, la diferencia de tiempos sería de 5 horas:

Es decir: $\dfrac{200\text{ Km}}{V\text{Km/h}} - \dfrac{200\text{ Km}}{(V+2)\text{Km/h}} = 5\text{h} \Rightarrow$ resolviendo $V = 8\text{ Km/h}$

Por lo tanto, el tiempo que demorará en recorrer 240 Km será:

$$\text{Tiempo} = \frac{240\text{ km}}{8\text{ km/h}} = 30\text{ horas}$$

PROBLEMA 3

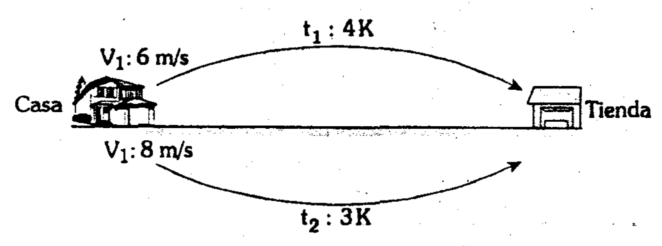
Un alumno desea calcular la distancia entre su casa y cierta tienda, observa que caminando a razón de 6m/s tarda 4 segundos más que si lo hace a razón 8m/s. ¿Cuál es la distancia mencionada?

Resolución:

Como la distancia es constante, entonces la rapidez y el tiempo son inversos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{6}{8} <> \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{4}{3} \quad \boxed{t_1 = 4\text{K} \;;\; t_2 = 3\text{K}}$$

Graficando:



Sabemos que la diferencia de tiempos es 4 s.

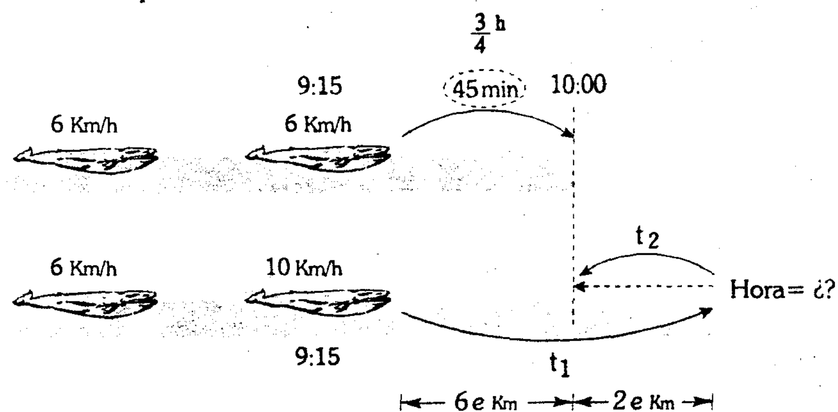
$t_1 - t_2 = 4 = 4\text{K} - 3\text{K}$ Luego: $d = \left(6\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)(16\text{s}) = 96\text{ m}$

$\therefore\ \text{K} = 4 \Rightarrow t_1 = 16\text{ s}$ Distancia = 96 m

PROBLEMA 4

Dos ballenas nadaban juntas tranquilamente en línea recta, a 6 km/h, en pleno Océano Antártico. Una de ellas, de pronto, decidió ir más a prisa, varió así su rapidez a 10 Km/h, sin cambiar de sentido; después dió bruscamente la vuelta y volvió al encuentro de la otra, la cual no había modificado su rapidez ni su sentido. Sabiendo que las ballenas se separaron a las 9:15 a.m. y se volvieron a encontrar a las 10:00 a.m. ¿Qué hora era cuando la más rápida dió la vuelta?

Resolución:
Graficando la situación planteada sea:



Recordemos que para tiempos iguales, los espacios recorridos por las dos ballenas son proporcionales a la rapidez respectiva. Por eso observas en el gráfico que la primera ha recorrido 6e y la segunda 10e. El recorrido de la segunda ballena, desde las 9:15 hasta las 10:00 (45 min. < > 3/4 h) será:

(10 Km/h) (3/4 h)

Observando el gráfico, dicho recorrido es: 10 e.

$$10 \cdot \frac{3}{4} = 10e \Rightarrow e = \frac{3}{4} \text{ Km} \Rightarrow t^2 = \frac{6e+2e}{10} = \frac{6}{10} h = 36 min$$

Finalmente la hora en que dio la vuelta será: 9:15 + 36 min. = 9:51 min.

∴ Cuando la más rápida dió la vuelta era las 9:51 min.

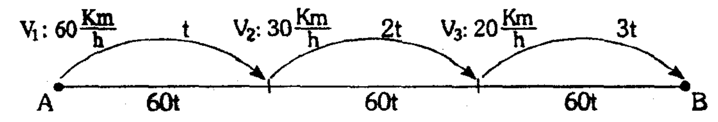
PROBLEMA 5

Un ciclista se dirige de una ciudad A a otra B, dividiendo su recorrido en tres tramos iguales. El primer tramo lo recorre con una rapidez de 60 km/h; el segundo tramo, a 30 Km/h y el último, con 20 Km/h. Halle la rapidez media del ciclista.

Resolución:

$$Rapidez_{media} = \frac{\text{Distancia total}}{\text{Tiempo total}}$$

Por lo tanto, debemos hallar el desplazamiento del móvil y el tiempo total empleado en este recorrido. Como el recorrido se divide en tres tramos iguales.
Graficando:



Reemplazando la distancia y el tiempo total tendremos:

$$\therefore V_{media} = \frac{180\,t}{6\,t} = \frac{30 \text{ Km}}{h}$$

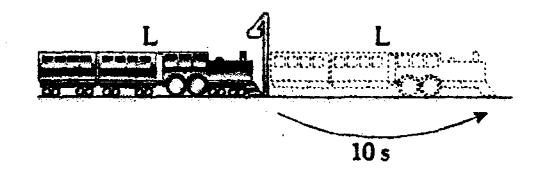
PROBLEMA 6

Un tren cruza un poste en 10 s y un túnel en 15 s ¿En cuánto tiempo el tren cruzaría un túnel cuya extensión fuera el triple del anterior?

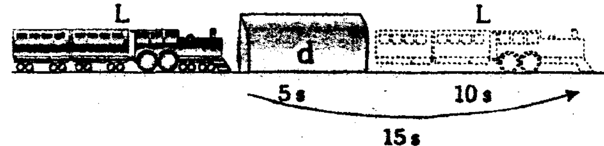
Resolución:

Analizando cada uno de los tres casos presentados:

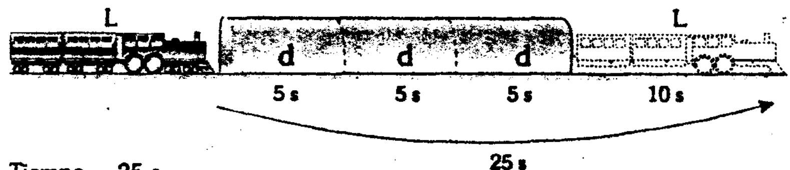
I. El tren cruza el poste en 10s.
(El tren recorre su propia longitud)



II. El tren cruza el túnel en 15s.
(El tren recorre la longitud del túnel y su propia longitud)



III. El tren cruzara el túnel de triple longitud.



$\therefore$ Del tercer gráfico: Tiempo = 25 s

PROBLEMA 7

Dos trenes van en sentido contrario con una rapidez de 36 km/h y 54 km/h, respectivamente. Un pasajero, sentado en el primer tren, nota que el segundo demora en pasar por su costado seis segundos. ¿Cuál es la longitud del segundo tren?

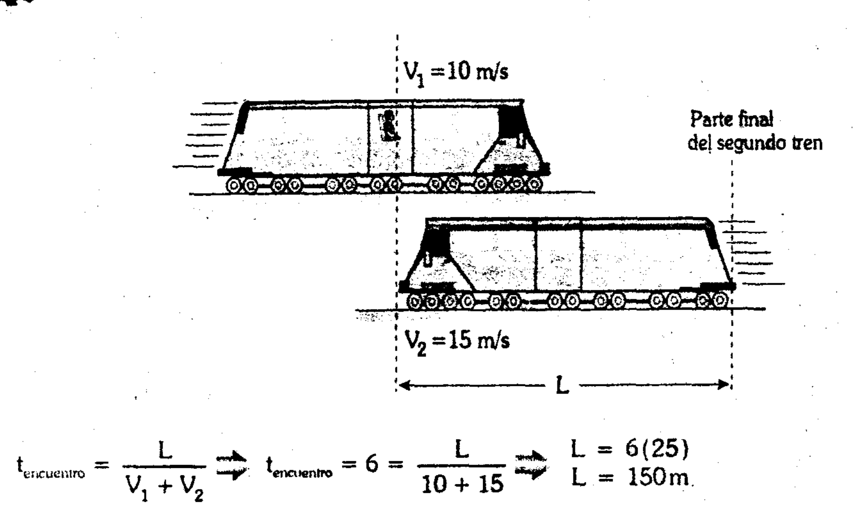
Resolución:

Haremos la conversión de la rapidez de ambos, dadas a $\frac{m}{s}$:

$36\frac{Km}{h} \times \frac{5}{18} = 10\frac{m}{s}$ $\quad \therefore$ 1° tren: $10\frac{m}{s}$

$54\frac{Km}{h} \times \frac{5}{18} = 15\frac{m}{s}$ $\quad \therefore$ 2° tren: $15\frac{m}{s}$

Como el pasajero viaja sentado en el primer tren; lleva la rapidez de dicho tren, es decir: el pasajero se está "moviendo" con una rapidez de 10 m/s que, desde el momento en que "ve pasar" la parte delantera del segundo tren, transcurren seis segundos hasta que "ve pasar" la parte final del tren. Esos 6 s son el "tiempo de encuentro" del pasajero con el "extremo final del segundo tren", considerando como distancia de separación toda la longitud del segundo tren. Observando el gráfico:



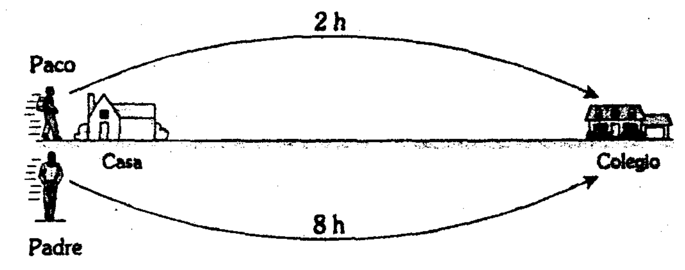
$$t_{encuentro} = \frac{L}{V_1 + V_2} \Rightarrow t_{encuentro} = 6 = \frac{L}{10 + 15} \Rightarrow \begin{array}{l} L = 6(25) \\ L = 150\text{m} \end{array}$$

∴ La longitud del 2° tren es de 150 m

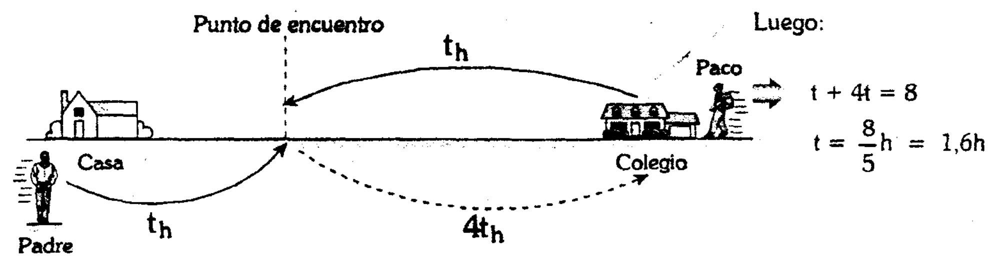
PROBLEMA 8

Paco recorre todos los días la distancia entre su casa y el colegio, empleando un tiempo de 2 horas y su padre la realiza en 8 horas. Cierto día, Paco parte del colegio hacia su casa justo cuando su padre, que partía de ella, se dirigía a él. ¿Al cabo de qué tiempo se encontrarán?

Resolución:



Se deduce que para un mismo recorrido, el padre emplea el cuádruple del tiempo de lo empleado por Paco.



Luego:

$$\Rightarrow \quad t + 4t = 8$$

$$t = \frac{8}{5}h = 1{,}6h$$

∴ Se encuentran al cabo de 1,6 h.

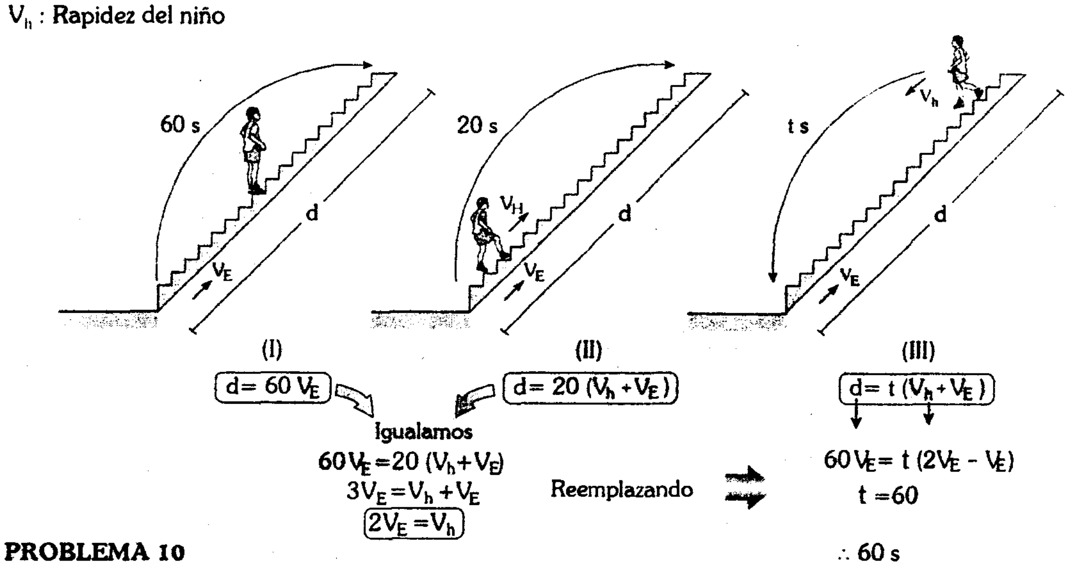
PROBLEMA 9

Un niño parado sobre una escalera mecánica en funcionamiento sube en 60 s, pero, si caminara sobre la escalera en movimiento, emplearía 20 s. ¿En cuánto tiempo el niño bajaría caminando sobre la misma escalera en funcionamiento?

Resolución:

V_E : Rapidez de la escalera

V_h : Rapidez del niño



PROBLEMA 10

Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los 3 s y el siguiente a los 3,6 s. ¿Cuál es la separación entre las montañas?

Resolución:

Cuando la persona emite el grito, el sonido se desplaza a ambos lados, haciendo el viaje de ida y vuelta en el mismo tiempo.

También sabemos:

$V_{sonido} = 340 m/s$

1,5 s
1,5 s
1,8 s
1,8 s

$d_1 = 340\ (1,5)$ $d_2 = 340\ (1,8)$

Distancia entre las dos montañas → 510 + 612 = 1122 m

∴ La separación entre las 2 montañas es de 1122 m.

PROBLEMA 11

Un corredor da una vuelta completa a una pista circular en t segundos. Otro corredor recorre la pista, en sentido contrario, y se cruza con el anterior cada 3t/8 segundos. ¿Cuántos segundos emplea el segundo corredor en dar una vuelta a la pista?

Resolución:

Todo la vuelta en t s

Todo la vuelta en x s

$\frac{3t}{8}$

$t - \frac{3t}{8} = \frac{5t}{8}$

Recordemos que:

V_1, t_1, t'_1, V_2, t_2, t'_2

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t'_1}{t'_2}$

Ooo

para el tramo $\widehat{AB}$		para toda la vuelta	

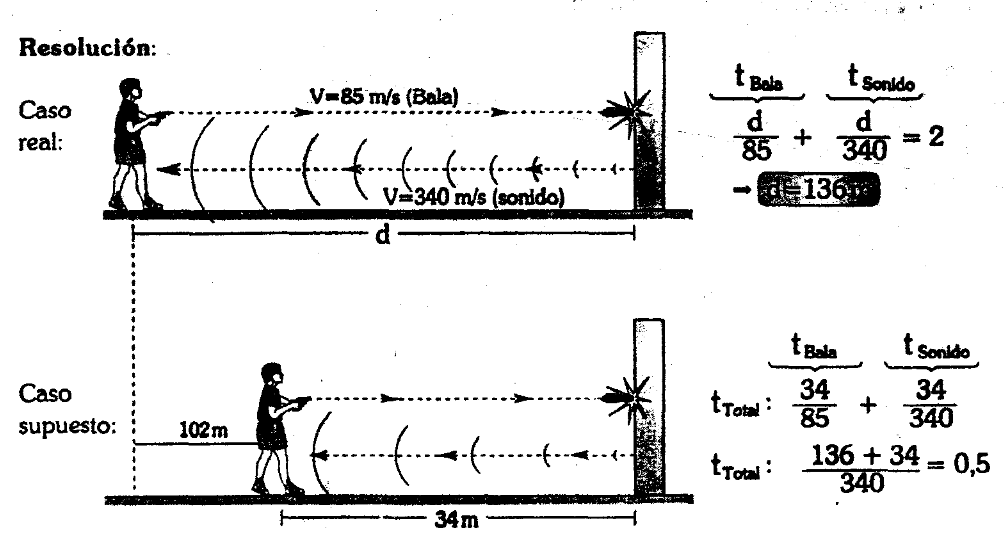
$$\frac{\frac{3t}{8}}{\frac{5t}{8}} = \frac{x}{t} \quad \therefore\ x = \frac{3t}{5}$$

PROBLEMA 12

Una persona se encuentra delante de una pared, efectúa un disparo y luego de dos segundos escucha el impacto; pero si hubiera estado 102 m más cerca de la pared, ¿al cabo de qué tiempo escucharía el impacto?

(V_{sonido} = 340 m/s, V_{bala} = 85 m/s)

Resolución:



∴ En el segundo caso se escucharía el impacto, luego de 0,5 s.

PROBLEMA 13

Un móvil tiene rapidez de x m/s más que otro móvil, si ambos parten del mismo punto y en la misma dirección, luego de cuánto tiempo uno adelanta al otro tantos metros como la diferencia de distancias en x segundos.

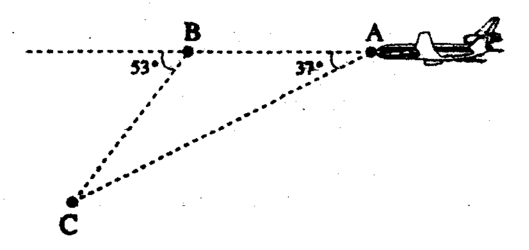
Resolución:

En 1 s se diferencian x m

⇒ En x s se diferencian x^2 m. ∴ **x segundos**

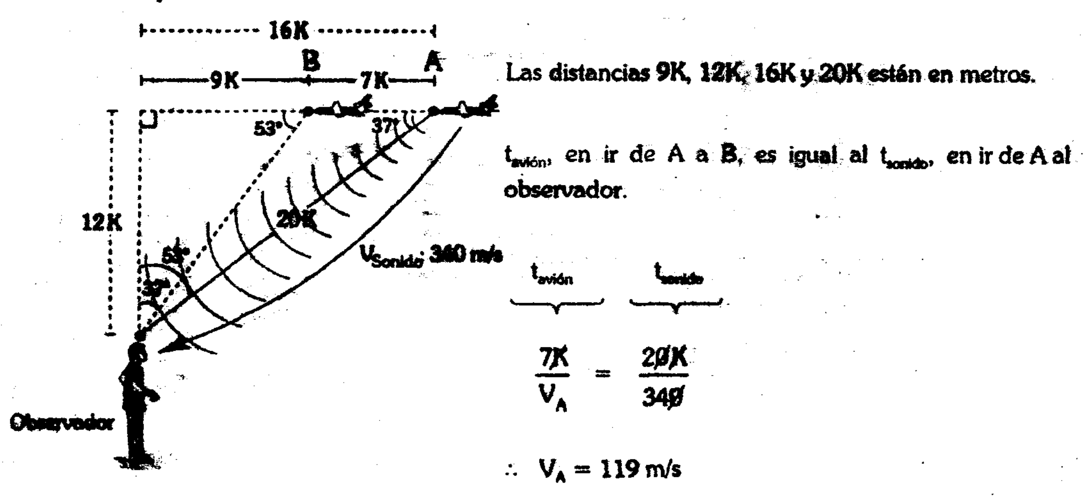
PROBLEMA 14

El ruido emitido por el avión situado en la posición A, es escuchado por un observador ubicado en C cuando el avión se encuentra en la posición B. Determine la rapidez del avión.



Resolución:

Veamos el esquema:



Las distancias 9K, 12K, 16K y 20K están en metros.

$t_{avión}$, en ir de A a B, es igual al t_{sonido}, en ir de A al observador.

$$\underbrace{\frac{7K}{V_A}}_{t_{avión}} = \underbrace{\frac{20K}{340}}_{t_{sonido}}$$

∴ $V_A = 119$ m/s

PROBLEMA 15

Desde cierto lugar de un río, un bote parte, río arriba, durante 2 h alejándose 40 km, al cabo de lo cual se malogra el motor del bote; si el defecto se repara en 1/2 h y el bote retorna, río abajo, pasando por la posición inicial y alejándose de éste 85 km, empleando 3 h en el viaje río abajo. Halle la rapidez de la corriente del río.

Resolución:

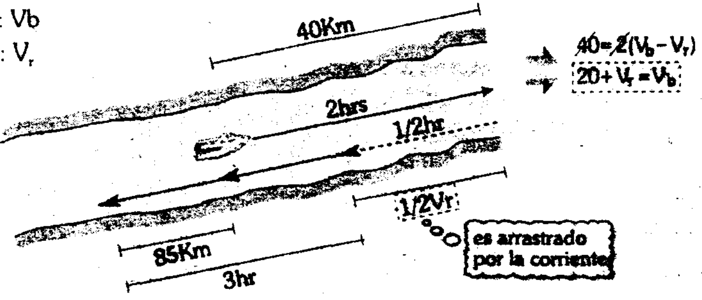
Rapidez del bote : Vb

Rapidez del río : V_r

En contra la corriente del río:

$\Rightarrow 40 = 2(V_b - V_r)$

$\Rightarrow 20 + V_r = V_b$



Luego:

A favor de la corriente del río:

$40 + 85 = 3(V_b + V_r) + \frac{1}{2}V_r \Rightarrow 125 = 3(20 + V_r + V_r) + \frac{1}{2}V_r \Rightarrow 125 = 60 + 6V_r + \frac{1}{2}V_r$

$\Rightarrow 65 = \frac{13}{2}V_r$

$\Rightarrow V_r = 10$ km/h

∴ La rapidez de la corriente del río es de 10 km/h

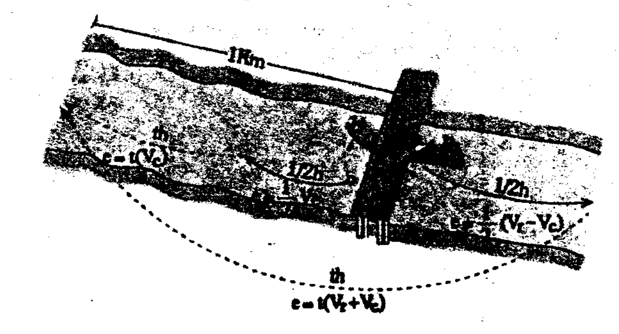
PROBLEMA 16

Un hombre que rema a una rapidez constante, remonta un río que fluye a una rapidez también constante. Al pasar bajo un puente, pierde su sombrero; se da cuenta de la pérdida media hora más tarde, da entonces media vuelta y recupera su sombrero a 1 Km más abajo que el puente. ¿Cuál es la rapidez de la corriente?

Resolución:

V_r : Rapidez del remero

V_c : Rapidez de la corriente del río



Luego, planteamos las ecuaciones:

- $tV_c + \frac{1}{2}V_c = 1 \;\ldots\; (\alpha)$ $\quad \Rightarrow tV_r + tV_c = 1 + \frac{1}{2}V_r - \frac{1}{2}V_c$
- $t(V_r + V_c) = 1 + \frac{1}{2}(V_r - V_c)$ $\quad \Rightarrow tV_r + \underbrace{tV_c + \frac{1}{2}V_c}_{1} = 1 + \frac{1}{2}V_r$

$\Rightarrow tV_r = \frac{1}{2}V_r \Rightarrow t = \frac{1}{2}h$

Reemplazando en (α): $\frac{1}{2}V_c + \frac{1}{2}V_c = 1 \Rightarrow V_c = 1$ Km/h

∴ La rapidez de la corriente es de 1 km/h

PROBLEMA 17

Rosa y Ana están a orillas opuestas de un lago y empiezan a remar al mismo tiempo, siendo la rapidez de cada una constante. Cuando se cruzan por primera vez están a 60 m de la orilla izquierda, continúan remando, llegando a la costa, se vuelven y reman nuevamente, cruzándose esta vez a 38 m de la orilla derecha. ¿Qué ancho tiene el lago?

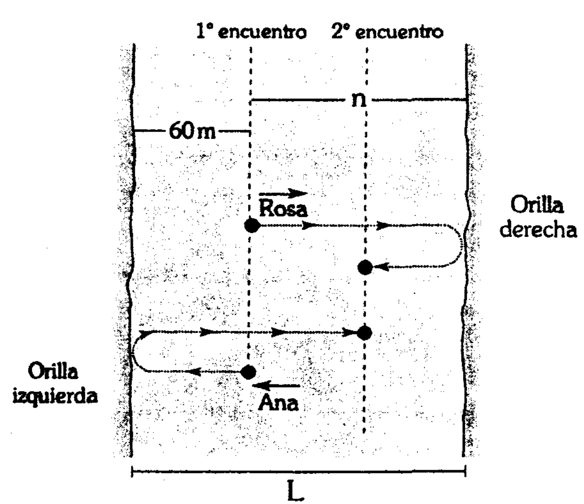
Resolución:

Supongamos que Rosa parte del extremo izquierdo y que Ana lo hace de la orilla derecha. Cuando ocurre el primer encuentro a 60 m de la orilla izquierda es porque Rosa ha recorrido 60 m y Ana ha recorrido "n" metros simultáneamente es decir en un mismo tiempo "t". Nos damos cuenta entonces que la suma de las distancias recorridas por ambas en forma conjunta es "60+n" es decir el ancho "L" del lago en el tiempo t.

Veamos:

Ahora, si a partir de este primer encuentro sumamos las distancias recorridas por Ana y Rosa hasta el segundo encuentro (distancias que en el siguiente gráfico están indicadas por líneas hechas con puntos) hallaremos que dicha suma es 2 L es decir dos veces el ancho del lago.

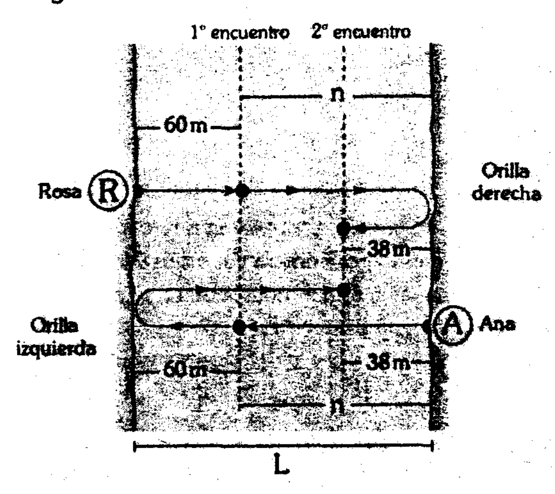
Veamos:



Luego, si el ancho del lago se recorre en forma conjunta en un tiempo t, entonces el doble de dicha distancia se recorre en un tiempo 2 t; pero recordemos que Rosa, en un tiempo t, recorrió 60 m; entonces, en 2 t, recorrerá 120 m.

Además: $n + 38 = 120$, $n = 82$ m; finalmente: $L = 60 + 82 = 142$ m

A continuación, un resumen gráfico de todo lo dicho:



∴ El lago tiene un ancho de 142 m.

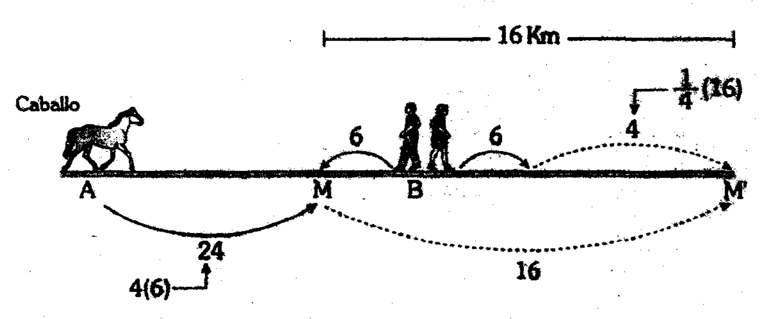
PROBLEMA 18

Un caballo parte de A en dirección a B, al mismo tiempo que dos peatones parten de B en sentidos opuestos. El caballo los encuentra, a uno en M y al otro en M'. Calcule la distancia AB, sabiendo que los dos peatones marchan a la misma rapidez constante, y la rapidez del caballo es 4 veces la de los peatones, siendo la distancia MM' de 16 km.

Resolución:

Recordemos que los peatones tienen una misma rapidez y que el caballo tiene el cuádruplo de rapidez. Entonces, para un mismo tiempo, el caballo recorre siempre 4 veces lo que recorren los peatones.

Luego:



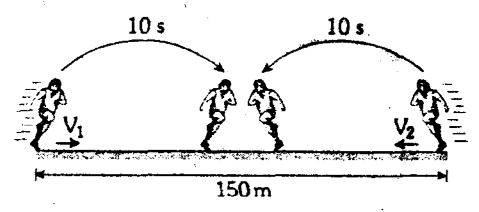
∴ La distancia AB es de **24 + 6 = 30 Km**

PROBLEMA 19

Dos atletas están separados 150 m, si corren al encuentro, éste se produce al cabo de 10 segundos; pero si corren el uno en pos del otro, el alcance se produce a los 30 segundos. Halle la rapidez del atleta que da alcance al otro.

Resolución:

Del enunciado:

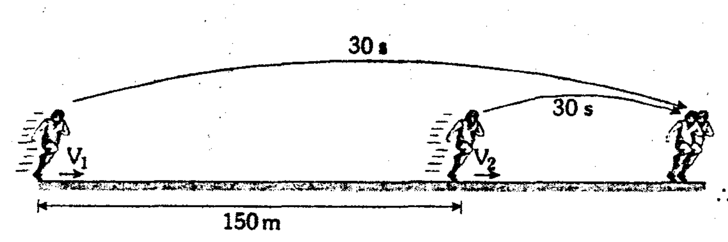


Recordando:

$$T_{encuentro} = \frac{d_{separación}}{V_1 + V_2}$$

$$\therefore\ 10 = \frac{150}{V_1 + V_2} \Rightarrow V_1 + V_2 = 15$$

Recordando:



$$T_{alcance} = \frac{d_{separación}}{V_1 - V_2}$$

$$\therefore\ 30 = \frac{150}{V_1 - V_2} \Rightarrow V_1 - V_2 = 5$$

Sumando las ecuaciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 + V_2 = 15 \\ V_1 - V_2 = 5 \end{array}\right) +$$

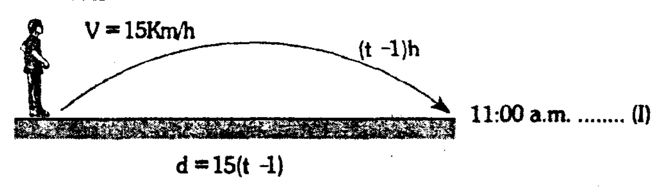
$$2V_1 = 20$$

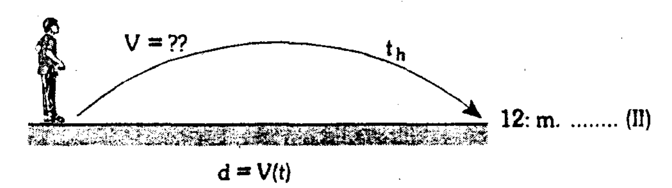
$\therefore$ La rapidez del más rápido es $V_1 = 10$ m/s

PROBLEMA 20

Juanito calculó que, si corría a 10 km/h, llegaría una hora después del mediodía; y, si corría a 15 km/h, llegaría una hora antes del mediodía. ¿A qué rapidez debe viajar para llegar exactamente al medio día?

Resolución:





V = 10Km/h

(t+1)h

1:00 p.m. .... (III)

d = 10(t+1)

De (I) y (III) : $15(t-1) = 10(t+1) \Rightarrow t = 5h$

De (II) y (III) : $V(t) = 10(t+1)$

$\Rightarrow V(5) = 10(6) \Rightarrow V = 12\ km/h$

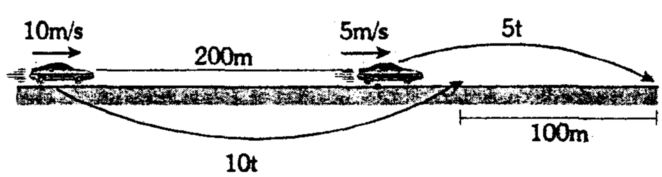
∴ Debe viajar con una rapidez de **12 km/h**

PROBLEMA 21

Un auto que viaja con una rapidez de 10 m/s se encuentra a 200 m detrás de otro auto, cuya rapidez es 5 m/s. Si se desplazan en la misma dirección, ¿después de qué tiempo dicho auto se encontrará a 100 m detrás del otro?

Resolución:

Luego de "t"s estarán separados 100 m.

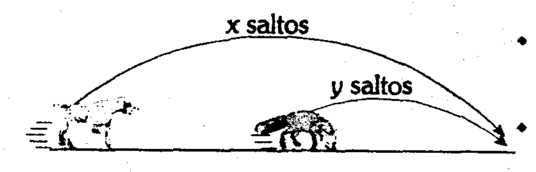


$\Rightarrow$ $10t + 100 = 200 + 5t$ y resolviendo $t = 20$, luego de 20 s.

PROBLEMA 22

Un zorro robó una gallina y, después de haber realizado 80 saltos, empezó a perseguirlo un perro cazador; el zorro da 4 saltos, mientras el perro da 3; pero 5 saltos de éste equivalen a 7 de aquél. ¿Cuántos saltos dio el perro para alcanzar al zorro?

Resolución:



- $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ .... (I)
- x saltos del perro equivalen a $\frac{7}{5}x$ saltos del zorro y

por dato: $\frac{7}{5}x - y = 80$ ...... (II)

Resolviendo (I) en (II)

$x = 1\,200$ saltos

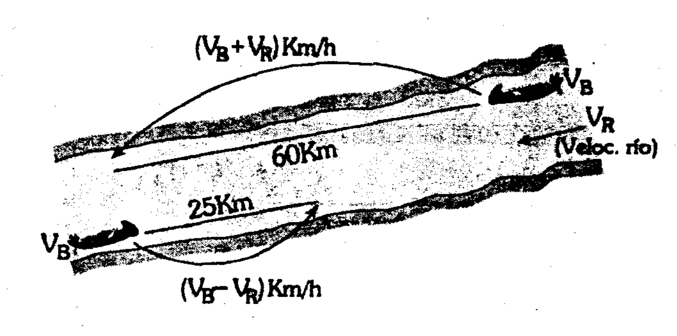
$y = 1\,600$ saltos

∴ El perro dió 1 200 saltos

PROBLEMA 23

Un hombre rema 60 km río abajo, empleando el mismo tiempo que emplea en remar 25 km río arriba. Halle la rapidez del bote, en agua tranquilas, si la rapidez de la corriente del río es de 14 km/h.

Observación: $t = \frac{e}{V}$



Por dato:

$$\underbrace{T_{bajada}} = \underbrace{T_{subida}}$$

$$\frac{60}{V_B + V_R} = \frac{25}{V_B - V_R}$$

$$\frac{12}{V_B + V_R} = \frac{5}{V_B - V_R}$$

$12V_B - 12V_R = 5V_B + 5V_R$

$7V_B = 17V_R$ (Por dato: $V_R = 14$ Km/h)

$7V_B = 17(14)$

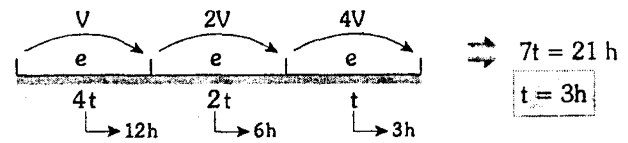
$V_B = 17 \times 2 = 34$

∴ La rapidez del bote en aguas tranquilas es de 34 km/h.

PROBLEMA 24

Un autobús recorre su ruta en tres etapas iguales, usando en cada una de las dos últimas el doble de la rapidez que en la etapa anterior, demorando en total 21 horas; cierto día se observó que 2/5 de lo recorrido es igual a los 7/5 de lo que faltaba recorrer. ¿Cuántas horas había viajado hasta ese momento dicho microbús?

Resolución:
Distribuyendo el tiempo de 21 h para las 3 etapas iguales, según su rapidez en cada etapa, tendremos:



$\Rightarrow$ $7t = 21$ h

$t = 3h$

Luego:

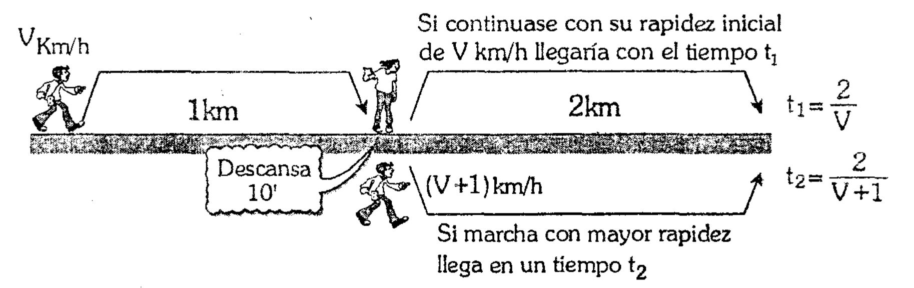
Recorrido = 7d
Falta = 2d
} Total = 9d

3d | 3d | d d d
12h | 6h | 1h 1h 1h
recorrido | falta

$\therefore$ Tiempo total (recorrido) = 12 + 6 + 1 = 19h

PROBLEMA 25
Andrés parte para caminar 3 km y piensa llegar a su destino a cierta hora; después de andar 1 km se detiene 10 minutos, por lo cual tendrá que andar entonces 1 km por hora más de prisa para llegar a tiempo a su destino. Calcule su rapidez inicial.

Resolución:
¡Atención!, nuestro siguiente gráfico nos muestra las condiciones, según el enunciado del problema:



Luego, como llegó a tiempo, entonces el tiempo t_2 es 10' menos que el tiempo t_1, pues descansó 10'.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{2}{V}}_{t_1} - \underbrace{\frac{2}{V+1}}_{t_2} = \frac{1}{6}$$

Observación: $10' <> \frac{1}{6}$ h

$$\Rightarrow \frac{1}{V} - \frac{1}{V+1} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{V(V+1)} = \frac{1}{3 \times 4} \Rightarrow V = 3$$

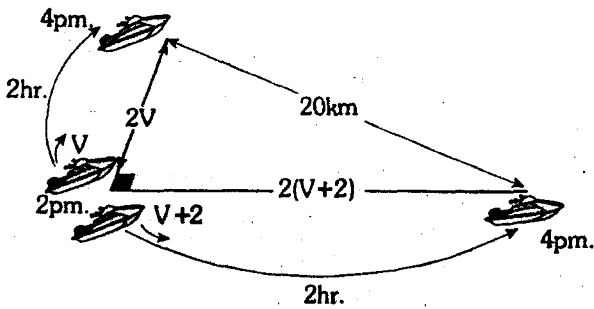
$\therefore$ **Rapidez inicial = 3 km/h**

PROBLEMA 26

A las 2 p.m., dos botes parten simultáneamente de un mismo punto y sus trayectorias forma un ángulo recto (ver figura); a las 4:00 p.m. se encuentran a 20 km de distancia entre sí. Si el primer bote se desplaza 2 km/h más rápido que el segundo, calcule la rapidez de ambos botes.

Resolución:

Del enunciado:



Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$(2V)^2 + [2(V+2)]^2 = (20)^2$$
$$(2V)^2 + 4(V+2)^2 = 400$$
$$4V^2 + 4V^2 + 16V + 16 = 400$$
$$8V^2 + 16V = 384$$
$$V^2 + 2V = 48$$
$$V(V+2) = 6 \times 8 \Rightarrow \boxed{V = 6}$$

∴ Las rapideces respectivas de los botes son:

1er. 8 Km/h ; 2do. 6 Km/h

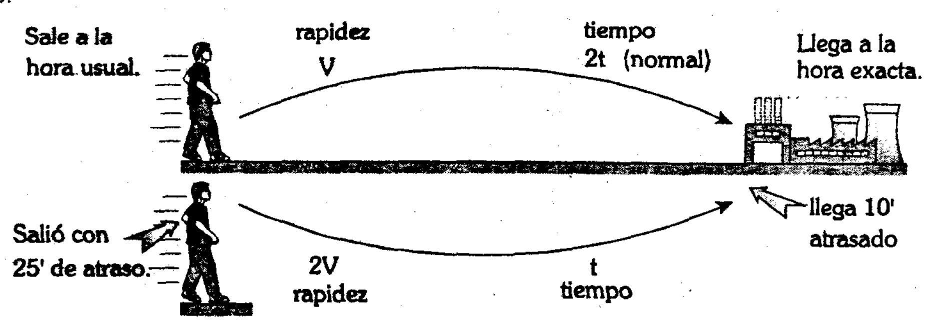
PROBLEMA 27

Una persona sale de su casa, todos los días, a la misma hora y llega a su centro de trabajo a la hora exacta. Un día salió atrasado 25 minutos, y duplica su rapidez, aún así llegó atrasado 10 minutos. ¿Cuánto tiempo demora en llegar a su trabajo normalmente?

Resolución:

Al duplicar su rapidez, entonces el tiempo neto de viaje se reduce a la mitad.

Luego:



Según el gráfico, deducimos que la diferencia de los tiempos (2t) y (t) es 15' . . . 25' – 10'

entonces: $2t - t = 15'$

$\boxed{t = 15'}$

∴ Tiempo normal de viaje = 2(15) = 30 minutos

PROBLEMA 28

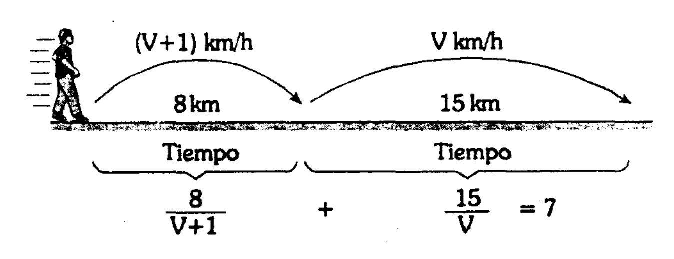
Un peatón recorre 23 km en 7 horas, de los cuales los ocho primeros los realiza con una rapidez superior en 1 km/h a la rapidez del resto del recorrido. Calcule la rapidez con que recorrió el primer tramo.

Resolución:

Según el dato, sabemos que $t_{total} = 7$ h

Del gráfico y por dato planteamos :

$$\frac{8}{V+1} + \frac{15}{V} = 7$$



Resolviendo la ecuación, se obtiene :

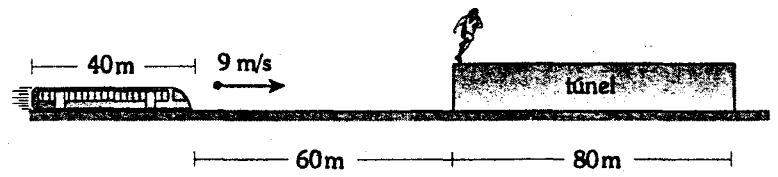
$$V = 3 \quad ó \quad V = -\frac{7}{5}$$

Se desecha $-\frac{7}{5}$ (no puede ser negativo) $\Rightarrow$ V = 3

$\therefore$ Rapidez en el primer tramo = (3+1) km/h = 4 km/h

PROBLEMA 29

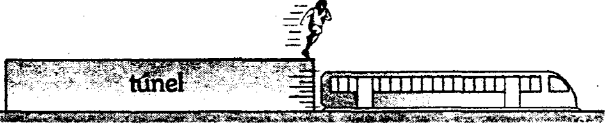
En el gráfico, a partir del instante mostrado, el joven corre hacia la derecha, con rapidez constante, con la finalidad de subir al tren. Determine la rapidez mínima del joven para lograr su objetivo, si es una cantidad entera positiva.



Resolución:

El tren cruza el túnel en el siguiente tiempo : $t_{tren} = \frac{180\text{ m}}{9\text{ m/s}} = 20$ s

Si asumimos que el joven se mueve simultáneamente al tren, entonces, en ese tiempo de 20 segundos, recorrería los 80 m de longitud que tiene el túnel, luego:

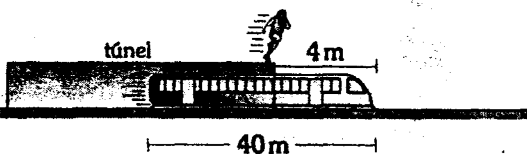


$$V_{joven} = \frac{80\text{ m}}{20\text{ s}} = 4\text{ m/s}$$

Pero ... ¡cuidado!, con esta rapidez sólo llega al borde del túnel cuando el tren está saliendo de él y no podrá subir al móvil pues, en la fracción de tiempo que demora en subir, el tren habrá recorrido una distancia mayor a la que el joven pueda recorrer en dicha fracción.

Entonces, la menor rapidez entera tendrá que ser 5 m/s y con está rapidez recorrerá en 16 segundos la longitud del túnel (llega al borde), mientras que el tren habrá recorrido : $16(9)=144$ m y estará como indica la figura.

En la siguiente fracción de tiempo (un segundo o menos según dure el salto), el tren habrá avanzado una distancia, pero aún no habrá salido del todo y, en ese tiempo, ya el joven llegará a subir al tren.



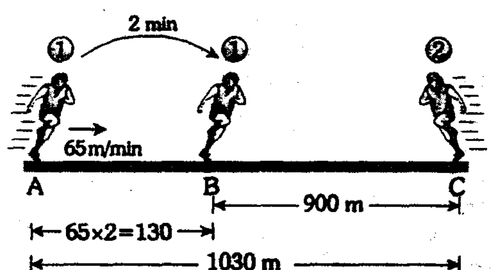
$\therefore$ Su rapidez es de 5 m/s

PROBLEMA 30

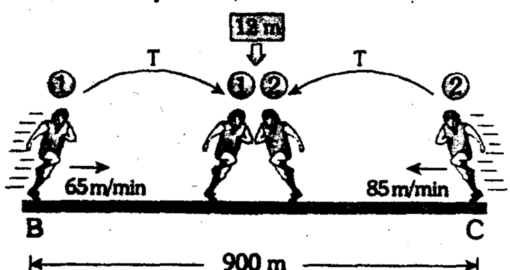
Dos atletas están separados por una distancia de 1030m, los dos corren al encuentro con una rapidez respectiva de 65 m/min y 85 m/min; si el primero salió 2 minutos antes que el segundo y el encuentro se produjo a las 12 del mediodía. ¿A qué hora se puso a correr el segundo atleta?

Resolución:

Del enunciado, el primer atleta sale 2 minutos antes, entonces:



Luego de estos 2 minutos, parte el segundo al encuentro del primero, entonces:



Por tiempo de encuentro: $T = \dfrac{900}{65+85} = \dfrac{900}{150} = 6$ minutos

Como el encuentro se produjo al mediodía, y el segundo atleta ha demorado 6 minutos, entonces:

$\therefore$ Hora de partida del segundo atleta : 12m – 6min = 11:54 a.m.

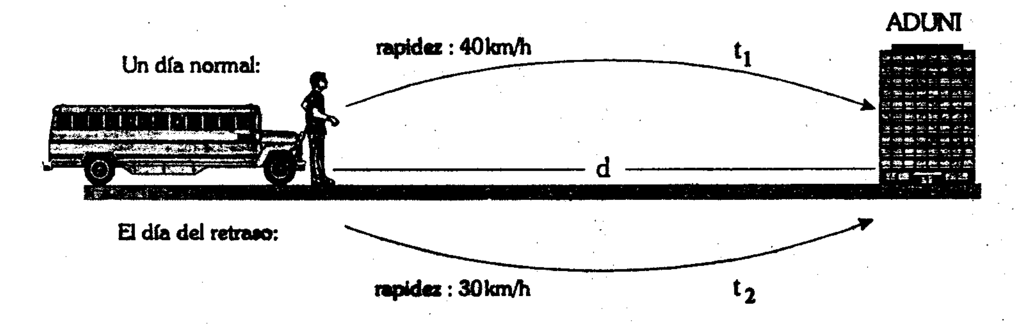
PROBLEMA 31

Alex, viajando en ómnibus a razón de 40 km/h, generalmente llega a tiempo a la academia Aduni; sin embargo, un día llegó con retraso de 10 minutos, debido a que el vehículo, sólo pudo desarrollar 30 Km/h. ¿A qué distancia de Aduni toma el ómnibus?

Resolución:

Teniendo presente que:

planteamos :



Por dato: $t_2 - t_1 = 10$ minutos

$$\frac{d}{30} - \frac{d}{40} = \frac{1}{6}\text{h} \Rightarrow \frac{d}{120} = \frac{1}{6} \rightarrow d = 20$$

∴ El alumno toma el ómnibus a 20 km de la academia Aduni.

PROBLEMA 32

Carlos viaja de un punto a otro y sale con una rapidez de 40 km/h. Cuando aún le falta recorrer 4/5 de su camino, duplica su rapidez lo que le permite llegar a su destino 2 horas antes. Halle su recorrido.

Resolución:

- Para una mejor comprensión dividimos todo el trayecto en cinco partes iguales.
- Recordemos que para una misma distancia: al duplicar la rapidez, el tiempo se reduce a la mitad.

Por dato: $2t - t = 2h$

$t = 2h$

Luego:

$4a = 80(2) \Rightarrow a = 40$ km

con rapidez: 40 km/h — llega en 2t h

a a a a a

Si duplica la rapidez ⇨ rapidez: 80 km/h — llega en t h

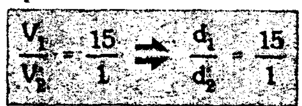
∴ Recorrido total = 5a $\Rightarrow$ 5(40) = 200 km

PROBLEMA 33

Dos móviles parten simultáneamente de un mismo punto A hacia un punto B, distante 240 km. El más veloz llega a B y regresa inmediatamente, encontrándose en el camino con el otro móvil ¿A qué distancia del punto A se produjo el encuentro, sabiendo que la relación de la rapidez de ambos es de 15 y 1?

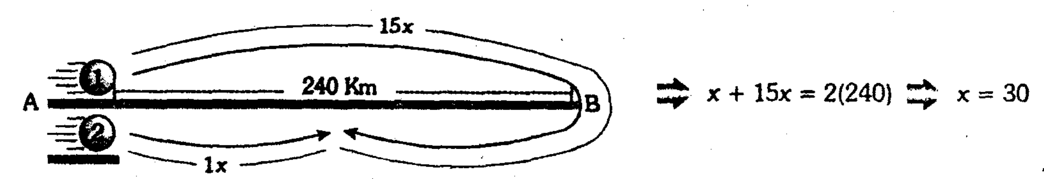
Resolución:

Sabemos que la relación de la rapidez de ambos es la misma que la relación de espacios recorridos, para un mismo tiempo.



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{1} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{15}{1}$$

Luego:



$\Rightarrow x + 15x = 2(240) \Rightarrow x = 30$

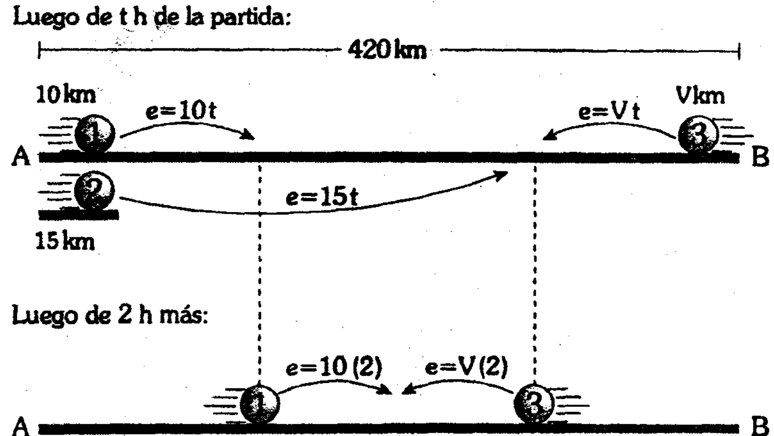
∴ El encuentro se produjo a una distancia de 30 Km del punto A.

PROBLEMA 34

Desde A parten dos personas con una rapidez de 10 km/h y 15 km/h, con dirección a B; al mismo tiempo parte desde B con dirección a A un ciclista con rapidez constante; si éste se cruza con uno de los peatones 2 horas después de que se cruzó con el otro; halle la rapidez del ciclista, si la distancia de A a B es de 420 km.

Resolución:

Teniendo en cuenta las condiciones, planteamos:



Ahora, planteamos:

- $15t = 10t + 20 + 2V \Rightarrow 5t = 20 + 2V \; \ldots \text{(I)}$
- $15t + Vt = 420 \Rightarrow t = \dfrac{420}{15 + V} \; \ldots \text{(II)}$

Reemplazando (II) en (I) : $5\left(\dfrac{420}{15 + V}\right) = 20 + 2V$

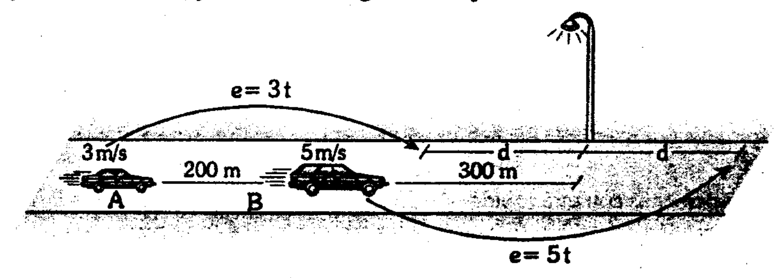
Operando : $V^2 + 25V - 900 = 0 \Rightarrow V = 20 \text{ km/h}$

PROBLEMA 35

Dos móviles, A y B, están separados una distancia de 200 m, B delante de A, y ambos se mueven en el mismo sentido con rapidez de: $V_b = 5\text{m/s}$ y $V_A = 3$ m/s; si delante de B, a 300 m, se encuentra un poste; ¿después de qué tiempo de haber partido simultáneamente, estos móviles equidistan del poste?

Resolución:

Suponiendo que transcurrió t s, planteamos el siguiente esquema :



Luego deducimos del gráfico :

- $500 = 3t + \cancel{d}$
- $5t = 300 + \cancel{d}$ (–)

Restando: $500 - 5t = 3t - 300$

$800 = 8t \Rightarrow t = 100$

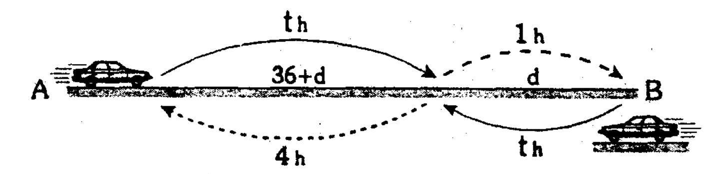
∴ Debe transcurrir 100s

PROBLEMA 36

Dos coches parten al encuentro simultáneamente uno de A en dirección a B y el otro de B con dirección a A. Cuando se encontraron el primero había recorrido 36 km más que el segundo, a partir del momento en que se encontraron, el primero tardó una hora en llegar a B y el segundo, 4 h en llegar a A. Calcule la distancia AB.

Resolución:

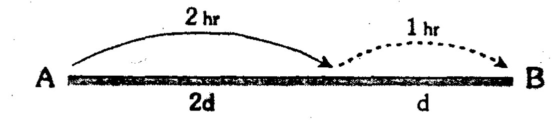
Graficando, según las condiciones (hasta encontrarse):



Aprovechamos la proporción de tiempos:

$$\frac{t}{4} = \frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{t = 2h}$$

Luego; analizando el recorrido del primer móvil:



Por el gráfico anterior: $2d = 36 + d \Rightarrow$ $d = 36$

$$\therefore \text{ Distancia de AB} = 2(36) + 36 = 108 \text{ km}$$

PROBLEMA 37

Para recorrer una distancia de 150 km, un automóvil emplea, además de sus llantas normales, sus 6 llantas de repuesto. ¿Cuál es el recorrido promedio de cada llanta?

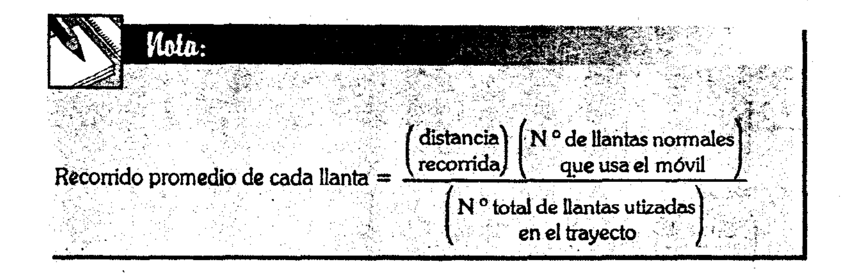
Resolución:

Como el automóvil emplea normalmente 4 llantas para movilizarse, entonces la sumatoria de recorridos, de cada llanta, será: $4(150) = 600$ km. Para tal recorrido deberá emplear en total: $4+6=10$ llantas

N° llantas normales = 4

150 km

entonces el recorrido promedio de cada llanta será: $\frac{600}{10} = 60$ km

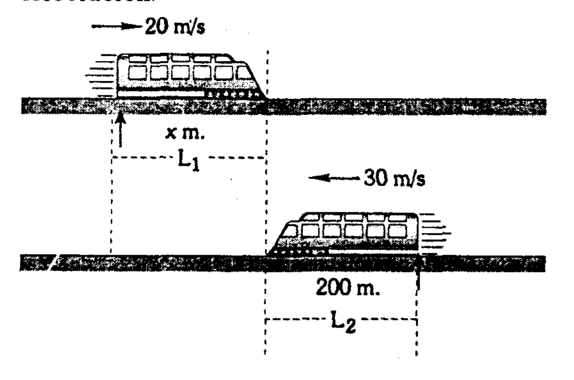


$$\text{Recorrido promedio de cada llanta} = \frac{\begin{pmatrix}\text{distancia}\\ \text{recorrida}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{N° de llantas normales}\\ \text{que usa el móvil}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{N° total de llantas utizadas}\\ \text{en el trayecto}\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 38

Un tren tarda un tiempo de "a" segundos en cruzar, completamente, a otro tren de 200 m de longitud que va a su encuentro. ¿Qué longitud tiene el primer tren, si la rapidecez de ambos es de 20 m/s y 30 m/s, respectivamente?

Resolución:



Recordando:

$$t_{cruce} = \frac{L_1 + L_2}{V_1 + V_2}$$

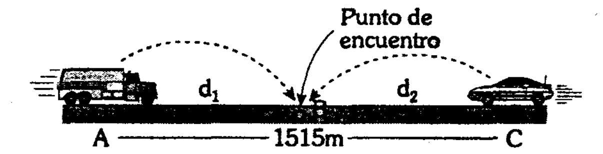
$$a = \frac{x + 200}{20 + 30} \Rightarrow 50a = x + 200$$

$$x = 50a - 200$$

$\therefore$ La longitud del primer tren es: $50a - 200$

PROBLEMA 39

A partir del instante mostrado en el gráfico, el camión viaja con rapidez constante de 5 m/s, y el auto, en el primer segundo recorre 2m; en el siguiente segundo, 5 m; en el tercer segundo, 8 m; en el cuarto segundo, 11m y así sucesivamente, hasta que se encontraron. Halle AB.



Resolución:

Para el camión: su rapidez constante es de 5 m/s; entonces en, n segundos recorre $d_1 = 5n$ metros.

Para el automóvil: El tiempo que demora en recorrer, hasta el encuentro con el camión, es el mismo que éste demora.

Luego:

$$\begin{array}{l} \quad 1^{\circ}s \quad 2^{\circ}s \quad 3^{\circ}s \quad 4^{\circ}s \quad \ldots\ldots \quad n^{\circ}s \\ d_2 = \underbrace{2}_{1\times3-1} + \underbrace{5}_{2\times3-1} + \underbrace{8}_{3\times3-1} + \underbrace{11}_{4\times3-1} + \ldots + \underbrace{(3n-1)}_{n\times3-1} = \left(\frac{2+(3n-1)}{2}\right)n \end{array}$$

$$\therefore \ d_2 = \left(\frac{3n+1}{2}\right)n$$

además: $d_1 + d_2 = 1515$

entonces: $5n + n\left(\frac{3n+1}{2}\right) = 1515$

Resolviendo se obtiene : n = 30 segundos

Nos piden hallar AB, que es la distancia que recorre el camión, con rapidez constante de 5 m/s, en el tiempo; n=30 s.

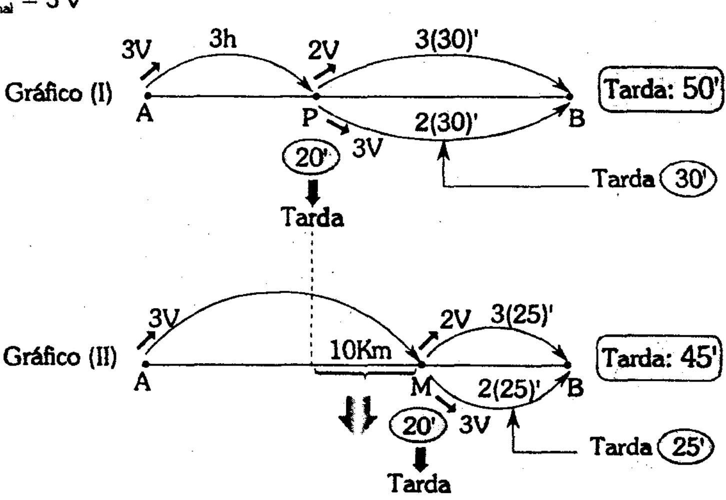
Entonces: $AB = \left(5\,\frac{m}{s}\right)(30s) = 150m$

PROBLEMA 40

Un automóvil viaja con rapidez constante, de la ciudad A a la ciudad B, luego de 3 horas de viaje se detiene en P, durante 20 minutos, y continúa con 1/3 menos de su rapidez original, llegando a su destino con un retraso de 50 minutos. Se sabe que si se hubiera detenido 10 km más allá de P, sólo se hubiera retrasado 45 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

Resolución:

Asumanos $V_{original} = 3\,V$



- Los 10 km recorre en un tiempo de : 3(30)' – 3(25)' = 15' < > $\frac{1}{4}$h a una rapidez de 2V.

$$\therefore\ 2V = \frac{10\text{ km}}{\frac{1}{4}\text{h}} \Rightarrow V = 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Del gráfico (I) para recorrer, de A hasta B, tarda : 3 h + 2(30)'; es decir 4 h, con una rapidez de $3V = \left(60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$

$$\therefore\ e_{AB} = 60\,\frac{\text{km}}{\cancel{h}} \times 4h = 240\text{ km}$$

Problemas Propuestos

1. La rapidez respectiva de dos móviles está en la relación de 3 es a 4. ¿Dentro de cuánto tiempo estarán separados una distancia de 60 Km, si partieron juntos en el mismo sentido, sabiendo, además, que la diferencia de la rapidez de ambos es de 10 km/h?

   A) 4 h B) 7 h C) 5 h
   D) 8 h E) 6 h

2. Un ciclista viaja, desde A hacia B, a 80 km/h y retorna por el mismo camino a 70 km/h. Si hace el recorrido, en forma continua, y en un tiempo total de 6 horas; determine la distancia de A hasta B.

   A) 214 km B) 218 km C) 220 km
   D) 224 km E) 216 km

3. Un carro sale, de A hacia B, a 80 km/h y regresa a 50 km/h después de 16 horas. Si el carro se detuvo en B por 2 horas y luego se detuvo 1 hora en el camino de regreso, determine la distancia AB.

   A) 450 km B) 600 km C) 400 km
   D) 550 km E) 480 km

4. Juana se dirige, desde su casa a la academia, en bicicleta, empleando un tiempo de 30 minutos; para volver, aumenta su rapidez inicial en 4 m/min, demorándose esta vez 6 minutos menos. ¿Cuál es el espacio que recorrió en total?

   A) 960 m B) 920 m C) 860 m
   D) 880 m E) 940 m

5. Para ir de A a B, un móvil emplea 20 horas, si quisiera hacerlo en 25 horas tendría que disminuir su rapidez en 8 Km/h. ¿Cuánto mide el tramo AB?

   A) 720 km B) 820 km C) 400 km
   D) 600 km E) 800 km

6. Al ir de mi casa a la academia me doy cuenta que si voy a 40 km/h demoro 20 minutos más que si fuera a 60 km/h. ¿Cuál es la distancia entre mi casa y la academia?

   A) 42 km B) 40 km C) 52 km
   D) 48 km E) 47 km

7. Un motociclista observa que 1/5 de lo que ha recorrido equivale a los 3/5 de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas habrá empleado hasta el momento, si todo el viaje lo hace en 12 horas?

   A) 8 B) 9 C) 10
   D) 11 E) 12

8. Dos móviles distan 200 km, salen al encuentro, desde dos puntos A y B, con una rapidez de 60 km/h y 40 km/h, respectivamente. ¿En qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de A?

   A) 4 h y 30 km
   B) 1 h y 1 km
   C) 6 h y 100 km
   D) 2 h y 120 km
   E) 10 h y 120 km

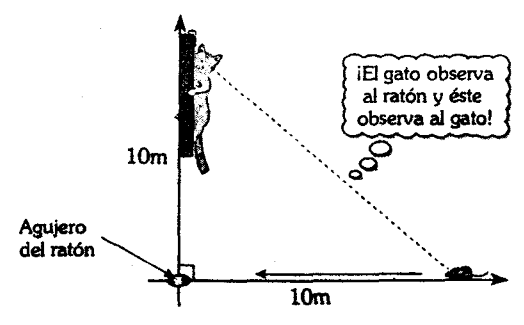
9. Un tren tardó 6 segundos en pasar por un semáforo y 24 segundos en atravesar un túnel de 240 metros de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

A) 30 s B) 20 s C) 18 s
D) 24 s E) 16 s

10. Un tren, en cruzar un túnel de 120 m de longitud, tarda 60 s y, en pasar delante de un observador, emplea 20 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

A) 80 m B) 100 m C) 120 m
D) 60 m E) 50 m

11. Un gato observa a un ratón que se dirigía a su guarida (ver figura), de pronto el ratón emprende veloz huida hacia su agujero; en forma simultánea, el gato va a la caza del ratón, con la misma rapidez de éste. ¿Atrapará el felino al pobre roedor?



A) sí
B) no
C) falta más información
D) absurdo
E) el gato no come ratones

12. ¿Cuántas horas emplea un tren, que viaja a una rapidez de 40 km/h entre dos paradas, para recorrer "a" kilómetros, si hace "n" paradas de "m" minutos cada una?

A) $\frac{3a+2mn}{120}$ B) 3a+mn C) $\frac{3a}{40}$
D) $\frac{a+m}{n}$ E) a+mn

13. Desde A parten dos peatones con rapidez de 10 y 15 km/h, en dirección a B. Al mismo tiempo, un ciclista parte de B hacia A, con rapidez constante. Si éste se cruza con uno de los peatones 2 horas después que se cruzó con el otro. Halle la rapidez del ciclista, si AB=420 Km.

A) 20 km/h B) 30 km/h C) 40 km/h
D) 10 km/h E) 50 km/h

14. Dos viajeros parten al mismo tiempo de A y B, el uno hacia el otro. Al encontrarse, el primero ha recorrido 16 Km más que el segundo; pero, a partir de este momento, el segundo cuadruplica su rapidez, llegando ambos al mismo tiempo. ¿Cuál es la relación de la rapidez del 2do. al 1er. viajero?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

15. Un corsario descubre un barco mercante a 20 millas de Sotavento, a las 10:45 a.m.; con una buena brisa se dirige hacia él, a una rapidez de 15 millas por hora, mientras que el mercante trata de escapar a 10 millas por hora. Después de 3 horas, el barco del corsario aumenta su rapidez en 5 millas por hora. ¿A qué hora alcanzará el corsario al mercante?

A) 13:45 h B) 14:45 h C) 15:15 h
D) 14:15 h E) 14:00 h

16. Dos autos parten de un mismo lugar en direcciones opuestas, el primero viaja a 5 Km/h más que el segundo. Después de 8 horas se encuentran separados 360 Km, el uno del otro. ¿Cuál es la rapidez del primer vehículo?

A) 16 km/h B) 18 km/h C) 20 km/h
D) 25 km/h E) 30 km/h

17. Un corredor da una vuelta completa a una pista circular cada 40 s. Otro corredor que parte del mismo punto que el primero, recorre la pista, en sentido contrario, y se cruza con él cada 15 s. ¿Qué tiempo emplea el segundo corredor en dar una vuelta completa?

A) 15 s B) 18 s C) 20 s
D) 24 s E) 26 s

18. Raúl recorrió una distancia de 50 km a una cierta rapidez y, seguidamente, recorre 300 km a una rapidez tres veces mayor que la anterior. Calcule la relación del tiempo empleado en el segundo tramo, respecto al primero.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

19. Un bote tarda 4 minutos en recorrer, ida y vuelta, un espacio de 640 m en un río, cuya rapidez de la corriente es la tercera parte de la rapidez del bote. Calcule la rapidez del bote en aguas tranquilas.

A) 6 m/s B) 8 m/s C) 10 m/s
D) 12 m/s E) 14 m/s

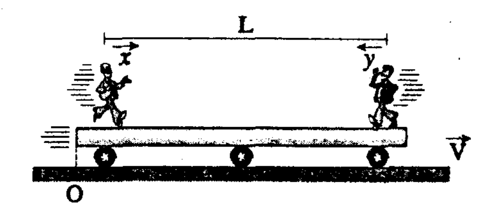
20. Un estudiante aborda todos los días un microbús para llegar a su clase a las 8:00 a.m.; pero hoy perdió el microbús y abordó otro que pasó 10 minutos después del primero, por lo cual arribó en el doble del tiempo normal, llegando a las 8:24 a.m. ¿A qué hora partió?

A) 7:48 a.m. B) 7:26 a.m. C) 7:56 a.m.
D) 7:52 a.m. E) 7:58 a.m.

21. Navegando a favor de la corriente, un barco a vapor desarrolla una rapidez de 20 km por hora; navegando en contra, sólo 15 km por hora. En ir desde el embarcadero de la ciudad A, hasta el embarcadero de la ciudad de B, tarda 5 horas menos que en el viaje de regreso. ¿Qué distancia hay entre estas dos ciudades?

A) 280 km B) 300 km C) 320 km
D) 340 km E) 360 km

22. Una plataforma de longitud L parte de O (inicialmente, el extremo izquierdo coincide con O) con una rapidez de V; en el mismo instante, parten de ambos extremos dos hombres con una rapidez de x e y, respectivamente (rapidez constante). Hallar a qué distancia de O se encuentran ambos hombres. (Observación: x é y, con respecto a la plataforma).



A) $\dfrac{L(V-x)}{x+y}$ B) $\dfrac{L}{x+y}$ C) $\dfrac{V(x+y)}{L+y}$

D) $\dfrac{L(V+x)}{x+y}$ E) $\dfrac{L(y+V)}{x+y}$

23. Por debajo de un poste, cuyo foco está a una altura H, pasa caminando un hombre de estatura h, con rapidez v; si el hombre camina por un llano, ¿cuál es la rapidez de la sombra?

A) $\dfrac{vh}{H+h}$ B) $\dfrac{vH}{Hv+h}$ C) $\dfrac{vH}{H-h}$

D) $\dfrac{Hh}{H-h}$ E) $\dfrac{vHh}{H+v}$

24. Un automóvil se desplaza, con rapidez constante de la ciudad A a la ciudad B. Luego de 3 h de viaje se detiene en P, durante 20 minutos, y continúa con 1/3 menos de su rapidez inicial, llegando a B con un retraso de 50 minutos. Se sabe que si se hubiera detenido 10 Km más adelante de P, sólo se hubiera retrasado 45 min. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

A) 250 km B) 120 km C) 140 km
D) 240 km E) 200 km

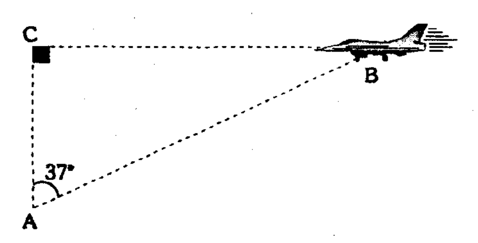
25. Una persona camina a razón de 7 leguas en 5 h; 8 horas después sale, de la misma ciudad, otra persona que recorre 5 leguas en 3 horas. ¿Cuánto habrá recorrido desde su partida la primera, al ser alcanzado por la segunda?

A) 70 leguas B) 110 leguas C) 120 leguas
D) 60 leguas E) 50 leguas

26. Hacia el norte salen 2 trenes con una rapidez de 80 km/h, cada uno, desfasados en 10 min. ¿Con qué rapidez venía otro tren desde el Norte; si, después de 4 minutos de cruzar con el primero, lo hace con el segundo?

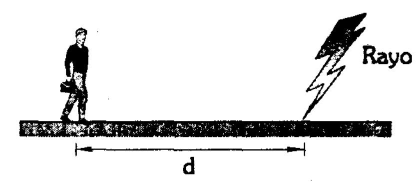
A) 120 km/h B) 132 km/h C) 145 km/h
D) 135 km/h E) 138 km/h

27. Un avión se dirige de B hacia C, el ruido del motor emitido en B alcanza al observador en A en el instante en que el avión llega a C. Sabiendo que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s; halle la rapidez del avión.



A) 270 m/s B) 204 m/s C) 275 m/s
D) 272 m/s E) 280 m/s

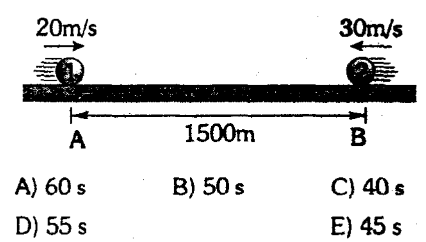
28. Un hombre observa el relámpago y, después de un tiempo t, escucha el trueno, siendo c la rapidez de la luz y v la del sonido. ¿A qué distancia del hombre se produjo el rayo?



A) $\frac{tvc}{v+c}$ B) $\frac{tvc}{c-v}$ C) $t\left(\frac{c-v}{vc}\right)$

D) $t\left(\frac{v-c}{v+c}\right)$ E) $\frac{v-c}{tvc}$

29. Los móviles mostrados se mueven respectivamente, con una rapidez constante. ¿Después de qué tiempo 1 dista de B, lo mismo que 2 dista de A?



A) 60 s B) 50 s C) 40 s
D) 55 s E) 45 s

30. Dos individuos salieron a pasear y partieron a la vez del punto de bifurcación de dos paseos, *x* é *y*, de longitud 30 y 90 metros, respectivamente. Uno de los individuos eligió el paseo *x*, andando 1 metro por segundo, y el otro recorrió el *y*, a razón de $1\frac{1}{2}$ metros por segundo. Acordaron, estos individuos, no dejar el paseo hasta volver a encontrarse en el punto de partida. Averiguar la distancia recorrida por cada uno cuando cumplieron lo acordado.

A) 120 m y 120 m
B) 120 m y 180 m
C) 90 m y 180 m
D) 60 m y 90 m
E) 60 m y 120 m

31. Un camión normal con seis llantas, emplea, además de sus llantas normales, sus ocho llantas de repuesto para recorrer una distancia de 2 800 km. Halle el recorrido promedio de cada llanta.

A) 200 km B) 1 400 km C) 1 200 km
D) 2 000 km E) 1 000 km

32. Un remero navega sobre un río hacia un objeto que está a 72 km del punto de partida, y hace el viaje de ida y vuelta en 14 horas. Si el tiempo que demora en remar 4 km a favor de la corriente es el mismo tiempo que se demora en remar 3 km en contra la corriente, halle la rapidez del remero.

A) 10,5 km/h B) 8,5 km/h C) 9 km/h
D) 11 km/h E) 12 km/h

33. "Pipo" sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a las 8:00 a.m. Un día salió con un retraso de 20 minutos, y duplica su rapidez, llegando aún así tarde 8 minutos. ¿Cuánto tiempo emplea normalmente en llegar a su centro de trabajo?

A) 26 min. B) 12 min. C) 8 min.
D) 28 min. E) 24 min.

34. La rapidez de un móvil A es a la rapidez de un móvil B, como 13 es a 10. ¿Cuál es la rapidez del lento si se sabe que la respectiva diferencia de rapidez es 9 km/h?

A) 3 km/h B) 20 km/h C) 30 km/h
D) 12 km/h E) 13 km/h

35. Dos automóviles parten simultáneamente al encuentro, el uno del otro, con una rapidez que está en la relación de 4 a 3 y se encuentran cuando el más veloz ha recorrido 60 km más que el otro. Calcular el espacio recorrido por el lento hasta el momento del encuentro.

A) 60 km B) 120 km C) 180 km
D) 240 km E) 360 km

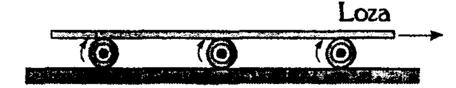
36. La distancia entre dos ciudades A y B es un número entero de kilómetros comprendido entre 180 y 218. Un bus recorre dicha distancia en 3 h 20 min, marchando con una rapidez expresada por un número entero de km/h; y otro bus recorre dicha distancia en 4 horas, con una rapidez expresada como la anterior. ¿Cuál es la distancia entre dichas ciudades?

A) 196 km B) 195 km C) 186 km
D) 217 km E) 200 km

37. Un automóvil debe hacer un cierto recorrido en 4 horas. Una hora después de la partida, el piloto aumenta la rapidez a fin de llegar media hora antes y hace, entonces, 16 km más por hora. ¿Cuál fue la distancia recorrida?

A) 290 km B) 300 km C) 310 km
D) 320 km E) 350 km

38. Si la circunferencia de cada uno de los rodillos de la figura mostrada es de un decímetro; ¿cuánto habrá avanzado la loza cuando los rodillos hayan dado una vuelta?



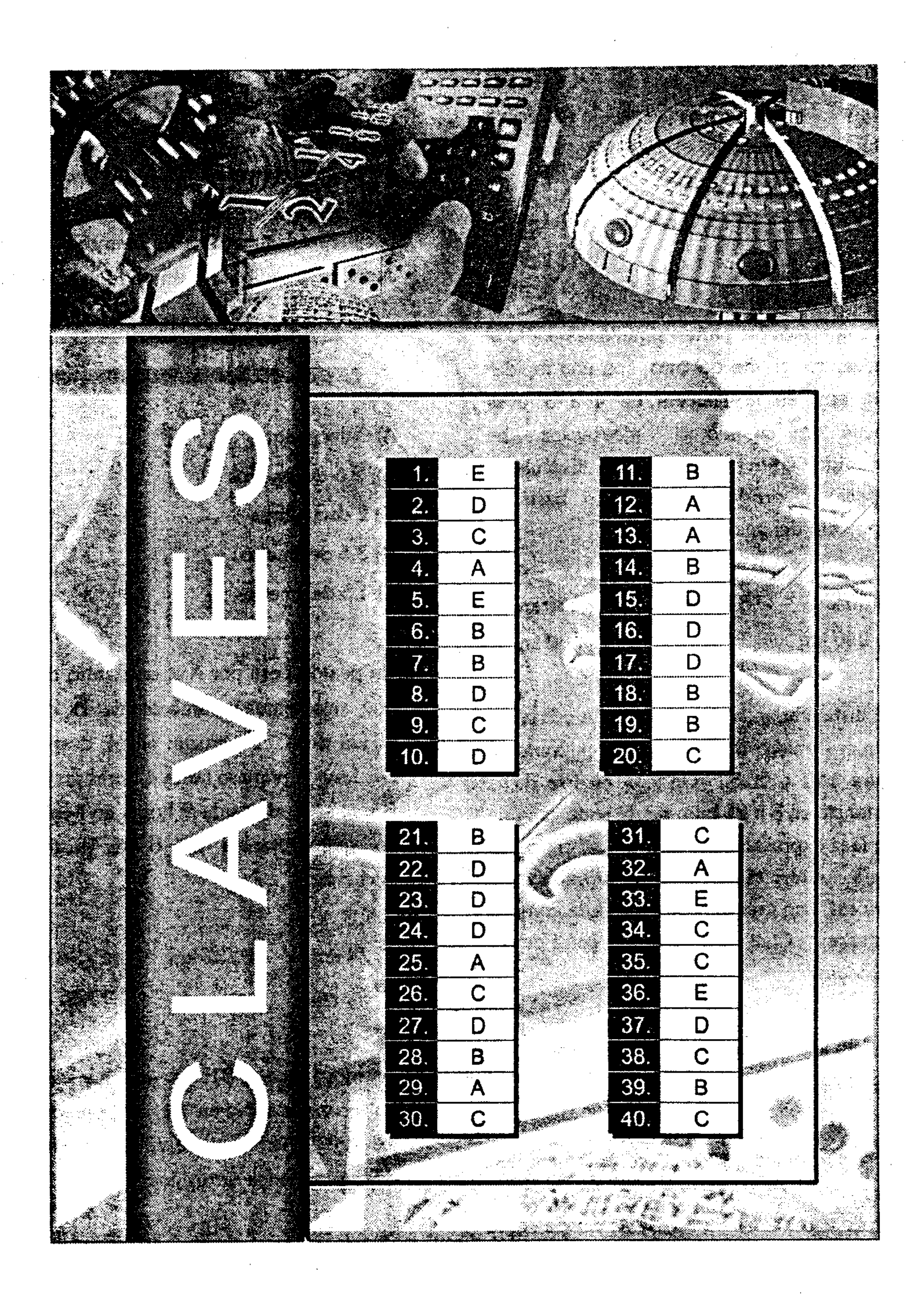
A) 3 decímetros
B) 2,5 decímetros
C) 2 decímetros
D) 3,5 decímetros
E) 1,5 decímetros

39. Un peatón pasa por A al encuentro de otro, que sale simultáneamente de B distante 80 km de A. Se cruzan en M; después de cruzarse, el primero tarda 4 horas en llegar a B y el segundo tarda 9 horas en llegar a A. ¿A qué distancia de B se produjo el encuentro?

A) 24 km B) 32 km C) 38 km
D) 40 km E) 36 km

40. Un móvil recorre 315 km en 5 h y otro hace un recorrido doble en 7 h. Suponiendo que los dos marchan durante 9 h; calcule la diferencia de los recorridos.

A) 210 km B) 280 km C) 243 km
D) 312 km E) 260 km



CLAVES

1.	E	11.	B
2.	D	12.	A
3.	C	13.	A
4.	A	14.	B
5.	E	15.	D
6.	B	16.	D
7.	B	17.	D
8.	D	18.	B
9.	C	19.	B
10.	D	20.	C

21.	B	31.	C
22.	D	32.	A
23.	D	33.	E
24.	D	34.	C
25.	A	35.	C
26.	C	36.	E
27.	D	37.	D
28.	B	38.	C
29.	A	39.	B
30.	C	40.	C

Nicolás Copérnico

Nació en 1 473 en Polonia. Antes de los estudios de Copérnico se creía que el planeta Tierr estaba en el centro del universo, pero él demostró que ello era falso.

Cuando tenía 10 años de edad, su padre murió y pasó a la custodia de su tío, un obispo de la Iglesia católica de quien recibió una formación muy buena y consideró la posibilidad de hacerse sacerdote, pero pronto cambió de idea y empezó a estudiar Astronomía. También estudió Matemática, Derecho y Medicina, pero la Astronomía siempre fue su materia favorita.

En aquella época, se creía que la Tierra era el centro del universo, pero Copérnico vio que esa postura no coincidía con sus observaciones astronómicas. Descubrió que el Sol estaba en el centro y que todos los planetas se movían a su alrededor. Dijo que nuestra Tierra tarda un año en dar la vuelta al Sol y que, además da un giro completo sobre sí misma cada 24 horas. Copérnico creía que los planetas se movían alrededor del Sol en círculos perfectos pero, cincuenta años más tarde, gracias a las mediciones tan precisas de Tycho Brahe, Kepler demostró que no era así.

Copérnico escribió su teoría en un famoso libro: De revolutionibus, que el cual fue impreso pocas semanas antes de su muerte. Al principio, los obispos y los grandes sacerdotes de la Iglesia católica aceptaron la nueva posición de la Tierra, pero pronto cambiaron de opinión. En 1 616 se declaró que el libro de Copérnico era una fuente de ideas diabólicas y lo incluyeron en el Index, una lista de libros prohibidos para los católicos. El sistema de Copérnico fue tema de un famoso juicio en el que Galileo tuvo que confesar que la Tierra no se movía.

Este hombre, que llevó desde sus años de juventud hasta la ancianidad el título eclesiástico era un peligrosísimo enemigo de la Iglesia. Perspicaz en su perfidia, implacable en la defensa de sus intereses, la iglesia cometió un error fatal: no le prestó la debida atención al canónigo de Warmia, ni comprendió que Copérnico había colocado en el fundamento de la fe una explosiva carga de enorme potencia. Sólo esto puede explicar el hecho de que este hombre, a quien F. Engels considerara como uno de los titanes por la fuerza de su pensamiento, la pasión y el carácter, por sus multifacéticas capacidades y erudición, revolucionario como hay pocos en la historia de la ciencia, fuese capaz de evitar de una manera inexplicable y feliz todas las desgracias e infortunios que inevitablemente deberían llover sobre su cabeza desde las colinas del Vaticano. Incluso Lutero, uno de los más sangrientos monstruos del Medioevo, habla de Copérnico con un condescendiente refunfuño. "Este tonto quiere poner patas arriba todo el arte de la Astronomía ..." Mientras que a Giordano Bruno le quitaron la vida y a Galileo, el honor, a Copérnico, en cambio, en rasgos generales, ni siquiera lo amenazaron. No lo entendían, lo criticaban, incluso lo ridiculizaron en unas comedias de feria, ¿pero acaso puede compararse el gorro del payaso con el gélido suelo de la celda de Galileo o la leña ardiendo de la hoguera de Bruno? Cuando se dieron cuenta de ello, ya era tarde: la gran "herejía" de Copérnico se había extendido, de manera inverosímil, apoderándose sólidamente de las mentes y ya no era posible erradicarla ni quemarla. No le prestaron la debida atención a Copérnico, quien no transformó "el arte de la Astronomía sino de las bases de la fe" retando, según palabras de F. Engels, a la autoridad de la Iglesia en las cuestiones de la naturaleza. Tan sólo 73 años después de su muerte, el principal libro de su vida -Sobre la circulación de las esferas celestes- fue incluido por la inquisición en el Index, la lista de libros prohibidos, "hasta que sea corregido".

Así; el libro de Copérnico formó parte del Index, hasta 1 835.

Nunca se preocupó de hacer propaganda de sus ideas, de ganar adeptos o atraer discípulos.

Nicolás Copérnico fue el menor de cuatro hijos y recordaba poco a su padre. Lo educó su tío Kukas Watzelrode, canónigo y después obispo. Este hombre autoritario, taciturno, irrefrenable en sus pasiones humanas y políticas, al que los caballeros de la orden teutónica y el rey de Polonia llamaron "diablo", sentía un tierno cariño -quizás el único en su vida- por su sobrino, a quien mimara en sus años jóvenes y a quien ayudara hasta la muerte. Fue el tío quien se las arregló para que Copérnico, a los 24 años fuera canónigo, es decir, una persona ociosa y acomodada. Fue su tío quien lo educó primero en la escuela de San Juan y luego en la Universidad de Cracovia; también fue él, quien lo envió a Italia a terminar sus estudios. En Italia vivió Copérnico diez años. Tenía que estudiar Derecho Canónico en Bolonia, pero se dedicó a todo menos a eso: se consagró a la pintura, la Matemática, la Astronomía, la Filosofía y al griego. No recibió diploma en Bolonia, pero esto no lo afligía ni mucho menos. Durante toda su vida sintió una sorprendente indiferencia hacia los diplomas, títulos y condecoraciones. De Bolonia se traslada a Roma, pero allí tampoco estudia las cuestiones que le interesan al capítulo. Este lo invita a regresar, pero Copérnico de ninguna manera quiere abandonar este país y constantemente le pidió prórrogas, y cuando las consigue, se dedica a la Jurisprudencia y a la Medicina, en Padua y Ferrara.

Copérnico no asimiló las exhortaciones de Leonardo de experimentar, no se le puede llamar investigador. Siendo gran astrónomo, nada descubrió en el cielo. Buscó allí únicamente la confirmación de su razón. El sistema heliocéntrico del mundo no era su gran iluminación. Siglos antes de Copérnico se habló y se escribió sobre la estabilidad del Sol y la rotación de la Tierra. Los astrólogos de Grecia, Italia, del mundo árabe reunieron durante siglos en sus infolios centenares de hechos a los que no daba explicación el sistema de Ptolomeo. Muchos sentían que algo estaba mal, que Ptolomeo confundía algo. Pero ¿cómo arreglarlo todo? ¿Cómo armarse de valor para decir que todo no estaba, en absoluto, tal como se consideraba hasta entonces . . .?

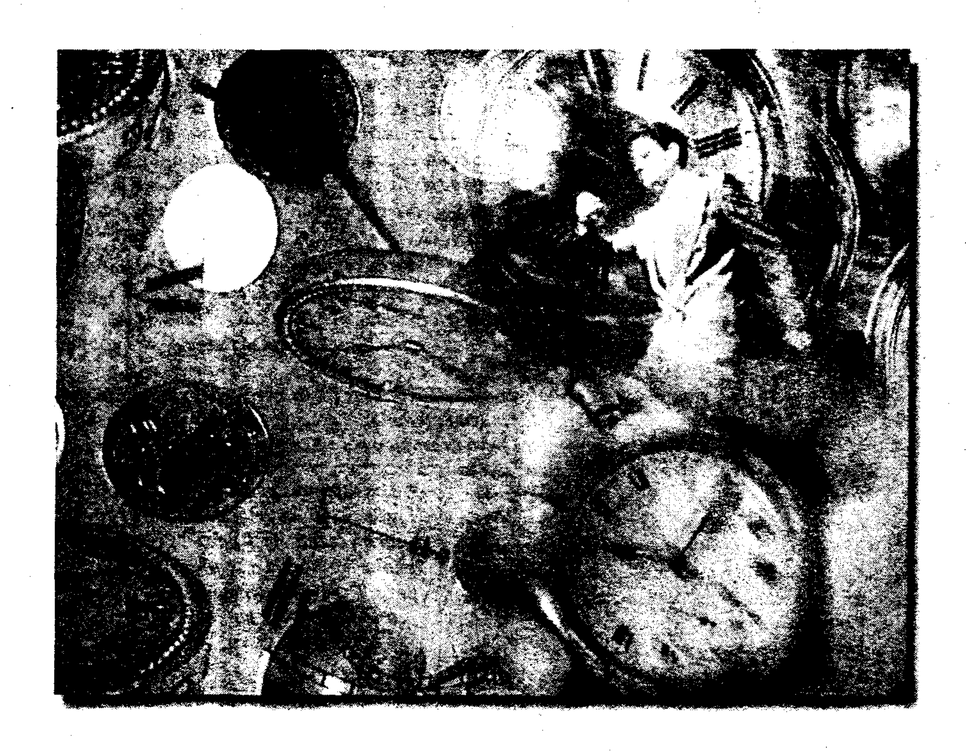
Treinta años antes de que se publicara su gran libro, envía a diferentes países las copias manuscritas de una especie de resumen de la futura obra: "de Nicolás Copérnico sobre las hipótesis referentes a los movimientos celestes, breve comentario". (Estos manuscritos se consideraban perdidos para siempre y sólo en 1 878, sorpresivamente, se encontró uno en los archivos de Viena, y tres años más tarde, otro en Estocolmo). Copérnico ya estaba viejo cuando decidió publicar el principal trabajo de su vida.

No tenía dudas acerca de su razón. Escribía con tranquilidad digna: "Muchos otros científicos y personas admirables afirmaban que el miedo no tiene que impedir que yo edite el libro para provecho de todos los matemáticos. Cuanto más absurda le parezca a la mayoría, en el momento actual, mi doctrina sobre el movimiento de la Tierra, tanto mayor será el asombro y el agradecimiento, cuando después de la edición de mi libro la gente vea como toda sombra de absurdo queda eliminada por las demostraciones más claras. Por eso, cediendo a sus peticiones, permití a mis amigos emprender la edición que durante tanto tiempo trataron de conseguir".

Rheticus, su único alumno, ilimitadamente fiel y, lamentablemente, sólo por ello conocido, llevó el preciado manuscrito a Neremberg, a los impresores, mientras que Copérnico se quedó esperando en su torre. Casi no salía a ninguna parte y a pocos invitaba. Esperaba la aparición del libro. En 1 542 una fuerte hemorragia pulmonar y la parálisis de la parte derecha de su cuerpo lo inmovilizaron en la cama. Se fue muriendo lenta y dolorosamente. El 23 de mayo de 1 543, cuando trajeron de Nuremberg el tan esperado libro, ya estaba casi inconsciente y sólo logró pasar la mano por la cubierta, con un gesto tierno e impotente ?¿Lo estaría acariciando? ¿Protegiendo? ¿Bendiciendo?

Murió ese mismo día. Así quiso el destino que convergieran en un solo punto su muerte y su inmortalidad. Su tumba no se conserva, más su libro permanece.

CRONOMETRÍA



La gente solía creer que cuando una cosa cambia, debe estar en un estado de cambio y que cuando una cosa se mueve, está en un estado de movimiento. Hoy se sabe que esto es un error.

Russell

Lectura 8

Veinticuatro horas, un día

Por qué el día tiene veinticuatro horas? ¿Por qué no veinte? ¿O dieciséis? De esta forma el día tiene veinticuatro horas simplemente porque el día egipcio las tenía. Ellos inventaron el día de veinticuatro horas hace mucho tiempo, y el hombre lo ha venido usando desde entonces. ¿Y por qué los egipcios seleccionaron veinticuatro horas para su día? En realidad, no pensaban en él como un período de veinticuatro horas, sino como dos períodos de doce: doce horas diurnas y doce horas nocturnas. ¿Y por qué doce? Bueno, ellos dividían el día en diez horas, y luego añadían una hora más para el amanecer, y otra para el anochecer, lo cual hacía un total de doce. Y daban el mismo número de horas a la noche, para hacerlos iguales.

En Egipto, los sacerdotes eran los responsables de decir la hora. Durante el día señalaban las horas por medio de relojes que medían la sombra arrojada por el sol. Y durante la noche señalaban las horas observando algunas estrellas alzarse por encima del horizonte. Los antiguos egipcios, y también los romanos, empezaban y terminaban su día a medianoche, como hace la mayoría de la gente en la actualidad. Los babilonios y los griegos empezaban su día a la salida del sol. Los antiguos judíos empezaban su día a la puesta del sol.

Relojes del sol: *En realidad, un reloj de sol y una regla no se parecen en nada. Pero los dos hacen el mismo tipo de trabajo. Ambos miden algo. Una regla mide la longitud, y un reloj mide el tiempo. Los antiguos usaban el Sol como reloj. Despertaban cuando salía el Sol y se iban a la cama cuando se ponía. Durante el día podían calcular cuánta luz les quedaba todavía por la posición del Sol en el cielo.*

Hace unos 6 000 años, el hombre había aprendido a utilizar las sombras como una forma de medir el tiempo. Por supuesto, las sombras dependen enteramente del Sol. La sombra de un árbol es muy larga a primera hora de la mañana, pero se va acortando a medida que el Sol se eleva. Al mediodía, con el Sol casi sobre nuestras cabezas, la sombra casi puede llegar a desaparecer. Luego, por la tarde, la sombra empieza a alagarse de nuevo, pero en distinta dirección. La gente se dio cuenta pronto de que, clavando un palo en el suelo, podía crear una sombra. Colocando piedras o marcas a lo largo del sendero recorrido por la sombra, podía dividirse el día en períodos de tiempo. El hombre antiguo inventó muchos tipos de relojes de sol. Desgraciadamente, el problema con un reloj de sol es que no sirve por la noche o cuando el día está nublado. Así que la gente empezó a pensar en formas de medir el tiempo que no dependieran del Sol.

Los antiguos egipcios utilizaban un reloj de sol en forma de T para señalar la hora. La sombra de la T, en su movimiento a lo largo de la barra, mostraba la hora.

FUENTE: El mundo de los niños Tomo X

CRONOMETRÍA

Objetivos

1. Brindar al lector las pautas teóricas para reconocer y resolver problemas de cronometría.
2. Dar a conocer al lector las diversas técnicas empleadas en la resolución de problemas de cronometría.
3. Aplicar a situaciones propias de la vida diaria referente a la medición del tiempo.

Introducción

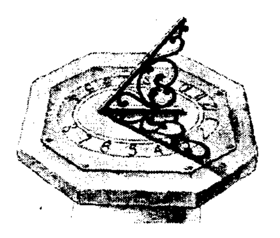
Hace miles de años, las personas no tenían la necesidad de controlar el tiempo para realizar sus quehaceres. Vivían día a día y así un día cualquiera era muy parecido a otro. El tiempo no era muy importante. Cuando se tenía la necesidad de medir el tiempo, lo hacían por "soles", "lunas"; "inviernos" o "veranos". Actualmente si se quiere saber qué hora es, basta con consultar un reloj; si se quiere saber la fecha basta con mirar un calendario. Un reloj mide el tiempo a lo largo de un día y te permite saber cuándo tienes que salir de casa para ir a estudiar o a realizar una actividad de tu interés. Un calendario te muestra el tiempo a lo largo de un año, te dice, por ejemplo, cuánto falta para tu cumpleaños y en qué día de la semana acontecerá.

En consecuencia, los problemas relacionados con estas situaciones de la vida diaria involucra a los relojes y calendarios. Aplicaremos, aquí, las técnicas estudiadas en los temas de planteo de ecuaciones y el razonamiento deductivo, poniendo énfasis en la observación y el análisis de la información dada.

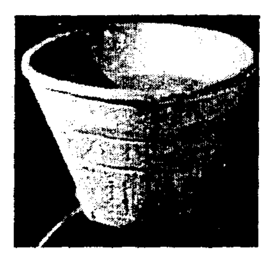
Se sabe que en las antiguas civilizaciones, era la casta sacerdotal la encargada de dar la hora, empleando así este recurso para afianzar su poder y dominio sobre el pueblo. A partir del siglo III a.n.e. ya existía formas de medir el tiempo aunque el reloj, en su concepción moderna, no surgió en occidente sino hasta el siglo XV cuando las actividades de mercaderes y artesanos medievales crearon la necesidad de sustituir el tiempo litúrgico (dado por los clérigos) por el tiempo medido con exactitud. Este proceso siguió durante el Renacimiento, período en el cual, definitivamente, las horas profanas medidas por medios mecánicos se impusieron sobre las canónicas, haciendo que la cuantificación del tiempo independizará a las personas de los ciclos agrarios y del campanario eclesiástico. En nuestros tiempos ha adquirido auge el reloj de pulsera, y por otro lado los cronómetros atómicos protegidos contra las influencias térmicas y magnéticas, han alcanzado una increíble precisión.

¿Cómo fue evolucionando la medición del tiempo?

Horas, minutos, segundos . . . , fracciones del día que nuestra civilización mide ansiosa como un registro de actividad constante o de quietud silenciosa. Desde tiempo inmemorial, los humanos, tratamos de contabilizar el paso del tiempo para organizar nuestra vida y ordenar nuestro destino. Las civilizaciones antiguas lo hacían ligándolo a la alternancia del día y la noche, así como a los ciclos de la Luna. Pero poco a poco el ingenio de nuestros antepasados fue creando aparatos capaces de fraccionar y medir los períodos de luz y tinieblas con exactitud creciente. El reloj entraba en escena.


Reloj solar

Primero fue el reloj solar, que indicaba los momentos del día gracias al movimiento de una sombra proyectada sobre una superficie plana, con un cuadrante. Los arqueólogos descubrieron que los chinos lo usaron unos 3 000 a.n.e., empleándolo también los egipcios y los incas. Claro que éste no funcionaba de noche ni en día muy nublado, y tampoco en el crepúsculo o el amanecer. Además los cuadrantes tenían que modificarse según las diferentes latitudes terrestres por variar la inclinación de los rayos solares, y la medición en general no era muy segura porque la duración de los días es distinta en cada época del año.


Clepsidra

Fue así que nacieron las clepsidras, unos recipientes que hacían las veces de reloj de agua, las cuales se utilizaron en Babilonia y Egipto primero, y luego en Grecia y Roma. Funcionaba de la siguiente manera: el líquido de un contenedor discurría a un vaso o fuente; a medida que el líquido era evacuado de dicho contenedor, el nivel de descenso indicaba el tiempo transcurrido. Los romanos emplearon este modelo de reloj en sus tribunales para controlar el desarrollo de las audiencias y un sistema similar solía usarse de noche, empleando velas marcadas.

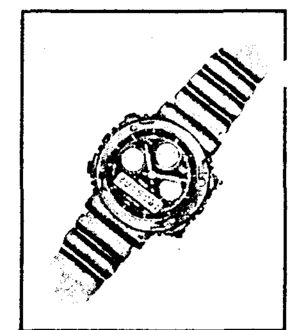
Alrededor del siglo III de nuestra era apareció por fin, el hoy famoso reloj de arena con dos recipientes unidos por un estrecho cuello. ¿Acaso no ha visto usted alguna vez esos pequeñísimos relojes de arena popularizados en una época para medir los minutos de una charla telefónica? Seguro que sí. Pues bien, en el pasado los relojes de arena, más grandes, eran capaces de medir el tiempo de todo un día, facilitando ya la puntualidad de toda la familia.

Reloj de arena

Con todo, debería pasar bastante tiempo hasta que las maquinarias comenzaran su reinado, recién en el siglo VIII el italiano Pacífico construyó un reloj accionado por contrapesas que fue obsequiado al rey Pipino, el Breve, por el papa Paulo I. Eran los primeros pasos. Hacía el 1 300 estos mecanismos ya eran habituales en los relojes de algunas iglesias europeas, al punto que el reloj de este tipo más antiguo que se conserva todavía en buen estado de funcionamiento es el de la Catedral de Salisbury, Inglaterra, instalado en 1 386. Pero el reloj de pesas ganaría eficiencia con el descubrimiento de la Ley del Péndulo, enunciada por Galileo Galilei hacia el 1 600. Gracias a esto el matemático y físico holandés Christian Huygens logró armar el primer reloj de péndulo en 1 657, aplicando el sistema sobre un reloj de pared. Ya entonces, sin embargo, habían pasado unos cien años desde los primeros relojes a cuerda inventados en la ciudad alemana de Nüremberg, lo que permitía la construcción de relojes portátiles. De esta época viene la fama de Ginebra como célebre centro relojero. La legislación calvinista de la ciudad impedía a sus orfebres realizar "cruces, cálices y otros instrumentos", con lo cual fueron perdiendo su rica clientela francesa y saboyarda. Por eso decidieron dedicarse a la creación de cajas para el mecanismo de los relojes, trabajando en estrecha colaboración con los artesanos relojeros. Ya a principios del siglo XVII, la reputación de la relojería ginebrina atravesaba las fronteras del país y exponía sus creaciones en las ferias de Lyon Francfort.

El avance del reloj había sido importante, aunque quedaban cuestiones sin resolver como el desgaste de las piezas y la consiguiente inexactitud en la medición del tiempo. Este aspecto logró modificarlo Nicolás Faccio en 1 704. utilizando rubíes y zafiros como pivotes de los mecanismos de los relojes. La dureza de estas piedras redujo significativamente los errores por frotación y desgaste, significando una mejora importante en la industria relojera.

Hoy en día, contamos con una inusual variedad de tipos y calidades de relojes artesanales, eléctricos, cronómetros, despertadores, de pulsera, atómicos, digitales ... El reloj pulsera, por ejemplo, fue creado en 1 904 por el relojero suizo Hans Wildorsf, de la famosa casa Rolex, quien apenas seis años después diseñó el primer cronómetro de pulsera. Los relojes atómicos, por su parte, comenzaron a construirse en 1 949 constituyéndose en una de las primeras aplicaciones pacíficas de la energía nuclear; por último, digamos que el uso de las propiedades del cuarzo en los relojes se inició en los Laboratorios Bell, en Estados Unidos; y, a partir de 1 980, se popularizó su uso en los relojes pulsera, que reemplazaron el clásico cuadrante redondo por una pantalla donde se puede efectuar una lectura directa de la hora. Se ha recorrido ya un largo camino.

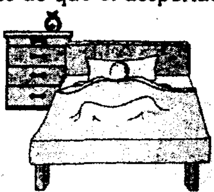


EJEMPLOS DE INTRODUCCIÓN

Antes de desarrollar el presente capítulo, primero intente resolver los siguientes casos que suele presentarse en nuestra vida diaria.

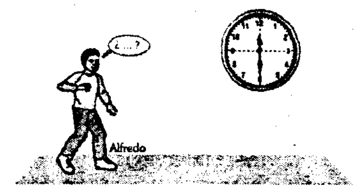
El sueño de Juan

Juan estaba muy cansado y se acostó a las 10 de la noche, con la intención de dormir hasta las 11 de la mañana del día siguiente, para ello puso su despertador a las 11. Unos 20 minutos después de acostarse se durmió. ¿Cuánto pudo descansar antes de que el despertador sonase?



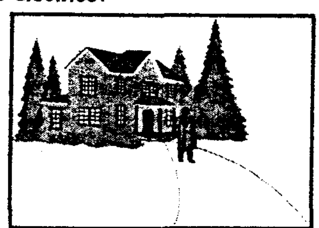
La hora perdida

¿Qué hora indica las agujas del reloj?, se pregunta Alfredo ... Si usted es un buen amigo y lo ayuda, ¿Cuál sería su respuesta?



El reloj de Manuel

Un día Manuel sale de su casa a las 11 de la mañana y deja su reloj despertador (digital) encendido. Cierto tiempo después de haber salido de casa, le comunican por teléfono (celular) que, por el lugar donde reside hubo un corte de fluido eléctrico cuyo restablecimiento fue de inmediato. Por la noche, cuando regresó a casa a las 10, observó que su reloj despertador indicaba las 6. ¿A qué hora se produjo el corte del fluido eléctrico?

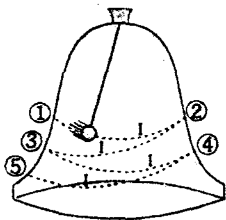


La solución se encuentra al final de este capítulo. Recuerda, antes de ver la solución primero inténtalo.

Respecto a este tema, existe variedad de problemas, entonces, para un mejor aprendizaje lo clasificaremos del siguiente modo:

- Problemas sobre campanadas
- Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir.
- Problemas sobre adelantos y atrasos.
- Problemas sobre ángulos formados por las manecillas de un reloj (horario y minutero).

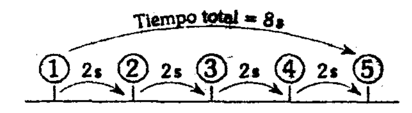
Observemos el siguiente gráfico :



Notamos que cuando movemos la campana, el badajo (la esfera que está suspendida por la parte más alta de la campana) empieza a golpear las paredes de la campana originando sonidos metálicos (campanadas).

También se puede observar que entre una y otra campanada, es decir, entre la primera y la segunda campanada hay un tiempo (lapso o intervalo) que es el mismo que hay entre la segunda y la tercera y así sucesivamente entre dos campanadas consecutivas. Entonces, si un campanario da cinco campanadas, tendremos un total de cuatro intervalos cuya suma nos dará el tiempo que el campanario demoró en tocar esas cinco campanadas.

Veámos en forma lineal:



Observamos, en el ejemplo, que el tiempo entre la primera campanada y la segunda es 4seg. y éste tiempo es el mismo entre la segunda y la tercera campanada y será el mismo en los demás intervalos.

Además, notamos que la suma de los cuatro intervalos nos da el tiempo que se empleó, desde la primera campanada hasta la última.

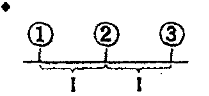
Así: $2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2 = 8$

es decir, el tiempo total es 8 segundos.

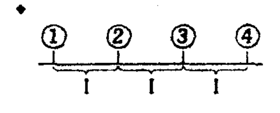
Entoncces, podemos indicar lo siguiente:

$$\text{Tiempo total} = \left(\begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{intervalos}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{tiempo de}\\ \text{cada intervalo}\end{array}\right)$$

Ahora, observemos el siguiente análisis:

- 

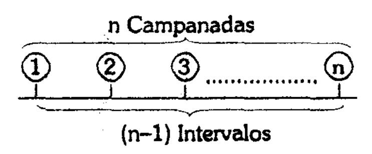
Si un campanario toca dos campanadas, entonces habrá un intervalo.

- 

Si un campanario toca tres campanadas, entonces habrá dos intervalos.

- ① ② ③ ④ — I I I
Si un campanario toca cuatro campanadas, entonces habrá tres intervalos.

Entonces, de acuerdo a la secuencia podemos deducir que el número de intervalos es en cantidad, uno menos que el número de campanadas, así:



o también, así:

$$\text{Número de campanadas} = \text{Número de intervalos} + 1$$

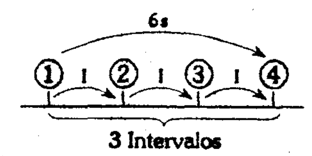
Ejemplo 1

Un campanario tarda 6 segundos en tocar 4 campanadas, ¿cuánto tiempo tardará en tocar 8 campanadas?

Resolución:

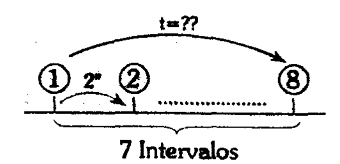
Si el campanario emite 4 campanadas, entonces, habrá 3 intervalos (conocemos que el intervalo entre campanada y campanada es el mismo y que la suma de ellas es el tiempo empleado, desde la primera hasta la última campanada). Por dato, el tiempo total es de 6 segundos y como son 3 intervalos, cada intervalo durará 2 segundos. Ahora, si el campanario toca 8 campanadas, será necesario sumar 2 segundos 7 veces, es decir, que demorará 14 segundos.

Gráficamente:



Se puede deducir que: $I = \dfrac{6}{3} = 2$

Luego:



Entonces:

$$t = \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{7\text{ veces}} = 7 \times 2 = 14$$

$\therefore$ tiempo: 14 segundos

Observación

El número de campanadas y el tiempo que demora en dar las campanadas no son magnitudes directamente proporcionales; es decir, no podemos indicar que si un campanario demora en dar 4 campanadas 6 segundos, entonces para que toque 8 campanadas empleará 12 segundos. En el ejemplo vemos que la respuesta no es 12 segundos, sino 14.

En cambio, sí son magnitudes directamente proporcionales el tiempo empleado y el número de intervalos, y como el número de intervalos es uno menos que el número de campanadas, entonces podemos indicar el siguiente método práctico:

Primero, con los datos del ejemplo indicamos una regla de tres simple directa, de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} 6\,s \text{ —— } 4\,C \\ x\,s \text{ —— } 8\,C \end{array}\right\}$$ donde x es el tiempo que demorará en tocar las 8 campanadas.

Luego:

Para expresar el número de campanadas en número de intervalos, le restamos una unidad, así :

ahora estos números representan a la cantidad de intervalos

$$\begin{array}{l} 6\,s \text{ —— } (4-1) \\ x\,s \text{ —— } (8-1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 6\,s \text{ —— } (3) \\ x\,s \text{ —— } (7) \end{array}$$

Finalmente, planteamos lo siguiente:

$$6 \cdot 7 = 3 \cdot x$$

Desarrollando: $x = 14$

$\therefore$ El tiempo empleado es de 14 segundos.

Ejemplo 2

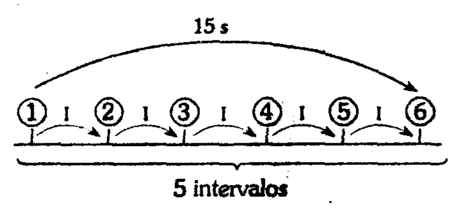
Un reloj señala la hora con igual número de campanadas; para indicar las 6 a.m., demoró 15 segundos. ¿Cuánto tiempo empleará para indicar las 8 a.m.?

Resolución:

Si el reloj indica las horas con igual número de campanadas; entonces, para que indicara las 6 a.m. tuvo que tocar 6 campanadas entre las cuales se percibirá 5 intervalos, y como el tiempo total empleado es de 15 segundos; entonces podemos deducir que cada intervalo es de 3 segundos.

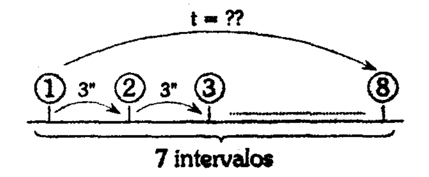
Luego, si va a señalar las 8 a.m., tendrá que dar 8 campanadas; es decir, se contabilizará 7 intervalos, y como cada uno dura 3 segundos; entonces, el tiempo total a emplear será de 21 segundos.

Gráficamente:



Se puede deducir que $I = \dfrac{15}{5} = 3$

Luego:



Entonces: $t = \underbrace{3 + 3 + ... + 3}_{7\ \text{veces}} = 7 \times 3 = 21$

$\therefore$ empleará : 21 segundos.

Otra forma:

Aplicamos la observación vista en el ejemplo anterior, tenemos:

En 15 s da 6 camp.

x s da 8 camp.

Luego:

Le restamos la unidad a la cantidad de campanadas.

Estos números indican el número de intervalos

$$\begin{array}{l} 15\ s \text{ — } (6-1) \\ x\ s \text{ — } (8-1) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 15\ s \text{ — } 5 \\ x\ s \text{ — } 7 \end{array}$$

Finalmente, tenemos:

$$15 \cdot 7 = 5 \cdot x$$

Desarrollando: $x = 21$

$\therefore$ El tiempo empleado es de 21 segundos.

Ejemplo 3

Un reloj indica las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 3 tardó a segundos; ¿cuánto tiempo tardará para indicar la hora n?

Resolución:

De acuerdo a los ejemplos anteriores, planteamos lo siguiente:

En a s emite 3camp. $\rightarrow$ a s — (3–1)

En x s emitirá ncamp. $\rightarrow$ x s — (n–1)

Entonces : $\begin{array}{l} a \text{ — } 2 \\ x \text{ — } (n-1) \end{array}$

Luego: $a(n-1) = 2x$

$$x = \frac{a}{2}(n-1)$$

$\therefore$ El tiempo empleado será de $\dfrac{a}{2}(n-1)$ segundos.

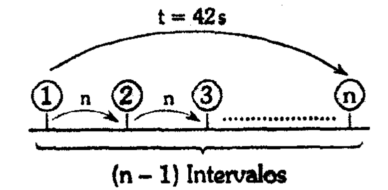
Ejemplo 4

Un reloj tarda 42 segundos en tocar **n** campanadas. Si entre campanada y campanada tarda tantos segundos como campanadas da, ¿cuánto tarda en tocar 10 campanadas?

Resolución:

Por dato, el reloj toca "n" campanadas y el tiempo que demora entre campanada y campanada es precisamente "n" segundos.

Gráficamente tenemos:



Recordando:

$$\text{Tiempo} = \begin{pmatrix} \text{Número de} \\ \textbf{intervalos} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{Tiempo de} \\ \text{cada intervalo} \end{pmatrix}$$

Reemplazando:

$$42 = (n-1) \,.\, n$$

Antes de resolver la ecuación observamos que en el segundo miembro se tiene el producto de dos factores consecutivos; entonces, por comodidad, descomponemos el número 42 en dos factores, también consecutivos, así:

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{42} &= (n-1)n \\ 6 \times 7 &= (n-1)n \end{aligned}\right\} \text{De la relación encontramos que } \underbrace{n=7}$$

Luego:

El lapso entre campanada y campanada es de 7s, ahora, si el reloj va a tocar 10 campanadas, entonces tendremos 9 intervalos, y como cada intervalo dura 7 segundos, podemos plantear lo siguiente:

$$\text{Tiempo} = 9 \,.\, 7 = 63$$

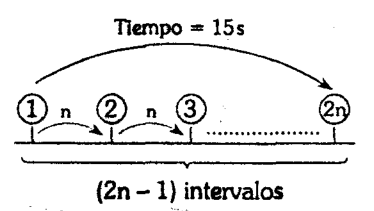
$\therefore$ El tiempo total es de 63 segundos.

Ejemplo 5

El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 15 segundos y se escucharon tantas campanadas como 2 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada. ¿Cuánto tiempo empleará este campanario para tocar 8 campanadas?

Resolución:

Del enunciado se puede indicar lo siguiente:

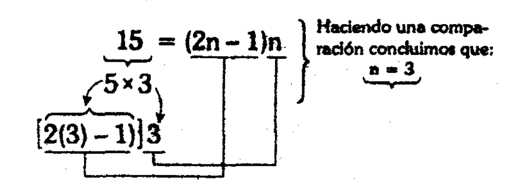


Como no sabemos qué tiempo hay entre una y otra campanada, entonces indicamos con una variable a dicho tiempo, por ejemplo n segundos (como se muestra en el gráfico); en consecuencia, el número de campanadas será 2n (esto por condición del enunciado) y además habrá (2n –1) intervalos (ver gráfico).

Luego; como el tiempo empleado es de 15 segundos (dato), entonces:

$$15 = (2n-1) \,.\, n$$

Análogamente al ejemplo anterior, antes de desarrollar la ecuación, trataremos de descomponer al número 15 en dos factores que tengan la forma del segundo miembro, así:



Entonces, el lapso entre campanada y campanada es de 3s; ahora, si el campanario va a tocar 8 campanadas, tendremos 7 intervalos, cada uno de 3 segundos; por tanto:

$$\text{Tiempo} = 7 \times 3 = 21$$

$\therefore$ El tiempo total es de 21 segundos.

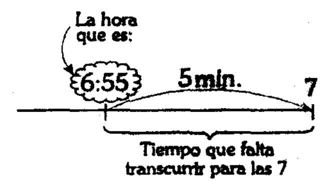
TIEMPO TRANSCURRIDO Y TIEMPO QUE FALTA TRANSCURRIR

A veces cuando preguntamos por la hora a una persona, escuchamos respuestas como las siguientes:

- Son 5 para las 7.
- Son 10 para las 4.
- Falta un cuarto para las 9, etc.

Notamos que éstas expresiones indican la hora que deseamos saber.

En el primer caso 5 para las 7, indica que son las 6.55; es decir, falta transcurrir 5 minutos para que sean las 7; además podemos expresarlo gráficamente de la siguiente manera:



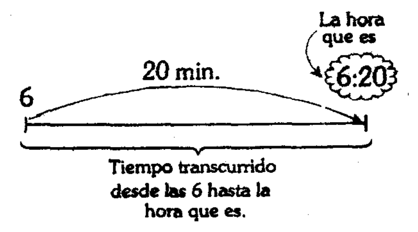
Lo mismo se puede precisar en los demás casos.

Así como en éste y otros ejemplos similares, en los cuales nos dicen la hora indicándonos el tiempo que falta transcurrir para llegar a la hora siguiente; también nos pueden precisar la hora indicándonos el tiempo que ha transcurrido desde una cierta hora hasta la hora que es.

Por ejemplo:

- Ya ha pasado 20 minutos desde las 6.
- Ha transcurrido 12 minutos desde las 4.

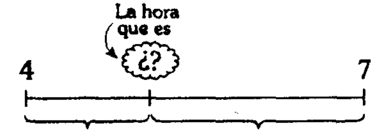
En el primer caso, nos indica, que son las 6:20; es decir que desde las 6 hasta la hora que es en este momento, ha transcurrido 20 minutos; su interpretación gráfica puede ser la siguiente:



También nos pueden indicar la hora entre dos horas específicas, por ejemplo:

Son más de las 4, pero aún no son las 7.

Es decir, la hora que es está entre las 4 y las 7; lo cual gráficamente sería así:



En este ejemplo se considera un intervalo de 3 horas (de 4 a 7), pero entiéndase que ello puede variar; es decir, se puede considerar un día, una semana o un año, según sea el enunciado de un problema.

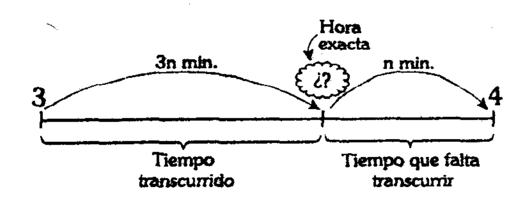
Entonces, sin más preámbulo veamos las siguientes situaciones :

Ejemplo 1

Son más de las 3 pero aún no las 4. Si los minutos transcurridos desde las 3 es el triple de los minutos que faltan transcurrir para que sea las 4, ¿qué hora es?

Resolución:

Para empezar, la hora pedida se encuentra entre las 3 y las 4; además, el tiempo transcurrido es el triple del tiempo que falta transcurrir; entonces, de todo ello podemos establecer lo siguiente:



Como no sabemos cuánto falta para las 4, entonces a dicho tiempo lo indicamos con n; es decir n minutos; por lo tanto, el tiempo transcurrido, desde las 3 hasta la hora que es, debe ser 3n minutos, por condición del enunciado (ver gráfico).

Y como los minutos transcurridos, desde las 3 hasta la hora exacta, y los minutos que falta transcurrir, desde la hora que es hasta las 4, deben totalizar una hora, es decir, 60 minutos; planteamos lo siguiente:

$$3n + n = 60 \quad \Rightarrow \quad n = 15$$

Con ello podemos indicar que el tiempo transcurrido desde las 3 hasta la hora exacta es:

$$3n = 3(15) = 45$$

$\therefore$ Son las 3:45

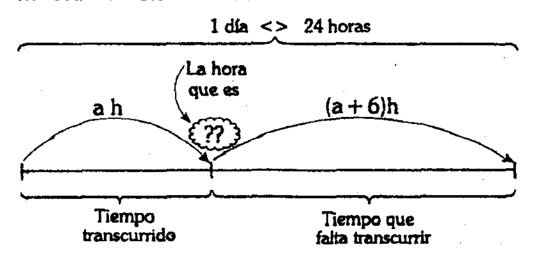
Ejemplo 2

¿Qué hora es si, en este instante, el tiempo que falta para acabar el día excede en 6 horas al tiempo transcurrido?

Resolución:

En este caso el problema involucra el lapso de todo un día, es decir, 24 horas.

Del enunciado podemos deducir que el tiempo que falta para acabar el día es mayor que el tiempo transcurrido, en 6 horas; luego al tiempo transcurrido lo indicamos como a, es decir a horas; en consecuencia, el tiempo que falta transcurrir tendrá que ser de (a + 6) horas y la suma de ambas debe totalizar 24 horas, como se muestra a continuación:



Luego: $a + (a + 6) = 24 \Rightarrow a = 9$

Entonces:

Del día ya ha transcurrido, hasta la hora que es, 9 horas.

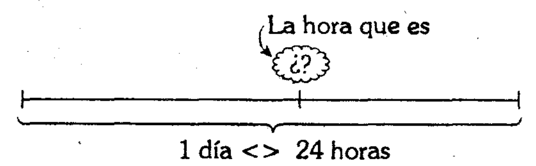
$\therefore$ Son las 9 a.m.

Ejemplo 3

Hace 4 horas faltaba para acabar el día, el triple del tiempo que faltará para acabar el día dentro de 6 horas; ¿qué hora es?

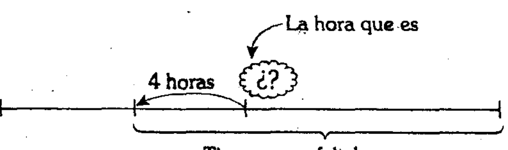
Resolución:

Como en el ejemplo anterior, consideramos un día; es decir, un intervalo de 24 horas y en ella ubicaremos la hora que es, como se muestra a continuación:

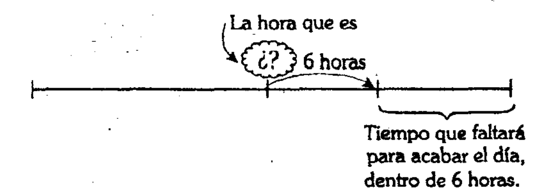


Luego:

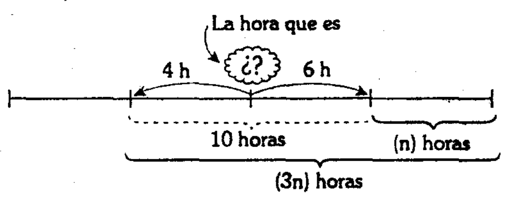
- El tiempo que faltaba para acabar el día, hace 4 horas, se expresaría así:



- El tiempo que faltará para acabar el día, dentro de 6 horas, se expresaría así:



Además se sabe que el primero es el triple respecto del segundo; es decir, si al tiempo que faltará para acabar el día dentro de 6 horas lo indicamos como n horas; entonces, el tiempo que faltaba para acabar el día, hace 4 horas, era 3n horas, así:



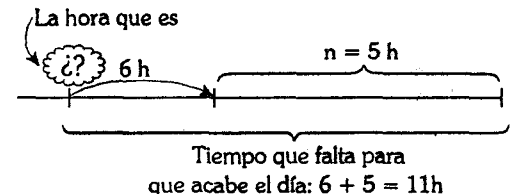
Observamos que:

$$3n = 10 + n \Rightarrow n = 5$$

Entonces, para acabar el día falta exactamente:

$$6\text{ h} + 5\text{ h} = 11\text{ h}$$

Gráficamente:



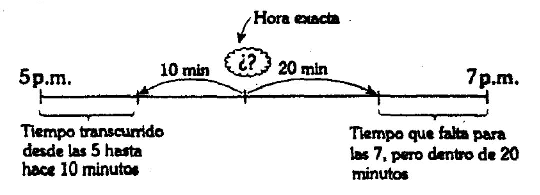
∴ Son las 13 h o 1 p.m.

Ejemplo 4

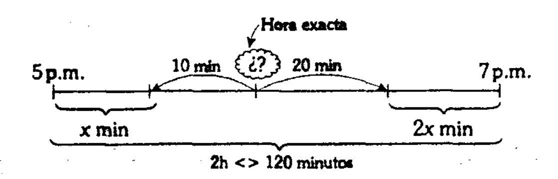
Si, dentro de 20 minutos, el tiempo que faltará para las 7 p.m. será el doble del tiempo transcurrido, desde las 5 p.m. hasta hace 10 minutos de la hora que es; ¿qué hora es?

Resolución:

De acuerdo al enunciado podemos indicar lo siguiente:



Como el tiempo que falta para las 7, dentro de 20 minutos, es el doble del tiempo transcurrido desde las 5 hasta hace 10 minutos; entonces:



En consecuencia:

$$x + 10 + 20 + 2x = 120 \Rightarrow x = 30$$

El tiempo que ha transcurrido desde las 5 p.m. hasta la hora que es:

$$\underbrace{x}_{30}\text{ min} + 10\text{ min} = 40\text{ min}$$

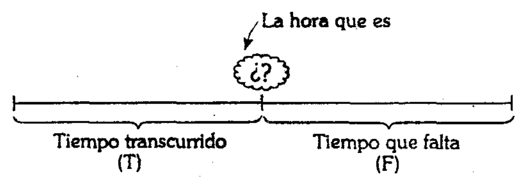
∴ Son las 5:40 p.m.

Ejemplo 5

Si el tiempo transcurrido del día son los 31/5 del tiempo que falta para que acabe el día; ¿qué hora es?

Resolución:

Interpretando gráficamente tenemos:



Del dato:

$$T = \frac{31}{5}(F) \quad ó \quad \frac{T}{F} = \frac{31}{5}$$

Como se observa, de la condición del enunciado, existe una relación o proporción entre el tiempo transcurrido y el tiempo que falta transcurrir.

Cómo, no sabemos cuál es el tiempo transcurrido y el tiempo que falta; pero sí conocemos que dichos tiempos están en la proporción de 31 a 5; entonces podemos multiplicar por un mismo número (por ejemplo K) a ambas cantidades.

Así tendremos:

$$\frac{T}{F} = \frac{31 . K}{5 . K} \rightarrow \begin{matrix} T = (31K)\text{horas} \\ F = (5K)\text{horas} \end{matrix}$$

Como ambos deben totalizar 24 horas, entonces:

$$31K + 5K = 24$$

$$36K = 24 \rightarrow K = \frac{2}{3}$$

Luego, el tiempo transcurrido desde que se inició el día hasta la hora que es, fue:

$$31K = 31\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{62}{3}\right) \text{ horas}$$

Además: $\left(\frac{62}{3}\right)$ h se puede expresar como:

$\left(20\frac{2}{3}\right)$ h, y esto mismo como: $20\text{ h} + \frac{2}{3}\text{h}$

Como $\left(\frac{2}{3}\right)$ h equivale a 40 min.

Entonces : $\left(\frac{62}{3}\right)$ h, equivale a: 20 h 40 min.

∴ Del día ha transcurrido 20 h 40 min, es decir, son las 8:40 p.m.

ADELANTOS Y ATRASOS

Veamos ahora situaciones en las cuales, como consecuencia de un mal funcionamiento del reloj, éste sufre adelantos y atrasos respecto de la hora que indica un reloj de funcionamiento normal.

Ejemplo 1

Siendo las 8:00 a.m., empieza a adelantarse un reloj a razón de 5 minutos por cada hora. ¿Qué hora estará marcando este reloj cuando en realidad sean las 10:00 p.m. del mismo día?

Resolución:

Para conocer la hora que indica este reloj, primero tenemos que saber cuánto se ha adelantado mientras estuvo funcionando; es decir, desde las 8 a.m. hasta las 10 p.m.

Observamos que desde las 8 a.m. hasta las 10 p.m. hay 14 horas.

Si en 1 hora se adelantó 5 minutos; entonces, en 14 horas tendrá que adelantarse 70 minutos.

Es decir:

Adelanto total : 14(5) = 70 min = 1 h , 10min

Luego:

El reloj defectuoso, cuando sea las 10 p.m., marcará:

10 p.m. + adelanto

∴ **10 p.m. + 1 h 10 min → 11:10 p.m.**

Ejemplo 2

Un reloj tiene 3 minutos de atraso y se atrasa 3 minutos por cada 2 horas transcurridas. Sabiendo que son las 12 del mediodía de un lunes, ¿cuándo y a qué hora el reloj tendrá un atraso de 1 hora?

Resolución:

Como el reloj presenta 3 minutos de atraso y queremos que complete 1 hora de atraso; entonces falta atrasarse 57 minutos.

Luego: Si se atrasa 3 minutos en 2 horas; entonces, para que se atrase 57 minutos, debe trascurrir 38 horas; es decir:

$$\times 19 \left(\begin{array}{l} 3 \text{ min} \longrightarrow 2\text{ h} \\ 57 \text{ min} \longrightarrow ¿? \end{array} \right) \times 19$$

¿? = 38 h

Notamos que el tiempo que debe transcurrir es de 2 × 19 = 38 horas que equivale 1 día y 14 horas.

Entonces para que complete una hora de atraso debe transcurrir 1 día y 14 horas; es decir, 38 horas a partir del lunes al mediodía.

Luego:

Lunes 12 m. + 1 día y 14 h ⇒ miércoles 2 a.m.

∴ El reloj tendrá un atraso de una hora el día miércoles a las 2 a.m.

Ejemplo 3

Se sabe que un reloj se adelanta 20 s cada minuto. Si empieza retrasado 4 minutos, respecto de la hora normal; ¿dentro de qué tiempo tendrá un adelanto de 6 minutos de la hora normal?

Resolución:

Como el reloj estaba atrasado 4 minutos, entonces para que marque la hora correcta debe adelantarse 4 minutos y para que, a partir de allí, tenga un adelanto de 6 minutos debe entonces adelantarse, en total: 4 min + 6 min = 10 min.

Luego:

$$\begin{array}{cccc} & \text{Adelanto} & \text{Tiempo (transcurrido)} & \\ \times 3 & 20\text{ s} & 1\text{ min.} & \times 3 \\ & \underbrace{60\text{ s}}_{1\text{ min.}} & 3\text{ min.} & \end{array}$$

Se observa que se adelanta 1 minuto por cada 3 minutos que transcurre; entonces para que tenga un adelanto de 10 minutos debe transcurrir 30 minutos.

∴ Dentro de 30 minutos.

Ejemplo 4

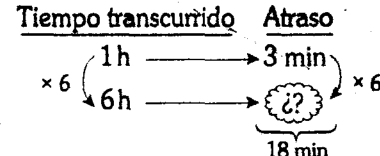
Un reloj marca las 10 p.m. ¿Qué hora es, en realidad, si hace 6 horas que se atrasa a razón de 3 minutos cada hora?

Resolución:

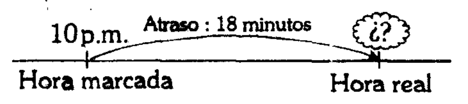
Como el reloj se atrasa, entonces la hora real debe estar después de las 10 p.m.

También se sabe que se atrasa 3 minutos por cada hora y como ya lleva 6 horas atrasándose; entonces ya se ha atrasado 18 minutos.

Así:



Gráficamente, se tendría lo siguiente:



∴ Hora real: 10 p.m. + 18 min → 10:18 p.m.

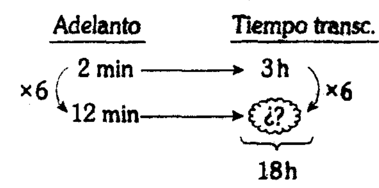
Ejemplo 5

Un reloj se adelanta 2 minutos cada 3 horas. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las 10:20 p.m. marca 10:32?

Resolución:

Como son las 10:20 y el reloj está marcando las 10:32; entonces se ha adelantado 12 minutos.

Además, por cada 3 horas se adelanta 2 minutos; entonces, para que tenga el adelanto de 12 minutos, debió transcurrir 18 horas; es decir, hace 18 horas que el reloj se está adelantando. Así:



Luego: La hora en la que empezó a adelantarse fue:

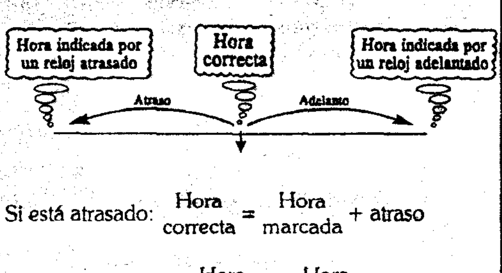
10:20 p.m. − 18 h → 4 h 20 min

(10:20 p.m. = 22 h 20 min.)

∴ Empezó a las 4:20 a.m.

Observación:

De manera práctica, podemos utilizar el siguiente esquema para orientarnos y hacer un enfoque correcto para la resolución de problemas similares a los ejemplos mostrados anteriormente.



Si está atrasado: $\text{Hora correcta} = \text{Hora marcada} + \text{atraso}$

Si está adelantado: $\text{Hora correcta} = \text{Hora marcada} - \text{adelanto}$

RELACIÓN DEL ÁNGULO FORMADO POR LAS MANECILLAS DE UN RELOJ (HORARIO - MINUTERO):

Consideraciones previas:

- 1 hora equivale a 60 min. y cada minuto a 60 segundos.
- Un reloj de manecillas posee 12 divisiones que indican las horas y cada una de éstas posee 5 pequeñas divisiones que corresponden a los minutos; es decir, toda la circunferencia está dividida en 60 pequeñas divisiones.
- También conocemos que la circunferencia representa 360°.

  Luego:

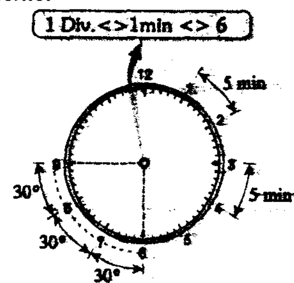
  60 div <> 60 min <> 360°

  ⇒ 1 div <> 1 min <> 6°

Es decir:

Si el minutero recorre una división, entonces transcurrió un tiempo de un minuto y, además, barrió un ángulo de 6°.

Gráficamente:



Observación:

Para la resolución de los problemas sobre manecillas, se recomienda analizar a partir de la hora exacta anterior a la hora indicada en un problema determinado, a la cual llamaremos hora de referencia.

Ejemplo:

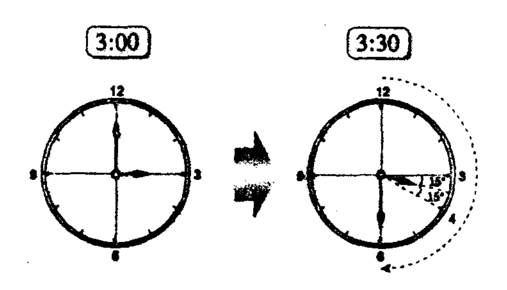
Hora de referencia

3:25 ⇒ 3:00

5:40 ⇒ 5:00

4:20 ⇒ 4:00

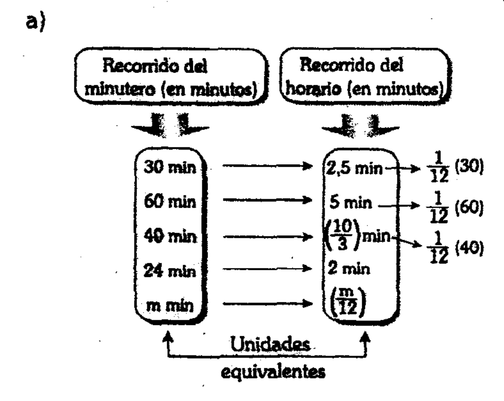
- Analicemos qué ocurre con las manecillas, desde las 3:00 hasta las 3:30.



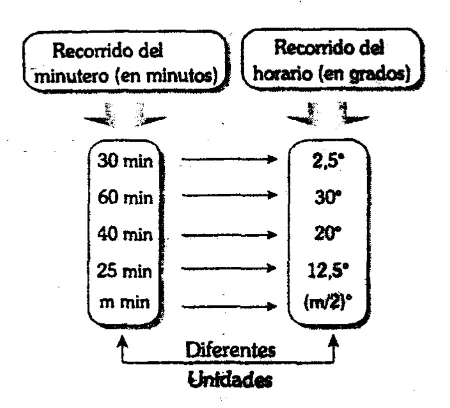
Observamos que el minutero partió de la marca de las 12 y llegó a la marca de las 6; es decir, hizo un recorrido equivalente a 30 minutos; en cambio, el horario partió de la marca de las 3 y llegó a la mitad del espacio angular entre las marcas 3 y 4, barriendo un ángulo de 15°.

Además, podemos establecer las siguientes relaciones:

a)



b)



Dependiendo de las características y datos del problema cualquiera de las dos equivalencias puede utilizarse en la resolución de problemas.

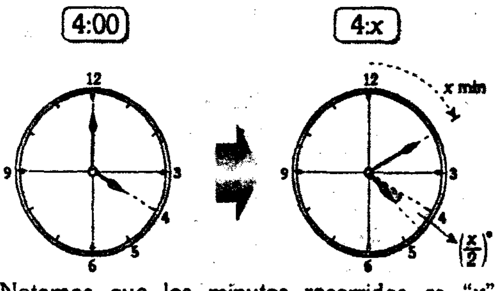
Se recomienda aquella que le sea más comprensible o sencilla.

Ejemplo 1

Representar gráficamente 4: x', si el minutero se encuentra antes del horario.

Resolución:

Como ya se ha mencionado, empezamos a analizar a partir de la hora exacta anterior a la indicada; en este caso, empezamos a partir de las 4:00.

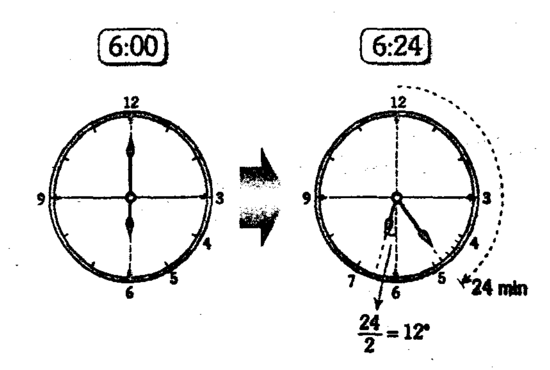


Notamos que los minutos recorridos es "x" entonces el ángulo barrido por el horario a partir de su posición inicial (4:00) es de $\left(\dfrac{x}{2}\right)^\circ$

Ejemplo 2

Si a partir de las 6:00 el minutero recorre 24 minutos; entonces el horario barrerá un ángulo de 12°, siendo la hora 6:24

Expresando gráficamente tenemos:

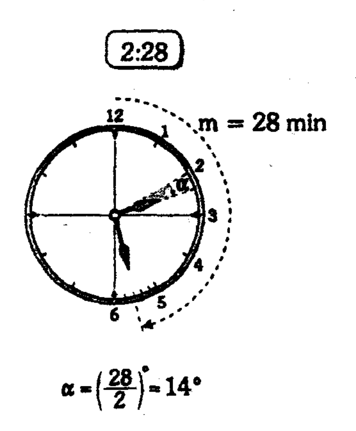


Ejemplo 3

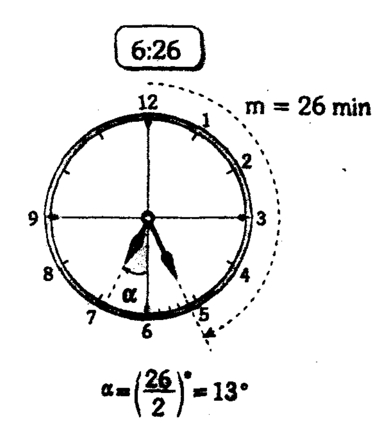
Graficar las posiciones de las agujas, en cada caso, e indicar el ángulo barrido por el horario, a partir de la hora de referencia.

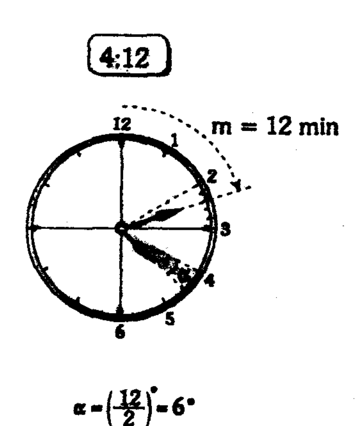
- 2:28
- 6:26
- 4:12
- 2:40
- 2:10
- 9:44

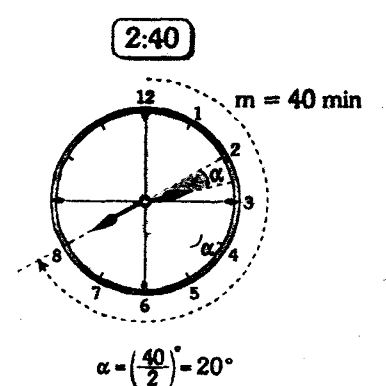
Resolución:

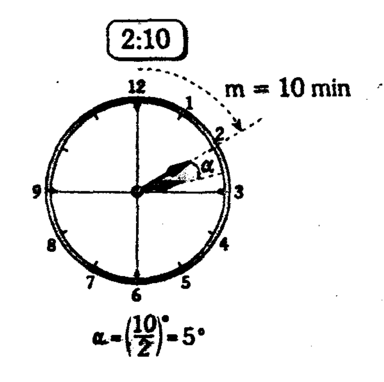


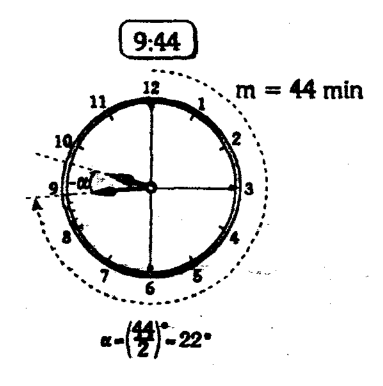
$\alpha = \left(\frac{28}{2}\right)^\circ = 14°$











Ejemplo 4

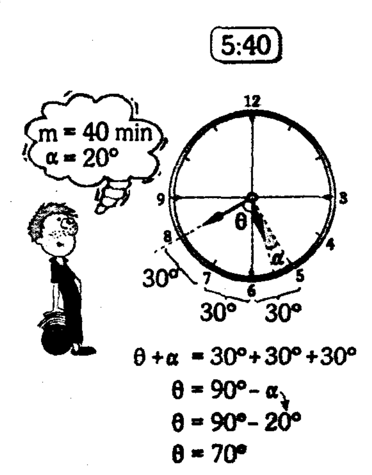
Hallar el ángulo formado por las manecillas del reloj en los siguientes casos:

- 5:40
- 8:20
- 6:15
- 11:57

Resolución:

Cuando nos piden calcular el ángulo formado por las manecillas de un reloj, nos referimos a la menor medida del ángulo que forman dichas agujas.

- Indicaremos a dicho ángulo como "θ" y "α" será el ángulo barrido por el horario.

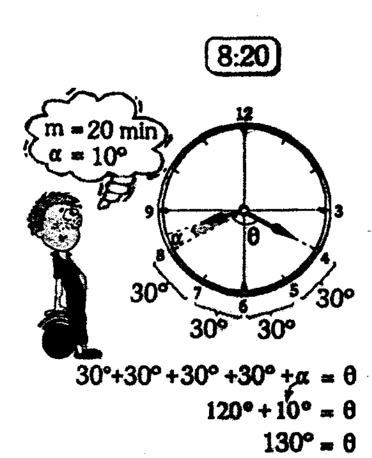


$\theta + \alpha = 30° + 30° + 30°$

$\theta = 90° - \alpha$

$\theta = 90° - 20°$

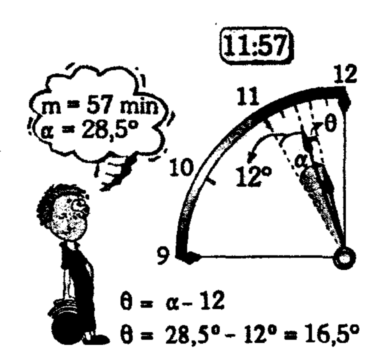
$\theta = 70°$



$30° + 30° + 30° + 30° + \alpha = \theta$

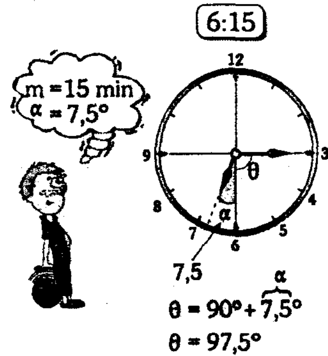
$120° + 10° = \theta$

$130° = \theta$



$\theta = \alpha - 12$

$\theta = 28{,}5° - 12° = 16{,}5°$

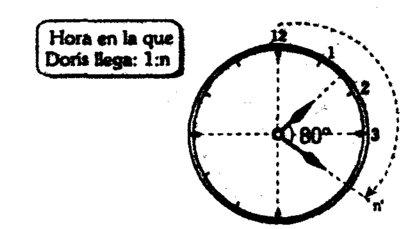


$\theta = 90° + \overbrace{7{,}5°}^{\alpha}$

$\theta = 97{,}5°$

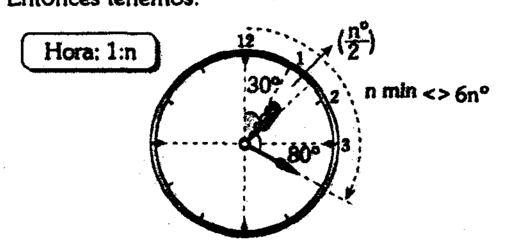
Ejemplo 5

Alfredo salió de compras en el instante en que Doris llegaba; es decir, a la una de la tarde con n minutos. Si Alfredo regresó 20 minutos más tarde, ¿a qué hora regresó? (Ver gráfico)



Resolución:

Primero hallaremos a qué hora llegó Doris.
Entonces tenemos:



Recordemos que: 1 min < > 6°
10 min < > 60°
∴ n min < > 6n°

Se observa del gráfico que :

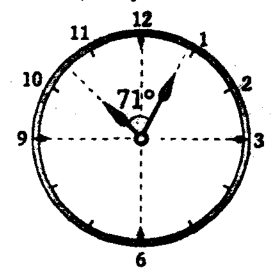
$$30 + \frac{n}{2} + 80 = 6n \Rightarrow n = 20$$

Entonces, Doris llegó a la 1:20, que es la misma hora en que sale Alfredo, y como él vuelve al cabo de 20 minutos:

∴ Alfredo regresó: 1:20 + 20 min = 1:40 p.m.

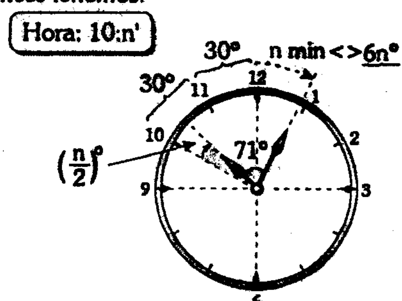
Ejemplo 6

Jenifer sale al teatro en la mañana cuando las agujas se encuentran como indica el gráfico adjunto; si 30 minutos antes de salir escuchó timbrar el teléfono, ¿a qué hora ocurrió aquello?



Resolución:

Primero hallaremos a qué hora sale al teatro, entonces tenemos:



Luego: $30 + 30 + 6n = 71 + \dfrac{n}{2}$

Desarrollando: $n = 2$

Jenifer salió al teatro a las 10:02 a.m.

∴ Escuchó timbrar el teléfono a las:

10:02 – 30 min ⇛ 9:32 a.m.

Ejemplo 7

¿A qué hora entre las 3 y 4 las agujas forman un ángulo de 24° por vez primera?

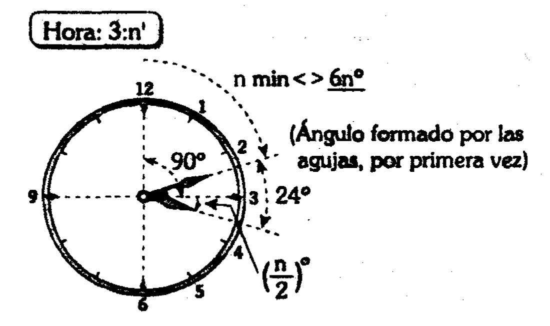
Resolución:

El ángulo formado por las agujas es de 24° y ese ángulo se puede dar en dos casos:

- Cuando el minutero todavía no pasa al horario.
- Cuando el minutero ya pasó al horario.

Es por ello que nos indican, específicamente el ángulo formado por vez primera; es decir, se refiere al primer caso, entonces tenemos lo siguiente:

Como la hora es nuestra incógnita llamaremos a dicha hora: 3:n



Del gráfico se tiene: $6n + 24 = 90 + \dfrac{n}{2}$

Desarrollando: $n = 12$

∴ La hora es: 3:12

Observación:

Otra manera:

Resolviendo el ejemplo, considerando que el recorrido del horario es la doceava parte del recorrido del minutero.

Tenemos :

Hora: 3:n

n min

15'

24° <> 4min

$(\frac{n}{12})$min

Recordando : 6° <> 1 min ; 90° <> 15 min

Del gráfico:

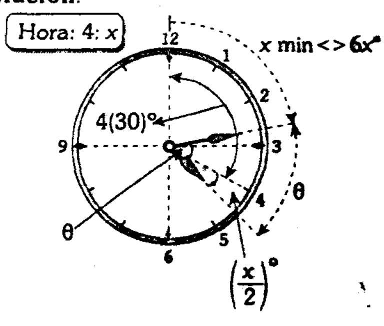
$n\text{ min} + 4\text{ min} = 15\text{ min} + \left(\dfrac{n}{12}\right)\text{min} \Rightarrow n = 12$

∴ Hora: 3:12

Ejemplo 8

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj a las 4:x si el minutero está antes que el horario; es decir, todavía no lo pasa.

Resolución:



Se observa: $4(30°) + \left(\frac{x}{2}\right)° = 6x° + \theta$

$$4(30°) + \frac{x}{2} - 6x° = \theta$$

$$4(30°) - \frac{11}{2}(x°) = \theta$$

$$\therefore\ \theta = 30(4) - \frac{11}{2}(x)$$

Además, podemos notar lo siguiente:

$$\theta = 30(4) - \frac{11}{2}m$$

(4) → La hora del dato; m → Los minutos del dato

En general: si nos dan la hora $h: m$ entonces el ángulo formado por el horario y el minutero es :

$$\boxed{\theta = 30h - \frac{11}{2}m}$$

Esto es, cuando el minutero aún no pasa al horario.
De forma análoga se puede obtener una relación similar; pero cuando el minutero ya pasó al horario, entonces el ángulo se calcula así :

$$\boxed{\theta = \frac{11}{2}m - 30h}$$

Ejemplo 9

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj en cada caso:

- 4:12
- 10:44

Resolución:

Se puede deducir que en ambas horas el minutero aún no pasa al horario, entonces aplicaremos la primera relación.

Así:

- $\boxed{4:12}$

$$\theta = 30(4) - \frac{11}{2}(12) = 54$$

$$\therefore\ \theta = 54°$$

- $\boxed{10:44}$

$$\theta = 30(10) - \frac{11}{2}(44) = 58$$

$$\therefore\ \theta = 58°$$

Ejemplo 10

Hallar el ángulo formado por las agujas de un reloj en los siguientes casos:

- 4:40
- 2:26

Resolución:

Ahora, viendo las horas indicadas en un reloj de manecillas se puede apreciar que el minutero ya pasó al horario; entonces aplicaremos la segunda relación.

Así:

- $\boxed{4:40}$

$$\theta = \frac{11}{2}(40) - 30(4) = 100$$

$$\therefore\ \theta = 100°$$

- $\boxed{2:26}$

$$\theta = \frac{11}{2}(26) - 30(2) = 83$$

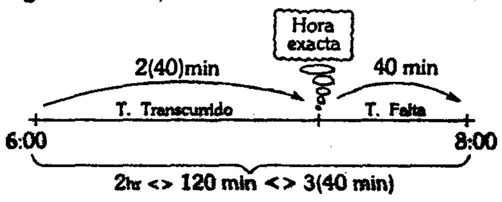
$$\therefore\ \theta = 83°$$

PROBLEMA 1

Faltan, para las 8:00 am, la mitad de los minutos que pasaron desde las 6:00 am de esta mañana, hasta la hora actual. ¿Qué hora indica el reloj?

Resolución:

Distribuyendo convenientemente los tiempos según los datos, tenemos:



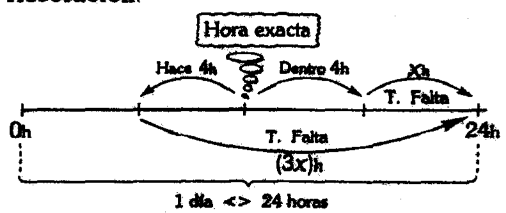
Hora exacta: 6h + 80 min = 7 h 20 min

∴ Son las 7:20 a.m.

PROBLEMA 2

¿Qué hora es si hace 4 horas faltaba, para acabar el día, el triple del tiempo que faltará para acabar el día, pero dentro de 4 horas?

Resolución:



Del gráfico : $4 + 4 + x = 3x \Rightarrow x = 4$

∴ Hora exacta: $24 - \underbrace{(4 + x)}_{8} = 16$

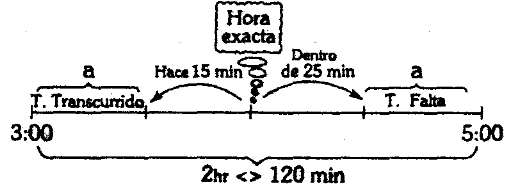
∴ Son las 16 h o 4 p.m.

PROBLEMA 3

Ya pasaron las 3:00 p.m., pero todavía no son las 4:00 p.m. de esta tarde. Si hubieran pasado 25 minutos más, faltaría, para las 5:00 p.m., los mismos minutos que pasaron desde las 3:00 p.m. hasta hace 15 minutos; ¿qué hora es?

Resolución:

Se deduce que el intervalo de tiempo en el cual trabajaremos es de 3:00 a 5:00p.m. Luego:



Entonces: $a + 15 + 25 + a = 120$

$a = 40$

Hora exacta:

3p.m + (a+15) min ⇄ 3 p.m.+ 55 min

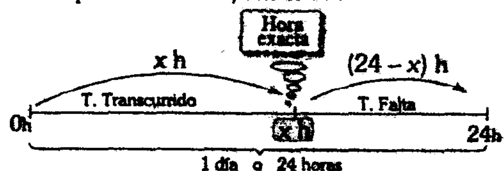
∴ La hora exacta es : 3:55 p.m.

PROBLEMA 4

Tania le pregunta la hora a Carlos y él le responde: "Para saber la hora, debes sumar la mitad del tiempo que falta para acabar el día con los 2/3 del tiempo que ha transcurrido desde que se inició". ¿Qué hora es?

Resolución:

Debido a que la hora exacta está determinada por el tiempo transcurrido, tenemos :



Por dato:

$$\underbrace{\text{la hora}}_{x} = \frac{1}{2}(24-x) + \frac{2}{3}(x)$$

Operando:

$6x = 72 - 3x + 4x$

$5x = 72$

$$x = \frac{72}{5} = \left(14\frac{2}{5}\right)h = 14h + \left(\frac{2}{5}\right)h$$

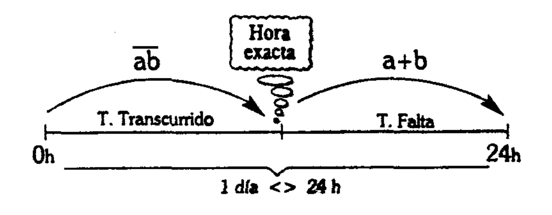
además : $\left(\frac{2}{5}\right)$h equivale a 24 minutos.

∴ Hora exacta: x = 14 h 24 min. < > 2:24p.m.

PROBLEMA 5

Si quedan del día, en horas, la suma de las dos cifras que forman el número de las horas transcurridas; ¿qué hora es actualmente?

Resolución:



$\underbrace{\overline{ab}}_{10a+b} + (a+b) = 24$

Luego : $11a + 2b = 24$

como a y b son cifras, sólo pueden tomar valores enteros.

Entonces : $11a + 2b = 24 \left\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right.$

Las horas transcurridas son: $\overline{ab} = 21$

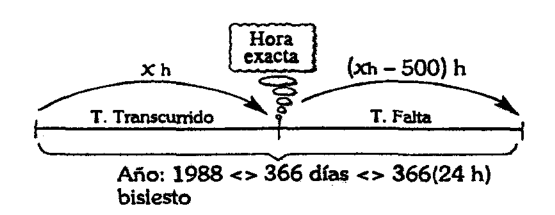
$\therefore$ Son las 21h **o** 9 p.m.

PROBLEMA 6

En 1988, antes del mediodía, Juan se dio cuenta que las horas transcurridas del año excedían en 500 horas a las horas que faltaban transcurrir. Indicar la fecha y hora en que Juan hizo dicha observación.

Resolución:

De los datos:



De la gráfica:

$x + (x - 500) = 366(24) \Rightarrow 2x = 366(24) + 500$

$x = 4642$ h < > 193 días 10 h

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul
31	29	31	30	31	30	11

193 días

Las 10 h transcurrieron el 12 de julio.

Por lo tanto, Juan hizo la observación el:

12 de julio de 1988 a las 10:00 a.m.

PROBLEMA 7

Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 a.m. tardó 4 s, ¿cuánto demora para indicar las 12:00 m.?

Resolución:

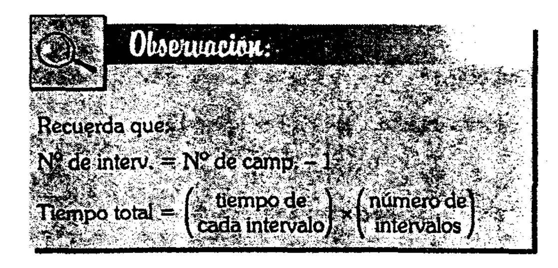
Atrevámonos a resolver este problema razonadamente, pero ya sin ayuda de gráfico; ...¡Atención!

- Para indicar las 5:00 a.m. tocó 5 campanadas, que equivalen a decir 4 intervalos de tiempo y que, por dato, acumulan 4 s; luego:

  1 Intervalo <> 1 s

- Luego, para tocar 12 campanadas se contarán 11 interv. de 1 segundo cada uno.

$\therefore$ El tiempo total es de 11 segundos



PROBLEMA 8

Para tocar 3 campanadas, el campanario tardó 6 segundos. ¿Cuántas campanadas tocará en un tiempo de 15 segundos?

Resolución:
Como el tiempo depende de los intervalos, entonces:

$$3\text{Camp.} <> 2\text{Int.} \longrightarrow 6s$$
$$\div 2 \quad (1\text{Int.} \longrightarrow 3s) \quad \div 2$$
$$\times 5 \qquad\qquad \times 5$$
$$6\text{Camp.} \Leftarrow 5\text{Int.} \Leftarrow 15s$$

$\therefore$ Tocará 6 campanadas

PROBLEMA 9
El campanario de un reloj demora (m+1) segundos en tocar m^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 4 segundos?

Resolución:
Planteamos lo siguiente:

$$(m+1)s \longrightarrow m^2\ \text{camp.}$$
$$4s \longrightarrow x\ \text{camp.}$$

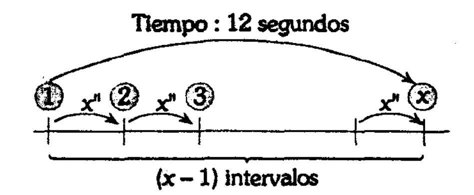
Donde x es nuestra incógnita.
Luego :

$$(m+1)\text{seg} \to (m^2-1)\text{int} \qquad (m+1)(x-1) = 4(m^2-1)$$
$$4\text{seg} \to (x-1)\text{int} \qquad (m+1)(x-1) = 4(m-1)(m+1)$$

$\therefore$ Número de campanadas : $x = 4m - 3$

PROBLEMA 10
El campanario de un reloj emplea 12 segundos en tocar tantas campanadas como segundos transcurren, entre campanada y campanada. ¿Cuántas campanadas tocará en 20 segundos?

Resolución:
De los datos podemos plantear lo siguiente :



Luego :

$$12 = x(x-1) \Rightarrow 4.3 = x(x-1)$$

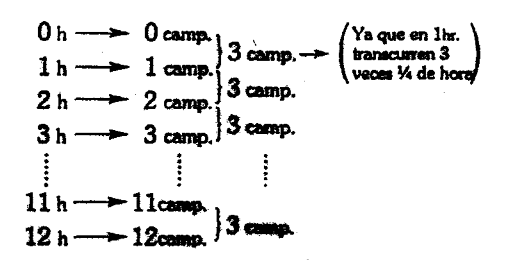
Finalmente:

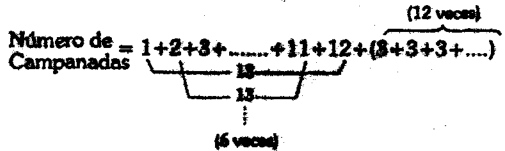
$$1\ \text{interv.} \longrightarrow x = 4s$$
$$\times 5 \qquad\qquad \times 5$$
$$\underline{6\ \text{camp.}} \Leftarrow 5\ \text{interv.} \Leftarrow 20s$$

$\therefore$ En 20 segundos tocará 6 campanadas.

PROBLEMA 11
Se sabe que el campanario de un reloj toca una campanada cada vez que transcurre 1/4 de hora, pero cuando sucede una hora en punto la indica con un número de campanadas igual a la hora que señala. ¿Cuántas campanadas tocará hasta el mediodía de hoy?

Resolución:
Vamos a contar el número de campanadas en total, según los datos.



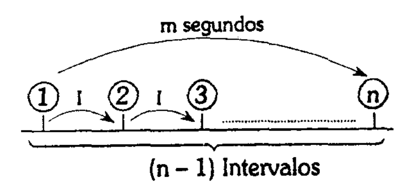


Número de campanadas : 13(6) + 3(12)

$\therefore$ El número de campanadas es 114.

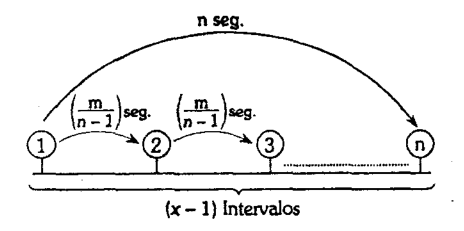
PROBLEMA 12
El campanario de un iglesia indica las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las "n" horas tarda "m" segundos; ¿cuántas horas habrá transcurrido, desde el instante en que empleó "n" segundos para indicarla, hasta el instante en que utilizó " 4n" segundos para indicar la hora correspondiente?

Resolución:
Si indica "n" horas, entonces debe dar "n" campanadas, como se muestra a continuación:

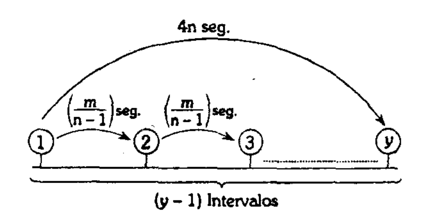


Entonces : $I = \dfrac{m}{n-1}$

Asumiendo que en "n" segundos indicó la hora "x", es decir, dio "x" campanadas; y en "4n" segundos indicó la hora "y"; es decir, dio "y" campanadas; entonces nos pide calcular "$y-x$".
Luego :



$$\Rightarrow n = \left(\frac{m}{n-1}\right)(x-1) \Rightarrow x = \frac{n(n-1)}{m} + 1$$



$$4n = \left(\frac{m}{n-1}\right)(y-1) \Rightarrow y = \frac{4n(n-1)}{m} + 1$$

Entonces :

$$y - x = \left[\frac{4n(n-1)}{m} + 1\right] - \left[\frac{n(n-1)}{m} + 1\right]$$

$$\therefore\ y - x = \left[\frac{3n(n-1)}{m}\right] \text{ horas}$$

PROBLEMA 13

Un reloj está atrasado 1 hora 40 minutos, pero se adelanta 3 minutos por día. ¿Al cabo de cuánto tiempo marcará la hora exacta?

Resolución:
Si queremos que este reloj atrasado marque la hora exacta, debemos esperar que se adelante un tiempo igual al de su atraso.
Para nuestro caso, tenemos:
Atraso: 1 hora 40 minutos < > 100 minutos; entonces *deberá adelantarse* 100 minutos; y como se *adelanta* 3 minutos cada día; entonces deberán transcurrir:

$$\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} \text{ día} = 33 \text{ días y 8 horas.}$$

PROBLEMA 14

El lunes a las 10:00 a.m., Patty observó que su reloj estaba 2 minutos adelantado. El miércoles a las 4:00 a.m., advirtió que dicho reloj estaba atrasado un minuto; entonces se deduce que dicho reloj habrá marcado la hora exacta en algún instante. ¿En qué día y hora marcó la hora exacta?

Resolución:
Habiendo estado adelantado 2 minutos, entonces era *suficiente que sufra un atraso de 2 minutos* para que marque la hora exacta; entonces se concluye que dicho reloj se atrasó más de lo debido; es decir, (2' + 1') = 3', desde las 10:00 a.m. del lunes hasta las 4:00 a.m. del miércoles, lo cual suma 42 horas.
Luego:

	Atraso		Tiempo transcurrido
÷3	~~3~~ min	——	~~42~~h
	1 min	——	14h
×2	2 min	——	28h <> 1 Día 4h

Para conocer el día en que marcó la hora exacta hacemos :

Lunes 10:00 a.m. + 1 día y 4 horas

∴ Marcó la hora exacta el martes a las 2 a.m.

PROBLEMA 15

Un reloj que se adelanta 2 minutos cada 3 horas, señala hoy, jueves, las 5:40 a.m., habiendo estado funcionando en forma defectuosa durante 10 días 4 horas, 30 minutos. Averigüe Ud. el día y la hora exacta en que empezó a adelantarse.

Resolución:

Debido a que el reloj sufre adelanto; a la hora que señala (5:40 a.m.) le restaremos el adelanto sufrido para dar con la hora exacta, y luego retornaremos atrás 10 días 4 horas 30 minutos para saber el momento en que empezó el desperfecto. Así entonces:

Sabemos: 10 días 4 horas 30 minutos < > $\frac{489}{2}$h

Entonces:

Tiempo transcurrido		Adelanto
3hr	—	2min
$\frac{489}{2}$h	—	x=163min<>2h 43min

$\times \frac{163}{2}$

Luego:

Hora exacta:

5 h 40 min – 2h 43 min = 2h 57 min (jueves)

Para conocer el momento en que empezó a adelantarse hacemos lo siguiente :

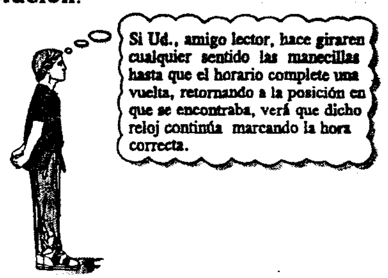
Jueves (2h 57 min) – (10d 4h 30 min)

∴ Empezó el domingo, a las 22h 27' ó 10:27 p.m.

PROBLEMA 16

Un reloj que se atrasa 2 minutos en cada hora, es sincronizado hoy al mediodía. ¿Qué tiempo, como mínimo, deberá transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

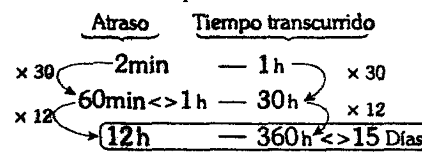
Resolución:



Luego:

Para que un reloj defectuoso, que sufre adelantos o atrasos, vuelva a marcar la hora correcta, es necesario que acumule un adelanto o atraso total de 12 horas < > 720'

Aplicando a nuestro problema:



∴ Volverá a marcar la hora correcta dentro de 15 días.

PROBLEMA 17

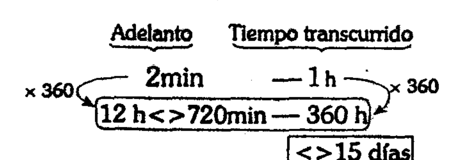
Dos relojes marcan la hora exacta a las 12m. y, a partir de ese instante, uno comienza a adelantarse a razón de 2 minutos cada hora y el otro se atrasa a razón de 3 minutos cada 2 horas. Luego de cuánto tiempo volverán a marcar, simultáneamente, la hora correcta.

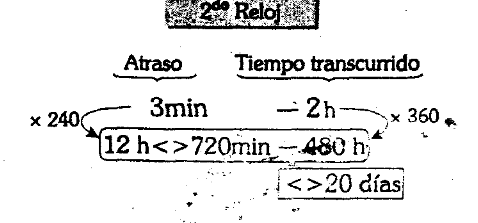
Resolución:

Relacionando este problema con el anterior, nos damos cuenta que el criterio a emplear es el mismo; pero para cada reloj por separado, porque los dos deben marcar la hora correcta, simultáneamente.

Entonces :

1er Reloj





Luego, el primer reloj marcará la hora correcta cada 15 días y el segundo cada 20 días; por tanto, para que ambos coincidan en marcar la hora correcta, deberá transcurrir un tiempo común que contenga exactamente a 15 y 20, dicho en otras palabras, buscamos el m.c.m. de 15 y 20 y éste resulta 60.

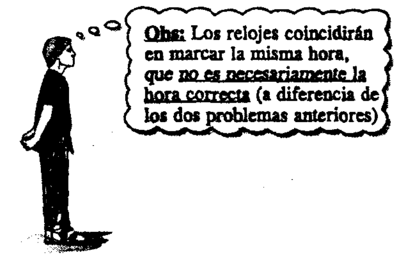
∴ Los dos relojes volverán a marcar la hora correcta luego de 60 días.

PROBLEMA 18

A las 12:00 del mediodía un reloj comienza a atrasarse a razón de 3 minutos cada hora y otro reloj empieza a adelantarse a razón de 2 minutos cada hora. Después de cuánto tiempo ambos relojes estarán marcando la misma hora, por primera vez.

Resolución:

Para que dos relojes defectuosos (uno se adelanta y el otro se atrasa) vuelvan a marcar la misma hora, por primera vez, es necesario que exista una diferencia de 12h <> 720 min entre lo que marcan cada uno.



Luego:

Al cabo de una hora habrá una diferencia: 3+2= 5 minutos; luego, para que la diferencia sea de 720 minutos, deberá transcurrir $\frac{720}{5} = 144\text{h}$ o 6 días.

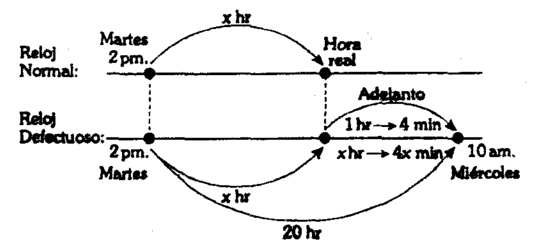
∴ La respuesta es luego de 6 días.

PROBLEMA 19

Un reloj que se adelanta a razón de 4 minutos cada hora, se pone a la hora a las 2 de la tarde del día martes. En la mañana del día siguiente, se observa que dicho reloj está marcando las 10 en punto. ¿Cuál es la hora correcta en ese momento?

Resolución:

Vamos a comparar, en un gráfico, la marcha de un reloj normal con nuestro reloj defectuoso (sufre adelantos).



De la gráfica:

$$x\,\text{h} + 4x\,\text{min} = 20\,\text{h} \Rightarrow x\,\cancel{\text{h}} + \frac{4x}{60}\cancel{\text{h}} = 20\,\cancel{\text{h}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{75}{4}$$

Luego:

el adelanto es de: $4x\,\text{min} = 4\left(\frac{75}{4}\right)\text{min} = 75\,\text{min}$

Entonces, para saber la hora correcta, hay que descontar a la hora que se indica, todo el adelanto sufrido (75').

∴ Respuesta : miércoles (10:00 a.m.) – (75min)
: miércoles 8:45 a.m.

PROBLEMA 20

Los relojes de Coco, Tito y Pepe se sincronizaron simultáneamente al mediodía. ¿Dentro de cuánto tiempo los horarios de los tres relojes equidistarán entre sí? Se sabe que el reloj de Coco se atrasa 5 minutos cada hora, el de Tito se adelanta 5 minutos cada hora y el de Pepe señala la hora correcta en todo instante.

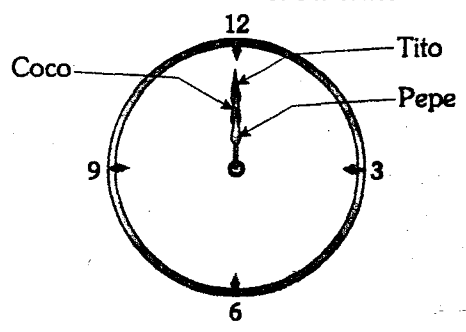
Resolución:

Lo interesante de este problema radica en determinar cómo relacionaremos los movimientos de los 3 relojes juntos.

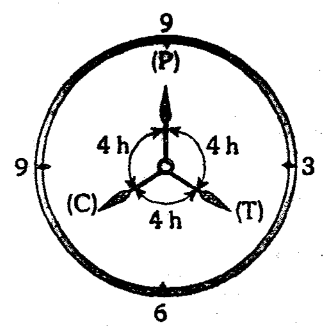
Responderemos a nuestra interrogante de la siguiente manera:

Como la circunferencia del reloj es de 12 h y los tres horarios deben de estar equidistantes, toda la circunferencia de 12 h la dividimos en 3 partes iguales (cada parte de 4 h), con lo cual deducimos que cada horario estará distante de los otros un tiempo de 4 horas.
Graficamente:

Posición inicial de los 3 horarios



Posición final de los 3 horarios



- Como el reloj de Pepe (P) marca la hora correcta, se observa que el reloj de Coco (C) se atrasó 4 horas, así como el reloj de Tito (T) se adelantó 4 horas.

Luego, analizando para uno de ellos (Para Coco por ejemplo), tendremos:

	Atraso	Tiempo transcurrido	
× 12	5min	— 1h	× 12
× 4	60min <> 1h	— 12h	× 4
	4h	— 48h	<> 2 días

∴ Dicha condición (equidistantes entre sí) ocurrirá dentro de 2 días.

PROBLEMA 21

Betty y Walter quieren tomar, con el tiempo justo el tren de las 11:00 a.m. El reloj de Betty está atrasado 10 minutos, pero ella cree que está adelantado 5 minutos; a su vez, el reloj de Walter está adelantado 5 minutos, pero él cree que está atrasado 10 minutos. ¿Quién alcanza a tomar el tren?

Resolución:

Ambos quieren llegar a las 11:00 a.m.
Luego:

I. Betty llegará a las 11:05 según lo que ella cree, sin embargo lo hará realmente a las 11:15 ya que su reloj está atrasado 10

II. Walter llegará a las 10:50 según lo que él cree, sin embargo lo hará realmente a las 10:45 ya que su reloj está adelantado 5 minutos.

∴ Walter llega primero y toma el tren.

PROBLEMA 22

Se tiene un reloj que se adelanta 3 minutos cada 2 horas. ¿Qué hora será realmente cuando marque las 11:15 a.m., si se sabe que ya lleva 30 horas adelantándose?

Resolución:

Como por cada 2 h se adelanta 3 min., entonces en las 30 h que lleva adelantándose se habrá adelantado 45 minutos.
Así:

	Tiempo transc.		Adelanto	
× 15	2hr.	———	3min.	× 15
	30hr.	———	(??) = 45min.	

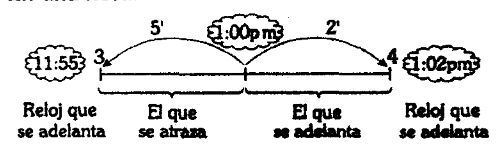
Luego:
La hora es: 11:15 – 45min. ⇒ 10:30

∴ La hora real es: 10:30

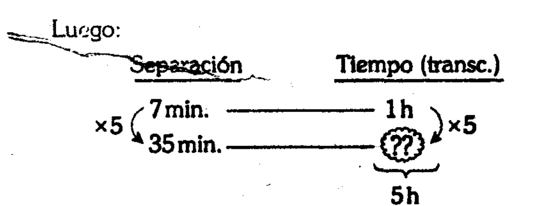
PROBLEMA 23

Un reloj se atrasa 5 minutos cada hora y otro se adelanta 2 minutos cada hora; si ambos se sincronizan a las 12:00 m., ¿después de cuántas horas el segundo estará adelantado 35 minutos respecto al primero?

En una hora:



Luego:



Resolución:

De acuerdo a los datos, se puede precisar que por cada hora que transcurre los minuteros de ambos relojes se separan (distancian) 7 minutos uno respecto del otro; entonces, para que uno esté 35 minutos adelantado respecto del otro, es decir que esté separado 35 minutos, debe transcurrir 5 horas.

∴ Ello ocurrirá al cabo de 5 horas.

PROBLEMA 24

Hace ya 15 horas que se adelanta un reloj. ¿Cuánto se adelanta por hora si señala las 6:20 a.m. cuando son las 6:14 a.m. del mismo día?

Resolución:

Como son las 6:14 y el reloj indica las 6:20, entonces lleva 6 minutos de adelanto y ello lo realizó en las 15 horas que lleva adelantándose, luego:

	Tiempo transc.	Adelanto	
÷3	15h	6 min	÷3
÷5	5h	2min o 120s	÷5
	1h	?? = 24s	

∴ Por cada hora se adelanta 24 segundos.

PROBLEMA 25

Ha tenido que transcurrir 40 días para que el reloj de Paola marque nuevamente la hora correcta. ¿Cada cuántas horas tendrá que haberse adelantado 3 minutos para así poder hacerlo?

Resolución:

Se deduce del texto que el reloj de Paola se adelanta, entonces para que nuevamente marque la hora correcta debe adelantarse 12 horas y ello lo realiza en 40 días (según el enunciado), luego:

	Tiempo transc.	Adelanto	
	40d	12h	
÷12	960h	12h	÷12
	80h	1h.	
÷20	80h	60min	÷20
	4h	3min	

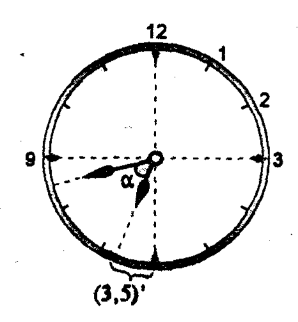
Se puede apreciar que cada 4 h el reloj se adelanta 3 minutos.

∴ Lo hace cada 4 horas.

PROBLEMA 26

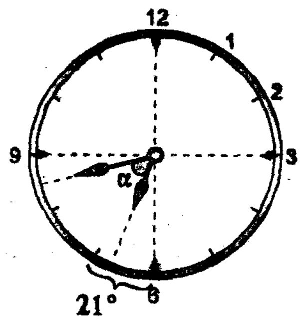
Según el gráfico, ¿qué hora será dentro de (6x) minutos?

Además : $\alpha = (6x - 15)$

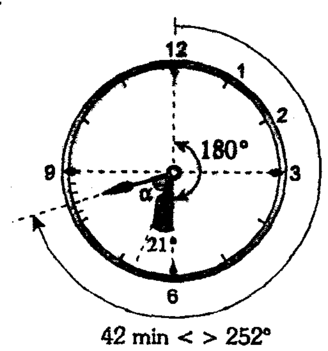


Resolución:
Primero, hallaremos qué hora marca este reloj y luego el valor de *x*.
Entonces:

Recordando :
1 min <> 6°
3,5 min<> 21°



Como el reloj indica más de las 6, empezamos el análisis a partir de las 6.
Notamos que el ángulo barrido por el horario a partir de las 6, es de 21° y esta cantidad corresponde a la mitad del recorrido realizado por el minutero, entonces éste ha recorrido 42 minutos. Por tanto son las 6:42
Luego:



42 min < > 252°

$$\underbrace{252 = 180 + 21 + \alpha}_{6x-15} \Rightarrow x = 11$$

Sin embargo, nos piden la hora dentro de 6x min., es decir, dentro de 66 min. o 1h 6min.

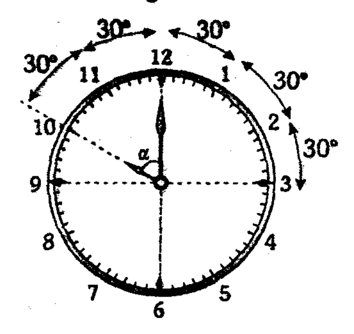
$\therefore$ La hora será: 6:42 + 1h 6min $\Rightarrow$ 7:48

PROBLEMA 27

¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las 9 horas 60 minutos?

Resolución:

Este problema guarda un poco de "capcioso", puesto que 9 horas 60 minutos equivale a decir 10 horas 00', y a esta hora las agujas están dispuestas como se indica en el gráfico:



$\therefore \alpha = 60°$

PROBLEMA 28

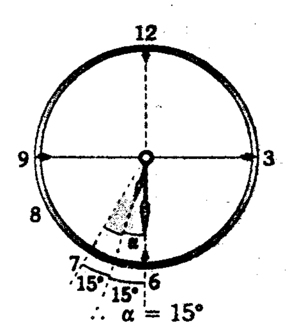
¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en cada caso?

a) 6h30' b) 7h47' c) 3h24'

Resolución:

a) 6:30

Recordemos que el horario demora una hora para desplazarse desde una marca horaria hacia otra y dicho desplazamiento equivale a 30°. Como el horario se ha desplazado media hora, esto quiere decir que ha barrido un ángulo de 15°, entonces:



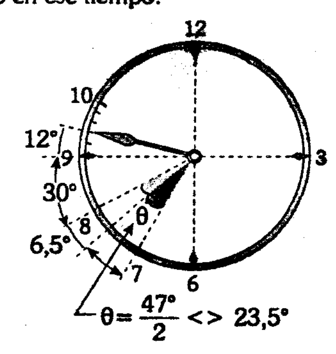
b) 7:47

Recordemos que:

1 división mayor < > 30°

1 división menor < > 1min < > 6°

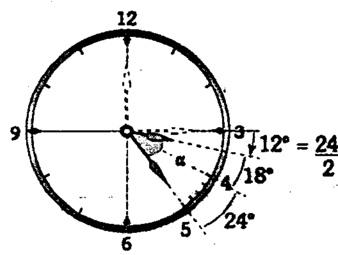
También recordemos que la mitad del tiempo que se desplaza el horario representa su ángulo descrito en ese tiempo.



$\therefore\ \alpha = 12° + 30° + 6{,}5° = 48{,}5°$

c. 3:24

Al igual que en el caso anterior:



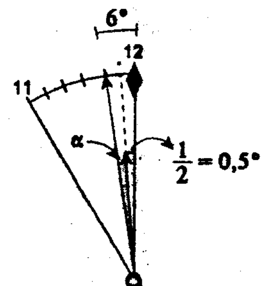
$\therefore\ \alpha = 18° + 24° = 42°$

PROBLEMA 29

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 11h59'?

Resolución:

Aplicando lo aprendido del problema anterior obtenemos:



De la gráfica:

$\therefore\ \alpha = 6° - 0{,}5° = 5{,}5°$

PROBLEMA 30

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 3h17min20seg?

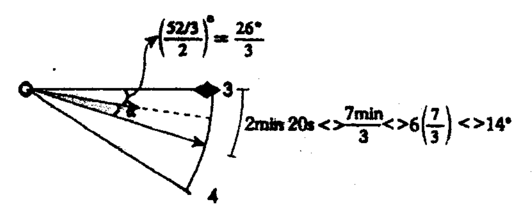
Resolución:

Sabe que: $20\text{ s} <> \left(\frac{1}{3}\right)\text{min}$

Luego: $17\text{ min} + \left(\frac{1}{3}\right)\text{min} <> \left(\frac{52}{3}\right)\text{min}$

Entonces: $3\text{h } 17\text{ min } 20\text{ s} <> 2\text{h}\left(\frac{52}{3}\right)\text{min}$

Graficando:



$\therefore\ \alpha = 14° - \frac{26°}{3} = \frac{16°}{3} = 5° + \underbrace{\frac{1°}{3}}_{20'} = 5°20'$

Observación:

Los problemas 29 y 30 pueden ser resueltos con mayor rapidez aplicando la relación aprendida en la parte teórica.

Para el problema 29:

Piden el ángulo formado a las 11:59

$\alpha = ??$

$h = 11$

$m = 59$

El horario ha pasado al minutero, por lo tanto aplicamos:

$$\alpha = 30H - \frac{11}{2}m$$

$$\alpha = 30(11) - \frac{11}{2}(59) = 330 - 324{,}5$$

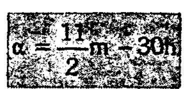
$$\therefore\ \alpha = 5{,}5°$$

Para el problema 30:

Piden el ángulo formado a las $3:\underbrace{17\text{min }20\text{s}}_{\frac{52\text{min}}{3}}$

$\alpha = ??$ $h = 3$ $m = \dfrac{52}{3}$

El horario no ha pasado al minutero, por lo tanto aplicamos:



$$\alpha = \frac{11}{2}m - 30h$$

$$\alpha = \frac{11}{2}\left(\frac{52}{3}\right) - 30(3) = \frac{16°}{3}$$

$$\therefore\ \alpha = 5° + \underbrace{\frac{1°}{3}}_{20'} = 5°\,20'$$

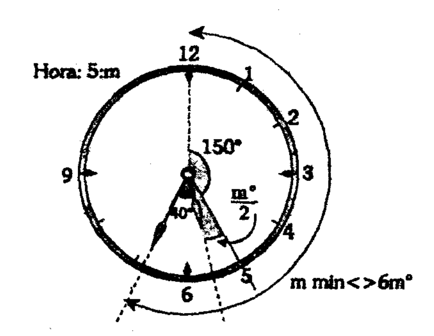
PROBLEMA 31

¿A qué hora, inmediatamente después de las 5:00p.m., las agujas de un reloj forman un ángulo de 40°, por segunda vez?

Resolución:

Observación:

La segunda vez que las agujas forman un ángulo de 40° ocurre cuando el minutero ha pasado al horario.



De la gráfica:

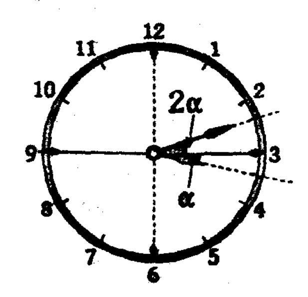
$$6m° = 150° + \left(\frac{m}{2}\right)° + 40°$$

$$\Rightarrow\ m = \frac{380\text{min}}{11} <> 34\text{ min } 32\frac{8s}{11}$$

$$\therefore\ \text{Respuesta: } 5\text{ h } 34\text{ min}\left(32\frac{8}{11}\right)\text{s}$$

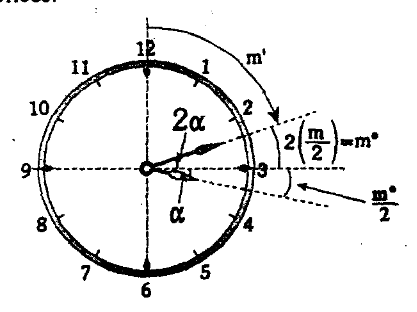
PROBLEMA 32

¿Qué hora indica el reloj de la figura?



Resolución:

Según la gráfica, son las 3 horas m minutos, entonces:



De la gráfica:

$6m° + m° = 90°$

$\Rightarrow m' = \frac{90\text{min}}{7} <> 12\text{min}\ 51\frac{3s}{7}$

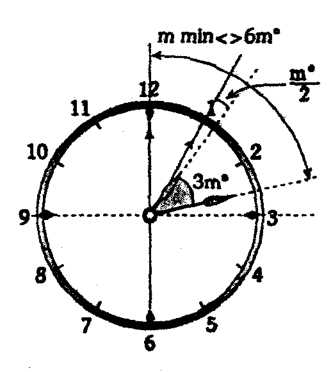
$\therefore$ Hora: $3\text{ h } 12' \left(51\frac{3}{7}\right)^s$

PROBLEMA 33

Son más de la 1, sin ser las 2 de esta tarde. Si el número de minutos transcurridos, a partir de la 1:00 p.m., es igual a la tercera parte del número en grados sexagesimales que adelanta el minutero al horario; ¿qué hora es realmente?

Resolución:

Hora :



De la gráfica:

$6m° = 30° + \frac{m°}{2} + 3m°$

$5m = 60 \Rightarrow m = 12$

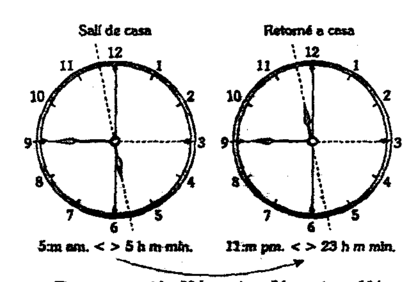
$\therefore$ Son la **1:12 p.m.**

PROBLEMA 34

Salí de mi casa muy temprano, entre las 5 y las 6 de la mañana. Al regresar, por la noche, me percaté que el minutero estaba en la misma posición que cuando salí y el horario estaba en sentido opuesto al de mi salida. ¿Cuánto tiempo estuve fuera de casa?

Resolución:

Vamos a comparar las posiciones de las agujas en ambos casos, según el dato, teniendo en cuenta que la aguja del minutero no tiene una posición determinada (la asumiremos entonces).



$\therefore$ Estuvo fuera de casa 18 horas.

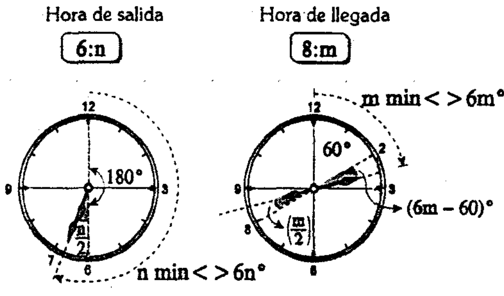
PROBLEMA 35

Tania, una persona muy organizada, planificó salir de compras cuando, entre las 6 y las 7 p.m., las agujas del reloj se encuentren superpuestas y retornar cuando, entre las 8 y las 9 p.m., las agujas del reloj se encuentren en sentidos opuestos. ¿Cuánto tiempo programó que iba a durar su salida?

Resolución:

Para saber cuánto duró su salida podemos hallar la hora de salida y la hora de llegada y, entre ellos, ver qué tiempo hay.

Entonces:



$6n = 180 + \frac{n}{2} \Rightarrow n = 32\frac{8}{11}$ $\qquad \frac{m}{2} = 6m - 60 \Rightarrow m = 10\frac{10}{11}$

Salió a las: $6{:}32\frac{8}{11}$ $\qquad$ Llegó a las: $8{:}10\frac{10}{11}$

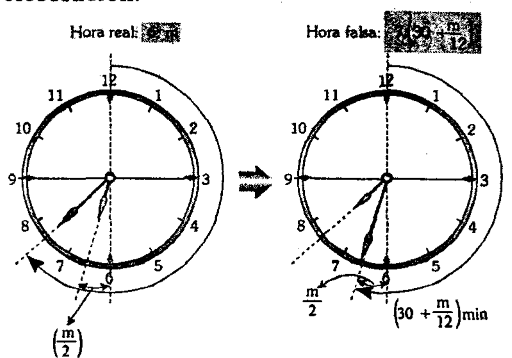
Para conocer qué tiempo programó su salida, restamos de la hora en que llegó, la hora en la que salió.

$\therefore$ Su salida duró $1\text{ h}\left(28\frac{2}{11}\right)$ min.

PROBLEMA 36

Al observar mi reloj confundí el minutero con el horario y el horario con el minutero, indicando así una hora que es 57 minutos más que la hora real. Si, en realidad, el horario está entre las 6 y las 7 y el minutero, entre las 7 y las 8. ¿Qué hora es en realidad?

Resolución:



luego:

$$7h + \left(30\,min + \frac{m\,min}{12}\right) - (6h + m\,min) = 57$$

$$1h + 30\text{ min} + \frac{11m}{12} = 57\text{ min}$$

$$\Rightarrow m = 36\text{ min}$$

$\therefore$ La hora real es 6: 36

PROBLEMA 37

Supongamos que en el planeta Leo, el día dura 16 "horas" y que cada "hora" tiene 45 "minutos". ¿Qué "hora" será en un reloj de este planeta, cuando un reloj de la Tierra marque las 6:20 p.m.?

Obs: Un día del planeta Leo es equivalente a un día del planeta Tierra.

Resolución:

Sabemos: 6:20' p.m. $<>$ $18\text{ h} + \frac{1}{3}\text{h} <> \frac{55}{3}\text{h}$

luego:

	Planeta Tierra		Planeta Leo
1 día	24h	——	16 horas
Tiempo Transcurrido	$\frac{55}{3}\text{ h}$	——	x

Planteando:

$$24\,\cancel{h}\,.\,x = \frac{55}{3}\cancel{h}\,.\,16\text{ h} \Rightarrow x = \frac{110}{9}\text{h} = 12\tfrac{2}{9}\text{ h}$$

Además:

Como 1 "hora" $<>$ 45 "minutos".

entonces $\frac{2}{9}$ "hora" $<>$ 10 "minutos"

$\therefore$ En el planeta Leo serán las 12:10

PROBLEMA 38

Un "nuevo" reloj tiene 40 "nuevas divisiones" y la circunferencia de dicho reloj mide 800 "nuevos grados" ¿Qué ángulo forman las agujas de dicho reloj (minutero–horario) cuando esté indicando las 20 "nuevas horas" y media?

Resolución:

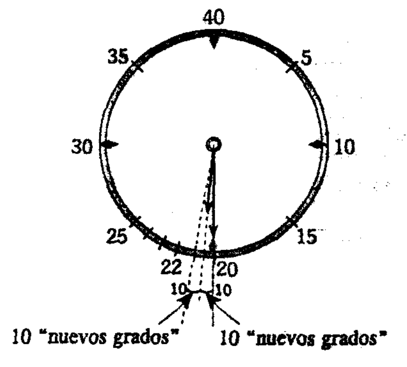
Según dato; la circunferencia del nuevo reloj presenta:

40 "nuevas horas" que equivalen a 800 "nuevos grados"

Entonces:

"1 nueva hora" <> $\frac{800}{40}$ = 20 "nuevos grados";

luego, el ángulo formado por las agujas, a las 20 horas y media, será:



∴ El ángulo que forma las agujas de dicho reloj es de 10 "nuevos grados".

PROBLEMA 39

Un reloj en lugar de tener 12 divisiones tiene 8 correctamente enumeradas y sus manecillas giran en sentido antihorario; ¿qué hora indicará este reloj cuando, en realidad, sean las 3:00 p.m.?

Resolución:

Sabemos que: 3p.m. < > 15 horas (tiempo transcurrido del día).

Calculemos las horas transcurridas en el reloj extraño de 8 divisiones.

	Reloj normal		Reloj extraño
1 día	24h	——	16 horas
Tiempo Transcurrido	15h	——	x

Planteando la ecuación:

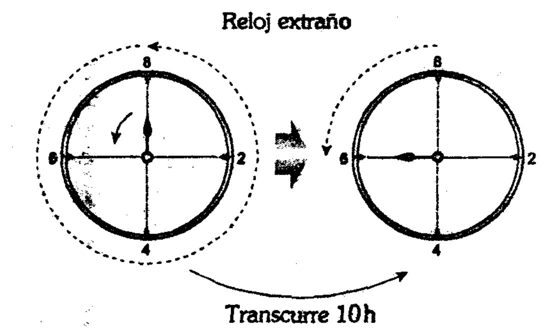
$24\not{h}\ x = 16 \text{ horas} . 15\not{h} \Rightarrow x = 10 \text{ horas}$

Es decir, en el reloj extraño, son 10 horas transcurridas.

El horario, al girar una vuelta entera (sentido antihorario), llegará a la marca de las 8; y para indicar 10 h transcurridas, recorrerá 2 horas más (en sentido antihorario) y llegará a la marca de las 6.

Ver el gráfico:

Reloj extraño

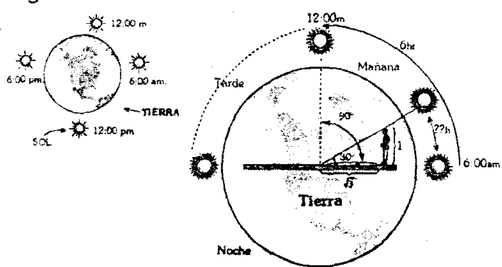


∴ Marca las 6:00 p.m.

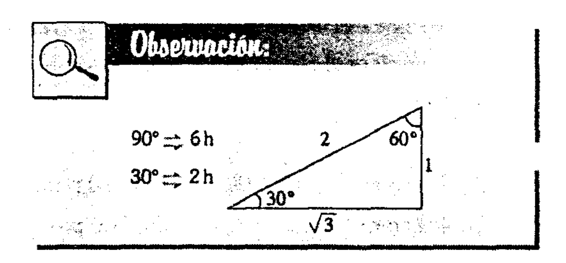
PROBLEMA 40

En una mañana soleada, un niño de 1 m de estatura, proyecta una sombra que mide $\sqrt{3}$ m. ¿Qué hora es en ese instante?

Resolución:
Teniendo como referencia el siguiente proceso en el gráfico:



Es decir, el Sol aparece en el horizonte a las 6a.m. y se oculta a las 6p.m.



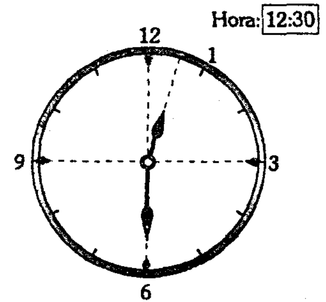
∴ Hora exacta = 6:00 a.m. + 2 h = 8:00 a.m.

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS INTRODUCTORIOS

- **El Sueño de Juan**
  Sólo durmió 40 minutos, ya que el despertador sonó a las 11:00, como estaba programado, entiéndase que el reloj despertador no distingue 11:00 p.m. y 11:00 a.m.

- **La hora perdida**
  Las manecillas se encuentran en una posición incorrecta, puesto que si el minutero indica 30 minutos, entonces, el horario debe estar entre los 12 y las 1 para ser las 12:30.

∴ Posición correcta:



- **El reloj de Manuel**
  Cuando se produce un corte de fluido eléctrico, es obvio que el reloj deja de funcionar. Cuando se restablece el fluido, el reloj nuevamente inicia su funcionamiento a partir de cero (0 horas) o 12:00. Esto ocurre en cualquier reloj despertador digital.
  En el problema, solamente habrá que restar, de la hora exacta (hora real), con la que el reloj está marcando parar saber a qué hora se produjo el corte.

∴ 10 p.m. − 6 h = 4 p.m.
o también: 22 h − 6 h = 16 h
= 4 p.m.

Problemas Propuestos

1. Si el duplo de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruplo de las que faltan para terminar el día; ¿qué hora será dentro de 4 horas?

   A) 8:00 p.m. B) 6:00 p.m. C) 7:20 p.m.
   D) 4:00 p.m. E) 9:00 p.m.

2. ¿Qué hora será dentro de 5 1/4 h, si se sabe que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en 5 horas por lo que falta transcurrir del día?

   A) 2:.20 p.m. B) 1:45 p.m. C) 3:25 p.m.
   D) 2:45 p.m. E) 3:20 p.m.

3. Son más de las 2, sin ser las 3 de esta madrugada; pero dentro de 40 minutos faltará, para las 4, el mismo tiempo que faltaba desde la 1 hasta hace 40 minutos. ¿Qué ángulo forman las agujas en este preciso instante?

   A) 85° B) 120° C) 95°
   D) 100° E) 105°

4. Son más de las seis, sin ser las ocho de esta mañana, y hace diez minutos los minutos que habían transcurrido desde las seis eran iguales a 1/9 del tiempo que faltará transcurrir hasta las ocho, dentro de diez minutos. ¿Qué hora es?

   A) 6:30 a.m. B) 7:20 a.m. C) 5:45 a.m.
   D) 8:10 a.m. E) 6:20 a.m.

5. Son más de las 4, pero aún no son las 6 de la tarde. Si el tiempo que había transcurrido, desde las 4 hasta hace 15 minutos, es igual a 1/5 del tiempo que faltará transcurrir hasta las 6, pero dentro de 15 minutos. ¿Qué hora es en este instante?

   A) 4:20 p.m. B) 4:30 p.m. C) 5:10 p.m.
   D) 3:20 p.m. E) 3:40 p.m.

6. Si fuera 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día los 5/7 de lo que faltaría si es que fuera 3 horas más temprano; ¿qué hora es?

   A) 7:00 a.m. B) 6:20 a.m. C) 6:00 a.m.
   D) 8:00 a.m. E) 7:14 a.m.

7. ¿Qué hora es?; para saberlo, basta con sumar la mitad del tiempo que falta para las doce del mediodía, más los 2/3 del tiempo transcurrido desde las doce de la noche.

   A) 7:12 a.m. B) 5:30 a.m. C) 9:10 a.m.
   D) 10:30 a.m. E) 7:20 a.m.

8. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 a.m. demora 6 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12 m.?

   A) 15 s B) 12 s C) 33/2 s
   D) 14 s E) 16 s

9. Una campana toca 3 campanadas en 7 segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar 7 campanadas?

A) 20 s B) 18 s C) 21 s
D) 19 s E) 22 s

10. La campana de un campanario tarda 5 segundos en tocar 3 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en un tiempo de 25 segundos?

A) 12 B) 13 C) 14
D) 10 E) 11

11. Un reloj indica la hora que es con igual número de campanadas. Para indicar que son las 5 emplea 8 s. Pepito se acuesta a una hora en que el reloj emplea 20 s en indicarla y se levanta al día siguiente, a una hora en que el reloj emplea 10 s para indicarla. ¿Cuántas horas duerme Pepito?

A) 8 h B) 6 1/2 h C) 6 h
D) 7 h E) 7 1/2 h

12. La campana de un reloj indica las horas con igual número de campanadas. Para indicar las n horas tarda 4 segundos. ¿Cuántas horas habrán transcurrido desde el instante en que empleó n segundos para indicarla, hasta el instante en que utilizó 2n segundos para indicar la hora?

A) $\frac{n^2+n}{2}$ B) $\frac{n^2-n}{4}$ C) $\frac{n^2-n}{2}$
D) $\frac{n^2+1}{4}$ E) $\frac{n^2+n-1}{4}$

13. El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 21 segundos, si se escucharon tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada, ¿cuánto tiempo empleará este campanario para tocar 7 campanadas?

A) 9 s B) 8 s C) 6 s
D) 10 s E) 7 s

14. En un paradero de microbuses hay un reloj que cada 3 minutos da 3 campanadas para indicar que el microbús siguiente debe partir a recorrer su ruta. Hace 1 minuto partió el primer microbús del día. ¿Dentro de cuántos minutos saldrá un microbús con el cual el número de campanadas dadas por el reloj, hasta ese momento inclusive, sean un total de 90?

A) 85 min B) 92 min C) 88 min
D) 87 min E) 89 min

15. Un reloj se adelanta 1 minuto cada 900 segundos. Si ahora marca las 4:20 y hace 8 horas que se adelanta; ¿cuál es la hora correcta?

A) 3:42 B) 4:12 C) 3:16
D) 3:48 E) 3:30

16. Un reloj se atrasa 4 minutos por día. Si el reloj marca las 6 a.m. (hora exacta) el 1ro. de febrero; ¿qué hora marcará al mediodía del 6 de febrero?

A) 11:39 a.m. B) 11:20 a.m.
C) 11:42 a.m.
D) 10:48 a.m. E) 12:18 a.m.

17. Un reloj que se atrasa 5 minutos en cada hora, es sincronizado hoy al mediodía (12m). ¿Qué tiempo, como mínimo, deberá transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

A) 6 días B) 9 días C) 7 días
D) 8 días E) 10 días

18. Dos relojes se sincronizan a las 8 a.m.; uno de ellos se adelanta 15 segundos cada cuarto de hora y el otro se atrasa 45 segundos cada hora. ¿Cuántos minutos estarán separados a las 8:00 p.m. los minuteros de los dos relojes?

A) 23 minutos B) 42 minutos
C) 18 minutos
D) 32 minutos E) 21 minutos

19. Dos relojes marcan la hora exacta a las 8:00 a.m. y, a partir de ese instante, uno comienza a adelantarse dos minutos por cada hora y el segundo, a atrazarse en el mismo ritmo. Luego de cuántas horas volverán a marcar la hora correctamente.

A) 300 h B) 240 h C) 350 h
D) 410 h E) 360 h

20. En el instante de comenzar un año no bisiesto, un reloj señala las 11 h 6min 4 s a.m. Se supone que va adelantando. Este reloj se atrasa: el primer día 4 segundos; el segundo día, 12 segundos; el tercer día, 20 segundos; y así sucesivamente. Al comenzar un día del año, el reloj marcará la hora exacta. ¿Cuál es ese día?

A) 11 abril B) 10 abril C) 21 marzo
D) 04 abril E) 11 mayo

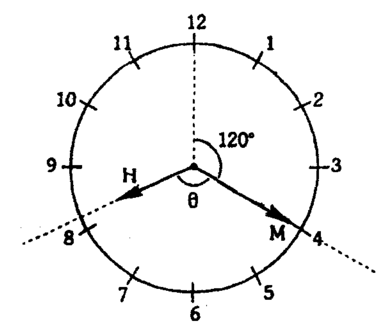
21. Carlos sale de la oficina y al marcar su tarjeta de salida ve que son las 6:25 p.m. Al llegar a su casa ve que en su reloj son las 8:15 p.m. Luego se entera que el reloj de su oficina estaba atrasado 12min y su reloj estaba adelantado 10 min. ¿Cuánto tiempo demoró de la oficina a su casa?

A) 1 h 30 min B) 1h 14min C) 1 h 28min
D) 2 h 28min E) 2 h 01 min

22. Un reloj se adelanta 3 minutos por cada hora que transcurre. ¿A que hora comenzó a adelantarse si dentro de 2 horas tendrá un adelanto de una hora y estará marcando las 10:37 p.m.?

A) 1:37 a.m. B) 1:35 a.m. C) 1:43 a.m.
D) 1:33 a.m. E) 1:40 a.m.

23. Hallar "θ" en el gráfico.



A) 120° B) 110° C) 130°
D) 142° E) 135°

24. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en cada caso?

I. 4:20 II. 6:18
III 12:01 IV. 8:17
V. 2:18'40"

	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
A)	10°	81°	6,5°	116,5°	42,7°
B)	12°	81°	5,5°	118,5°	42,7°
C)	12°	80°	5,5°	116,8°	42,7°
D)	10°	81°	5,5°	116,5°	42,7°
E)	10°	81°	5°	116,5	42°

25. Una persona al ver la hora, confunde el horario con el minutero y viceversa, y dice: Son las 4:42 . ¿Qué hora era realmente?

A) 8:24 B) 8:22 C) 8:27
D) 8:25 E) 8:26

26. ¿A qué hora, inmediatamente después de las 2:00 p.m., el minutero adelanta al horario, tanto como el horario adelanta a la marca de las 12?

A) 2:32 p.m. B) 2:28 p.m. C) 2:35 p.m.
D) 2:24 p.m. E) 2:40 p.m.

27. ¿A qué hora, después de las 3 a.m., el número de minutos transcurridos a partir de las 3 a.m. es igual al número de grados sexagesimales que adelanta el minutero al horario?

A) 3:20 B) 3:18 C) 3:48
D) 3:19 E) 3:28

28. Son las 12 del mediodía. Indicar el menor tiempo al cabo del cual el segundero será bisectriz del ángulo que las otras dos agujas forman.

A) 32,5 s B) 30" C) 31,20 s
D) 30,27s E) 30,5 s

29. ¿Cada cuánto tiempo las agujas del reloj se superponen?

A) 1 h 5min $27\frac{3}{11}$ s

B) 1 h 4min $13\ \frac{2}{1}$ s

C) 1h 5 min $32\frac{3}{11}$ s

D) 1h5 min $38\frac{5}{11}$ s

E) 1h 6 min $2\frac{3}{11}$ s

30. ¿A qué hora, entre las 4 y las 5 p.m., el minutero adelanta a la marca de las 9 tantos grados como los 3/4 del ángulo barrido por el horario desde las 4 en punto?

A) 4:36 p.m. B) 4:39 p.m. C) 4:40 p.m.
D) 4:47 p.m. E) 4:48 p.m.

31. Al mirar mi reloj confundí equivocadamente el minutero por el horario y viceversa, por lo cual tuve un adelanto de 55 minutos a mi cita. Si en la hora correcta el horario estuvo entre las 2 y las 3, ¿cuál era la hora incorrecta considerada?

A) 3h11 min $21\ \frac{9}{11}$s

B) 3h12min $21\ \frac{9}{11}$s

C) 3h13 min 2 s

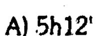
D) 1h11 min 23 s

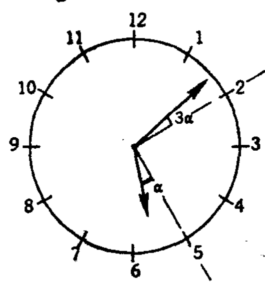
E) 4h14min21 s

32. Yamilet sale de su casa cuando, entre las 6 y las 7 de la noche, se superponen las agujas del reloj y regresa cuando, entre las 10 y las 11 de esa misma noche, las agujas del reloj forman un ángulo recto por primera vez. ¿Cuánto tiempo estuvo ausente?

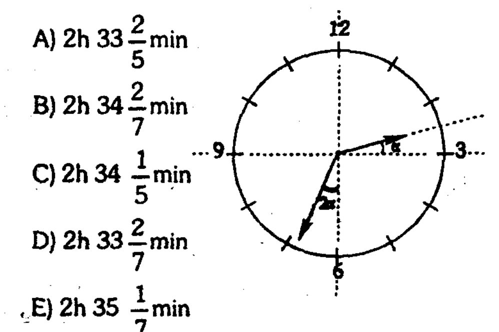
A) 3h 23min B) 4h 32min C) 4h 6min
D) 4h 42min E) 3h 48min

33. ¿Qué hora es, según el gráfico?

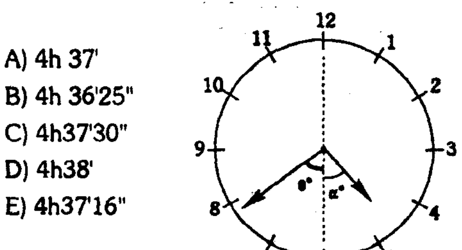

A) 5h12'
B) 5h09'
C) 5h06'
D) 5h07'
E) 5h08'



34. ¿Qué hora indica el reloj de la figura?



35. ¿Qué hora marca el reloj de la figura mostrada, sabiendo que $\theta° - \alpha° = 3{,}75°$?



36. Un reloj en vez de tener 12 divisiones tiene 9 y cada día la aguja que marca las horas sólo gira una vez en sentido horario alrededor de su eje. ¿Qué hora estará indicando este reloj cuando sean exactamente las 4:00 p.m.?

A) 7:00 B) 8:20 C) 6:30
D) 5:00 E) 6:00

37. Se construye un nuevo reloj cuya esfera se divide en 8 partes iguales. Cada "nueva hora" equivale a 40 "nuevos minutos"; y cada "nuevo minuto" equivale a 40 "nuevos segundos". Cuando sean realmente las 3:27' ¿qué hora marcará el nuevo reloj?

A) 2h 18min B) 2h 23min C) 2h 12min
D) 3h 14min E) 2h 32min

38. En una tarde soleada, un poste de 8 m de longitud proyecta una sombra de 6 m de largo. ¿Qué hora es en ese preciso instante?

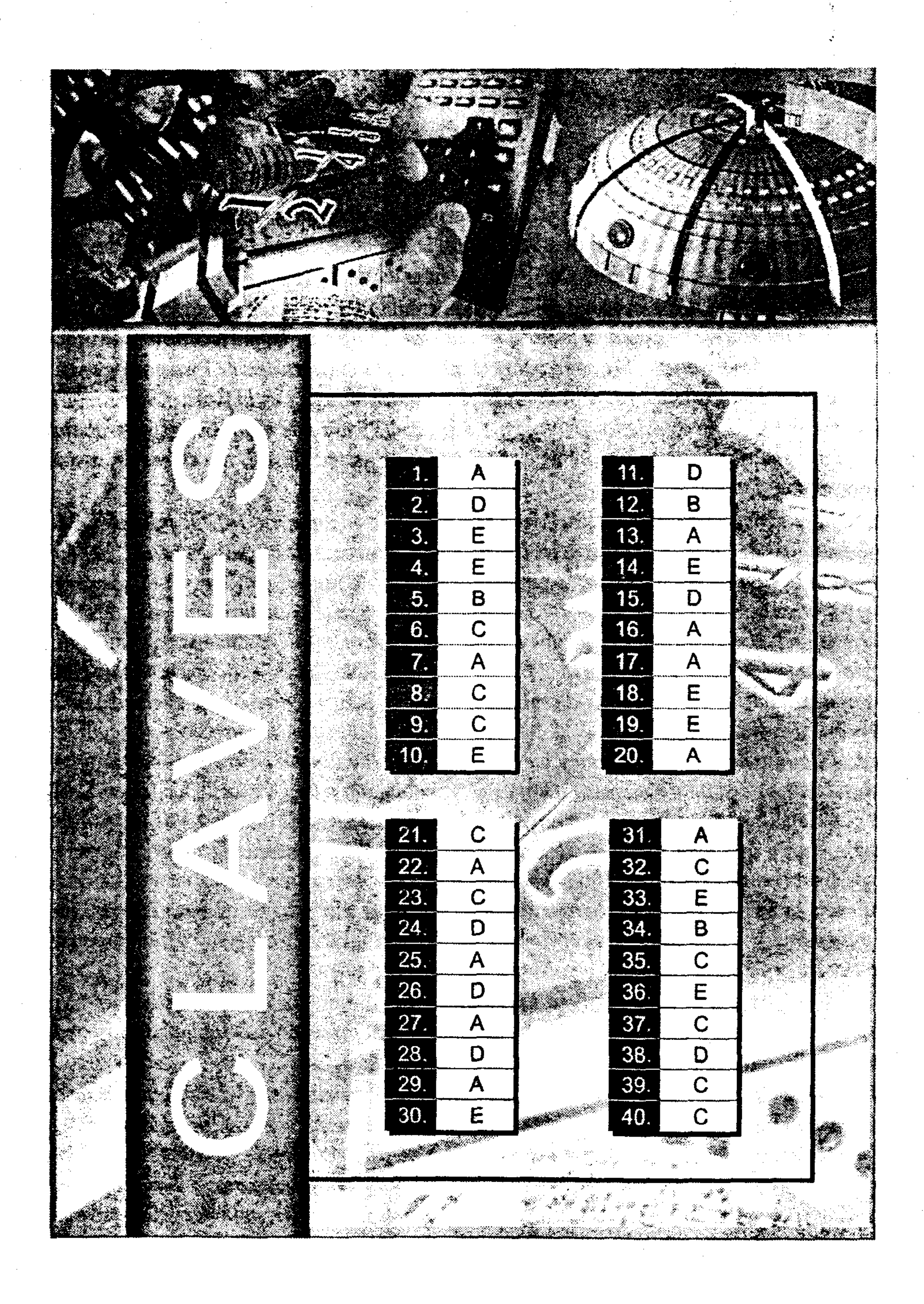
A) 2:14 p.m. B) 2:19 p.m.
C) 2:30 p.m.
D) 2:28 p.m. E) 3:05p.m.

39. Salí de mi casa, en la mañana, cuando las manecillas de un reloj, que da las horas con una campanada, formaba un ángulo de 180° y daba una campanada. ¿Cuántas campanadas sonaron en mi ausencia, si cuando volví en la noche del mismo día escuché una campanada y el ángulo que formaban las manecillas del reloj era de 90°?

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

40. En la tarde de un determinado día, un niño de 1 m de estatura proyecto una sombra de $\sqrt{3}$m. En ese instante, ¿cuál es el ángulo que forman las agujas del reloj?

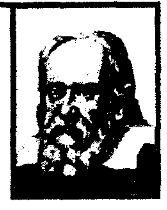
A) 100° B) 140° C) 120°
D) 60° E) 80°



CLAVES

1.	A	11.	D	21.	C	31.	A
2.	D	12.	B	22.	A	32.	C
3.	E	13.	A	23.	C	33.	E
4.	E	14.	E	24.	D	34.	B
5.	B	15.	D	25.	A	35.	C
6.	C	16.	A	26.	D	36.	E
7.	A	17.	A	27.	A	37.	C
8.	C	18.	E	28.	D	38.	D
9.	C	19.	E	29.	A	39.	C
10.	E	20.	A	30.	E	40.	C

Galileo Galilei



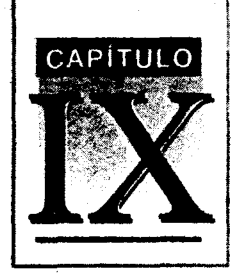
Nació en 1 564 en Pisa, Italia. Fue la primera persona en utilizar un telescopio para mirar el Sol, la Luna y los planetas, lo cual cambio, radicalmente, la ciencia astronómica. También es recordado por su contribución a la física. Murió en 1 642, a la edad de 77años.

En Pisa, Galileo tuvo un tutor en su casa. Después, cuando la familia se trasladó a Florencia, fue a la escuela en un monasterio. Como su familia no era rica, Galileo tenía que recibir una educación que le permitiera ganarse la vida por lo que su padre le mandó a la Universidad de Pisa para que estudiara Medicina aunque él estaba mucho más interesado en las matemáticas y en la física. Se marchó de Pisa sin haber terminado la carrera de Medicina, en 1 589; con 25 años de edad, empezó a trabajar como profesor de matemáticas, gran conocedor de la matemática griega clásica, dio clases de esta materia en la Universidad de Pisa.

Desde muy joven se intereso por la Mecánica y la Astronomía; en 1 609, fabricó un pequeño telescopio, después de haber oído algo acerca de este nuevo invento de los países Bajos. Al enfocarlo hacia el cielo, descubrió cuatro lunas que giraban alrededor de Júpiter, cráteres en la Luna, marchas en el Sol y anillos alrededor de Saturno. También observó que el planeta Venus tiene fases como la Luna. Eso sólo podía significar que giraba entorno al Sol, por lo que Galileo se convenció de que la Tierra y los demás planetas orbitaban al Sol. En ese tiempo, la Iglesia Católica creía que cualquier idea que apoyara que la Tierra no era el centro del universo iba en contra de las Escrituras. El libro que publicó el astrónomo Copérnico, en 1 543, planteando tal teoría, fue prohibido oficialmente por la Iglesia. El punto de vista de Galileo y los libros que escribió, iban a enfrentarle con la Iglesia, que en aquellos tiempos era muy poderosa. Galileo se vio obligado a decir, en público, que no estaba de acuerdo con Copérnico para evitarse torturas e incluso el ser ejecutado. A pesar de haber hecho esta declaración, nunca cambió su verdadera forma de pensar. Galileo también realizó otros experimentos científicos importantes. Uno de ellos demostraba que los objetos caen a la misma velocidad con independencia de su peso. Una anécdota cuenta que dejó caer distintos pesos desde la torre inclinada la Pisa para demostrarlo, aunque probablemente no sea cierto, Galileo continuó trabajando hasta sus últimos días, a pesar de ser muy viejo y estar prácticamente ciego.

***Christian Huygens** nació, en 1 629, en La Haya, Países Bajos. Gran matemático que mejoró el telescopio. Construyó el primer reloj que medía el tiempo con precisión y dedujo ideas importantes de cómo viaja la luz. Murió, en 1 695, a la edad de 66 años.*

Hacia 1 582, Galileo Galilei demostró la regularidad del movimiento del péndulo e incluso diseñó un péndulo experimental; pero este avance científico no tuvo traslación práctica, hasta 1 657, cuando el astrónomo holandés Christian Huygens construyó el primer reloj de péndulo, haciendo que el movimiento de éste controlara el movimiento de los mecanismos rotatorios. En 1 670, el inglés William Clement incorporó el péndulo largo o de segundos, y medio siglo después aparecieron en Alemania los primeros relojes de cuco. Por su parte, Huygens también creó, en 1675, el reloj compensado, cuyo mecanismo, basado en muelles de espiras, supuso un notable avance en la precisión horaria, puesto que obtenía un desface de dos minutos equilibrados y palancas.



FRACCIONES

"El ser humano es como una fracción: el numerador es lo que él realmente es y el denominador lo que él cree que es. Mientras más grande el denominador más pequeña es la fracción".

Lectura 9

¿Que es el número π ?

La manera más rápida de responder a esta pregunta es decir que π es el área de un círculo de radio 1u. (Por ejemplo, si el radio del círculo mide 1 cm, su área mide π cm). Podemos decir también que π es la longitud de una circunferencia de diámetro igual a 1.

Desde hace mucho tiempo (cerca de 4000 años!) se notó que el número de veces en que el diámetro está contenido en la circunferencia es siempre el mismo, sea cual sea el tamaño de esa circunferencia. dicho de otro modo, si el diámetro mide un centímetro, un metro, un codo, la circunferencia medirá respectivamente π centímetros, π metros o π codos.

Aún de otra manera: si una circunferencia tiene longitud C y diámetro D, mientras otra tiene longitud C' y diámetro D', entonces C/D = C'/D'. Este valor constante de la razón C/D es un número, aproximadamente igual a: 3,141592, el cual se representa por la letra griega π.

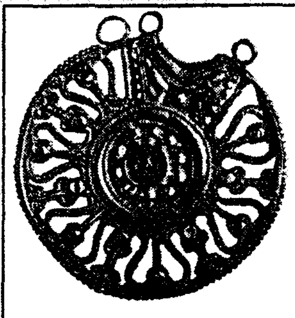
Ya los babilonios habían observado que el valor de π está comprendido entre:

$$3\frac{1}{8} \text{ y } 3\frac{1}{7}, \quad \text{o sea: } \frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$$

En fracciones decimales, esto da $3,12 < \pi < 3,142$

El conocimiento de las personas sobre el valor de π no siempre mejoró con el tiempo. Por ejemplo, el Viejo Testamento, que fue escrito cerca de 500 años a.n.e., aunque basado en tradiciones judaicas bastante más antiguas, contiene un fragmento según el cual $\pi = 3$ (Primer libro de los Reyes VI.:23), el valor 256/81 lo consigna el escriba egipcio Ahmes, autor del famoso papiro de Rhind, escrito 2 mil años a.n.e.

Desde Arquímedes, quien obtuvo el valor $\pi = 3,1416$, los matemáticos se han ocupado de calcular π con precisión cada vez mayor.



En este aro de la cultura Etrusca se aprecian dos circunferencias concéntricas y sus radios de lo cual deducimos su conocimiento de π.

El inglés William Shanks calculó π con 707 cifras decimales exactas en 1873. En 1947 se descubrió que el cálculo de Shanks tenía un error en la cifra 527 ª (y por lo tanto en las siguientes). Con el auxilio de una máquina manual, el valor de π fue, entonces, calculado con 808 cifras decimales exactas. Después vinieron las computadoras. Con su auxilio, en 1967, en Francia, se calculó π con 500.000 cifras decimales exactas y, en 1984, en los Estados Unidos, con más de diez millones de cifras decimales (exactamente 10 013 395 cifras decimales).

FUENTE : El mundo de la matemática Tomo III

FRACCIONES

Objetivos

1 *Desarrollar la capacidad de abstracción, en el uso de fracciones y de números decimales.*
2. *Familiarizar al lector en el manejo adecuado, vía operaciones matemáticas de las fracciones y números decimales, y sus múltiples aplicaciones.*
3. *Relacionar correctamente una cantidad respecto a otra con criterios de proporcionalidad.*
4. *Desarrollar la habilidad del lector para resolver problemas relacionados con el tema de fracciones.*

Introducción

La noción acerca de fracción es muy antigua y su remoto origen se pierde en la bruma de los tiempos. Se deriva del latín "fractum" que significa "roto" o "quebrado". En el transcurso de la lucha por la supervivencia, constantemente surgía el problema de repartir la presa capturada, entre una determinada cantidad de individuos dividir los productos agrícolas recogidos de forma mancomunada, aquí el surgimiento de las fracciones, acto que nace por necesidad.

Los textos matemáticos más antiguos que se han conservado hasta nuestros días, tales como las tablillas de arcilla en la antigua Babilonia de caracteres cuneiformes (Babilonía queda en la actualidad en Irak) y los papiros de Egipto antiguo, demuestran que ya en los siglos III y II a.n.e. existían símbolos para las fracciones los cuales se utilizaban como elemento de cálculo; los escribas, empleados de la administración del reino, eran los pocos que dominaban este arte considerado muy difícil en aquel tiempo.

Si nos fijamos en la forma antigua de escribir las fracciones, ésta varía de acuerdo a la civilización. Por ejemplo, para escribir una fracción en Egipto (1 800 a.n.e.), se representaba así:

$\frac{1}{3}$ = 𓂋III $\frac{1}{4}$ = 𓂋IIII

Con este peculiar sistema, resolvían los problemas de la vida diaria: distribución del pan, la medida de la tierra, construcción de pirámides, etc.

En Babilonia la fracción 1/2 se representaba mediante una copa hasta su mitad. En la antigua Grecia y el Imperio Romano, las fracciones se representaban usando letras del alfabeto latino: por ejemplo, los griegos escribieron: Ι Γ'' = 1/5 ΙΙ' =2/10 y como puede notarse, marcaban el numerador con una "tilde" y el denominador con dos o colocando el denominador como un exponente, aunque cabe señalar que los matemáticos griegos no consideraban a la fracción como número, sino como razones de "números" positivos. Lo que llamamos en nuestros días "cálculo de fracciones", se trataba por medio de proporciones, con su ayuda se explicaban tanto la simplificación como la amplificación de las fracciones. Solamente a fines de la antigüedad esta estrecha identificación del concepto de "número" con el de número natural fue parcialmente superado.

NÚMEROS RACIONALES

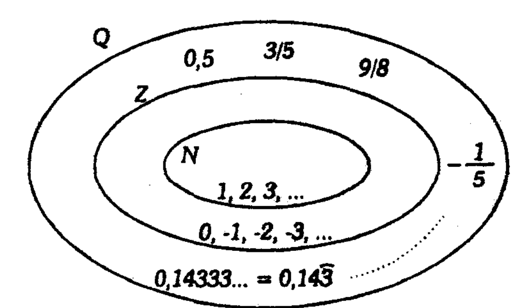
NOCIÓN

Al cociente de la división de dos números enteros "a" y "b" donde "b" es diferente de cero se le denomina **número racional**. El cociente puede ser un número entero y si no lo es puede quedar indicado en la representación del número racional. Luego bajo ias condiciones dadas en la noción; podemos representar un número racional así: $\frac{a}{b}$ ó a/b.

Observación:

Cuando escribimos $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$ y $a \in Z$; $b \in Z$) para representar a un número racional, estamos haciendo uso, como puede verse, de dos números. El primero es el número entero **a** sobre la línea horizontal que recibe el nombre de **numerador** y el segundo número entero, **b** ubicado bajo la línea, el cual se llama **denominador**. También hay otras formas de representar a un número racional.

Todos los números racionales (números enteros y fraccionarios, tanto positivos como negativos, y el cero) constituyen el conjunto de los **números racionales** denotado por Q.



$$Q = \{x/x = \frac{a}{b} \ \forall a, b \in Z \wedge b \neq 0\}$$

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \Big/ (a,b) \in Z \times Z^*\right\} \text{ donde: } Z^* = Z - \{0\}$$

¿Cuáles son las propiedades del conjunto Q?

El conjunto Q es infinito y cumple con las siguientes propiedades:

P_1 : Es un conjunto ORDENADO, pues dados dos números racionales **a** y **b** siempre es posible establecer si son iguales o si uno es mayor que el otro.

P_2 : Es un conjunto DENSO, pues dados dos números racionales distintos existe por lo menos un número racional entre ellos; es decir, siempre es posible encontrarlo. Por ejemplo:

Dados 3/4 y 4/5 entre ellos está la fracción 31/40. En efecto : $\frac{3/4 + 4/5}{2} = \frac{31}{40} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{31}{40} < \frac{4}{5}$

Luego, un conjunto A es denso con la relación de orden $\leq$, dados 2 elementos a y b de A, tales que $a<b$, existe un elemento $c \in A$, tal que $a < c < b$.

De lo anterior, podemos afirmar que entre 2 números racionales hay infinitos números racionales; pese a esto, los números racionales no cubren totalmente la recta real. Dichos vacíos serán cubiertos por los **números irracionales**.

Ejemplo:

$\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π, etc. son números irracionales.

P_3 : Son posibles las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de dos números racionales (salvo la división por cero). Cuando se dice que $\frac{a}{0}$ $(a \neq 0)$ es indeterminado, queremos dar a entender, que **no existe** un número racional **b** determinado que verifique la igualdad $b.0=a$, (para $a \neq 0$). Es así que se acostumbra escribir $\frac{a}{0} = \infty$, donde ∞ simboliza infinito, pero esto no implica que la división sea posible, pues ∞ NO ES UN NÚMERO. En realidad, lo que se pretende mostrar con esto es que si el denominador (divisor) se aproxima a cero, manteniendose el numerador (dividendo) constante, entonces el cociente crece indefinidamente (toma valores cada vez mayores) y tiende hacia el infinito, lo cual resulta una noción importante en matemática: la noción de límite :

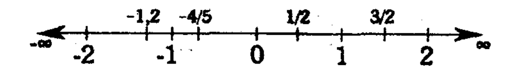
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a}{n} = 0$$

P_4 : Todo número racional se puede representar como una fracción decimal, exacta o periódica.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

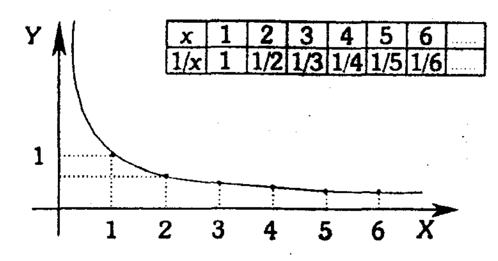
Ejemplo 1

Representación en la recta real:



Ejemplo 2

Representación en el plano cartesiano: $f(x) = \frac{1}{x}$; $x \in Z^+$



x	1	2	3	4	5	6	.....
1/x	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	.....

La línea curva recibe el nombre de **hipérbola**.

Ejemplos de pertenencia y de no pertenencia al conjunto Q:

- $\frac{9}{5} \in Q$
- $\frac{4}{3} \in Q$
- $\frac{-11}{13} \in Q$
- $\frac{-16}{4} \in Q$
- $3,\hat{7} \in Q$
- $\frac{\sqrt{5}}{3} \notin Q$
- $\pi \notin Q$
- $\frac{7}{2} \in Q$
- $\frac{5}{11} \in Q$
- $\frac{8}{-15} \in Q$
- $\frac{12}{6} \in Q$
- $0,3\widehat{45} \in Q$
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \notin Q$
- $e \notin Q$

NÚMERO FRACCIONARIO Y FRACCIÓN

Considerando el número racional a/b, daremos a continuación las nociones de número fraccionario y fracción.

NÚMERO FRACCIONARIO

Se denomina así a todos aquellos números racionales que no representan a números enteros. De acuerdo a la definición si denotamos por **f** al número fraccionario, tendremos:

$$f = \frac{a}{b} \text{ donde } a \neq \overset{\circ}{b};\ b \neq 0 \quad a \in Z \ \ b \in Z$$

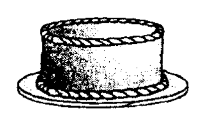
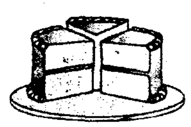
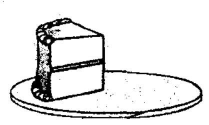
Ejemplo:

Son números fraccionarios: $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{-3}{7}$; $\frac{21}{8}$; $\frac{101}{19}$; $\frac{10}{13}$; $\frac{7}{-4}$; . . . . etc.

FRACCIÓN

Al número fraccionario que presente sus dos términos positivos vamos a denominarlo **fracción**.

¡Cuidado!, debemos aclarar que esta consideración es sólo con fines prácticos; pues para dar la idea de fracción, haremos uso de objetos reales. Por ejemplo, es usual regalar a un niño una torta en su cumpleaños; la cual supongamos que para nuestros fines tiene forma redonda.

Partimos la torta en 4 partes iguales y nos servimos una porción.

La torta será nuestra unidad y al principio estaba intacta, luego la partimos en cuatro partes iguales. Cada una de esas partes recibe el nombre de **fracción** de la torta.

Nos servimos: "**un cuarto**" de torta o simplemente: $\frac{1}{4}$ tomando así algo real; el número 1/4 esta representando una porción de la torta, los números fraccionarios de términos positivos pueden representar entonces "**porciones**" de objetos reales como: una torta; una madera; dinero; el contenido de u recipiente; un conjunto de personas; etc.

En el número $\frac{1}{4}$ el número **4** bajo la rayita es llamado **denominador** y representa el número de partes iguales en que ha sido dividida o partida la unidad (en este caso la torta). Mientras que el número **1** sobre la rayita es llamado **numerador** y nos indica el número de partes que estamos tomando de la unidad partida. Este número $\frac{1}{4}$ recibe pues el nombre **de fracción** y sus dos términos son positivos, es una clase especial de **número fraccionario**. Ahora si consideramos el número fraccionario $\frac{3}{-4}$ ¿podemos decir acaso que la unidad se puede partir en **–4** partes de la cuales tomamos 3?, pues no!. Por ello estamos conviniendo por comodidad, tanto para clasificar fracciones como para resolver problemas, que trabajaremos con dichos números cuyo numerador y denominador sean positivos.

Luego:

Denominaremos fracción a la expresión de la forma $\frac{a}{b}$ o a/b.

Donde: $a \neq \overset{\circ}{b}$; $a \in \mathbb{Z}^+ \wedge b \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

Según la noción dada, indicar cuales de los siguientes números son fracciones y cuales no lo son:

$$\frac{7}{-3} ; \frac{11}{e} ; \frac{8}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{5} ; \frac{72}{13} ; \frac{11111}{3395} ; \frac{-5}{9} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{e}{3} ; 1,101001000100001 \ldots, \frac{12}{6}$$

Resolución:

No son fracciones: $\frac{-5}{9} ; \frac{7}{-3} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{e}{3} ; \frac{11}{e} ; 1,101001000100001 \ldots, \frac{12}{6}$

si son fracciones: $\frac{8}{6} ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{5} ; \frac{72}{13} ; \frac{11111}{3395}$

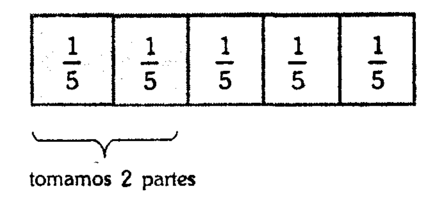
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FRACCIONES

Podemos usar gráficos para representar fracciones.

Ejemplo 1

Partimos una unidad cualquiera (podría ser una manzana, un chocolate, un pan, etc.) en cinco partes iguales y tomamos dos partes. Empleando un rectángulo que represente a dicha unidad, tendremos:

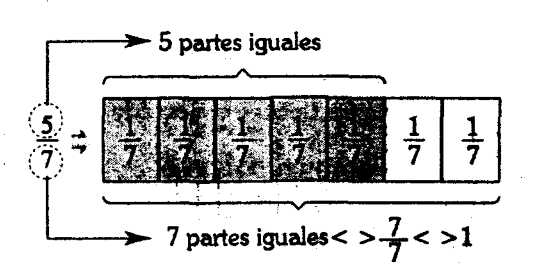
El todo <> 5 partes iguales



Con respecto al total, lo sombreado representará los dos quintos y escribiremos $\frac{2}{5}$

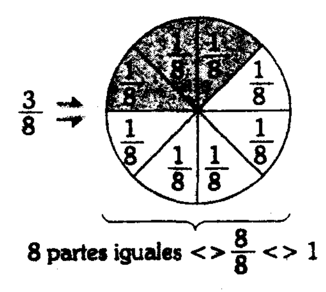
Ejemplo 2

La cuadra de un establo tiene siete cubículos y se ha limpiado cinco de ellos. Podemos decir que están aseados los $\frac{5}{7}$ de la cuadra. Así:



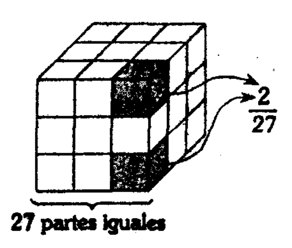
Ejemplo 3

Una pizza se ha partido en ocho partes y se ha echado salsa de tomate sobre tres porciones. Según los datos, la pizza quedaría expresada así:



Ejemplo 4

A un bloque cúbico de madera se hace 6 cortes rectos, resultando así 27 cubos más pequeños. Después, José ha seleccionado dos de ellos para un trabajo manual. Gráficamente sería:



Aplicación :

Ejemplo 5

En un salón de clase los 2/3 del total de alumnos son mujeres y los 3/5 de dicho total no usan lentes. Si el número de alumnos es el menor posible que cumple con estas condiciones indique cuántas mujeres usan lentes, si 2 de los que no usan son hombres.

Resolución:

Por tanto, las mujeres son:

$\frac{2}{3}$ del total

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

→ El total tiene tercera parte

Además los que usan lentes son:

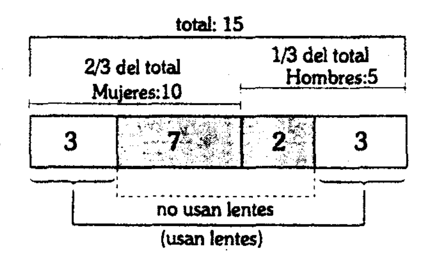
$\frac{3}{5}$ del total $\boxed{\frac{1}{5}}\boxed{\frac{1}{5}}\boxed{\frac{1}{5}}\boxed{\frac{1}{5}}\boxed{\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow$ El total tiene quinta parte

Deducimos que el total de alumnos debe ser un número con tercera y quinta parte y que sea el menor posible. Por lo tanto es MCM(3;5) =15.

Ahora, si el total es 15 alumnos, entonces los que no usan lentes serán: $\frac{3}{5}(15) = 9$

luego, graficamos:



Por lo tanto, el número de mujeres que usan lentes es 3.

OPERACIONES CON FRACCIONES

Las reglas para la resolución de las operaciones con fracciones datan de la época de Aryabhata y Brahmagupta (siglo VI y VII d.n.e. respectivamente). Un estudio más amplio y sistemático de las operaciones con quebrados lo ofrecieron los hindúes: Mahavira y Bhaskara (siglos IX y XII d.n.e., respectivamente) estas son las mismas que se emplean en la actualidad.

Se puede realizar todas las operaciones básicas conocidas: adición, sustracción, multiplicación, etc.

Ejemplo 1

Efectuar:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{9}{2} - \frac{1}{7}$

c) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ $\quad a ; b ; c ; d \in \mathbf{N}$

d) $\frac{3}{4} \times \frac{6}{15}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \sqrt{\frac{169}{16}}$

f) $\frac{4}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{10} \div \frac{9}{10}$

Resolución:

a) Efectuando en aspa

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2(5)+3(1)}{3\times 5} = \frac{13}{15}$$

b) $\frac{9}{2} - \frac{1}{7} = \frac{9(7)-2(1)}{2\times 7} = \frac{61}{14}$

c) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

d) $\frac{3}{4} \times \frac{6}{15} = \frac{\not{3} \times \not{6}}{\not{4} \times \not{15}} = \frac{3}{10}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{2^2}{5^2} \times \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{16}}$

$= \frac{4}{25} \times \frac{13}{4}$

$= \frac{13}{25}$

f) $\frac{4}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3}{10} \div \frac{9}{10}$

$\frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{\not{10}} \times \frac{\not{10}}{9}$

$\frac{8}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$

Ejemplo 2

Formula las expresiones A y B como una operación indicada entre dos fracciones.

$A = \frac{5}{7 \times 12}$ $\qquad$ $B = \frac{19}{7 \times 12}$

Resolución:

$A = \frac{5}{7 \times 12} = \frac{12 - 7}{7 \times 12} = \frac{1}{7} - \frac{1}{12}$

Entre estos factores hay una diferencia de 5 unidades, la cual aparece en el numerador de la misma.

$\therefore\ A = \frac{1}{7} - \frac{1}{12}$

$B = \frac{19}{7 \times 12} = \frac{12 + 7}{7 \times 12} = \frac{1}{7} + \frac{1}{12}$

$\therefore\ B = \frac{1}{7} + \frac{1}{12}$

Ejemplo 3

Calcule la inversa de A, si:

$A = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \div \frac{2}{7} + \frac{9}{5}$

Resolución:

$$\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\div\frac{2}{7}+\frac{9}{5}$$

$$\frac{2}{5}-\frac{8}{15}\times\frac{7}{2}+\frac{9}{5}$$

$$\frac{2}{5}-\frac{28}{15}+\frac{9}{5}=\frac{6}{15}-\frac{28}{15}+\frac{27}{15}=\frac{5}{15}<>\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

Luego, la inversa de **A** será 1/A

Así : $\frac{1}{A}=3$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Hay varios criterios para clasificar fracciones. A continuación estudiaremos las más conocidas:

1. POR LA COMPARACIÓN DE SU VALOR CON RESPECTO DE LA UNIDAD

Según sea la fracción mayor o menor que la unidad y de acuerdo a la relación entre sus términos, se clasifica en fracciones **propias** e **impropias**. Si $f=\frac{a}{b}$ es una fracción, entonces:

f es propia $\Leftrightarrow f<1$ $(a<b)$
f es impropia $\Leftrightarrow f>1$ $(a>b)$

Ejemplo:
Son fracciones propias :

$$\frac{2}{5};\frac{1}{3};\frac{11}{91};\frac{12345}{123456};\frac{3}{5};\frac{7}{9};\frac{13}{17};\ldots\ldots \text{etc.}$$

Ejemplo:
Son fracciones impropias :

$$\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{37}{9};\frac{45}{11};\frac{65}{21};\ldots \text{etc.}$$

Observación:

De las fracciones impropias se derivan los números mixtos.

Si $\frac{a}{b}$ es una fracción impropia, entonces por el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & C \end{array}$$ (C: entero)

$a=bC+r$

$\frac{a}{b}=C+\frac{r}{b}$ ($\frac{r}{b}$: f. propia)

Además, $C+\frac{r}{b}$ acostumbra expresarse como $C\frac{r}{b}$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=C+\frac{r}{b}=C\frac{r}{b}$$

Como podemos apreciar hemos obtenido la expresión $C\frac{r}{b}$ la cual se denomina **número mixto**, donde:

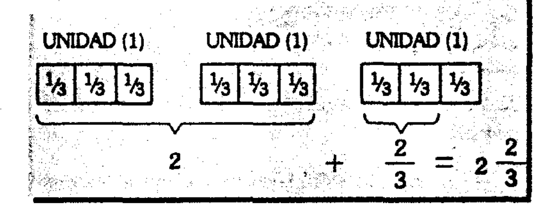
$C\frac{r}{b}$: C → parte entera; $\frac{r}{b}$ → parte fraccionaria

Ejemplo:

- $\frac{37}{9} = 4\frac{1}{9}$
- $\frac{45}{11} = 4\frac{1}{11}$
- $\frac{65}{21} = 3\frac{2}{21}$

Observación:

El número mixto $2\frac{2}{3}$ puede representarse gráficamente así:



2. POR SU DENOMINADOR

Se clasifica también las fracciones atendiendo al hecho de que los denominadores son o no potencias de 10.

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción :

I. Si: $b \neq 10^K \ \forall k \in Z^+$, entonces $f = \frac{a}{b}$ es denominada **fracción común u ordinaria**.

Ejemplo:

$\frac{3}{7}; \frac{11}{9}; \frac{2}{3}; \frac{9}{27}; \frac{11}{9}; \frac{25}{20}; \ldots\ldots$

II. Si: $b = 10^K \ \forall K \in Z^+$, entonces $f : \frac{a}{b}$ es denominada **fracción decimal**.

Ejemplo:

$\frac{11}{100}; \frac{9}{10}; \frac{21}{1\,000}; \frac{121}{100}; \frac{40}{10\,000}; \ldots\ldots$

3. POR RAZÓN DE IGUALDAD O DESIGUALDAD ENTRE SUS DENOMINADORES

Considerando aquí solamente a las fracciones ordinarias podemos clasificarlas en homogéneas o heterogéneas de acuerdo a la relación de igualdad o desigualdad entre sus denominadores, respectivamente.

A. Fracciones homogéneas

Dadas dos o más fracciones comunes, el grupo de ellas será llamado fracciones homogéneas cuando todas tengan el mismo denominador.

Ejemplos:

$\frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{11}{7}; \frac{9}{7}; \frac{41}{7};$

$\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{7}{9}$

B. Fracciones heterogéneas

Si tenemos dos o más fracciones ordinarias y observamos que al menos una de ellas tiene un denominador distinto a los denominadores de las demás fracciones, entonces al conjunto de ellas se les denominará fracciones heterogéneas.

Ejemplos:

$\frac{3}{5}; \frac{4}{3}; \frac{7}{5}; \frac{6}{11}; \frac{9}{2};$

$\frac{3}{7}; \frac{9}{8}; \frac{5}{8}; \frac{1}{8}; \frac{1}{13}; \frac{4}{7}$

Observación:

1. Considerando un conjunto de fracciones homogéneas; será mayor aquella fracción que tenga el mayor numerador.

   Ejemplo:

   $\frac{7}{15}; \frac{11}{15}; \frac{3}{15}; \frac{8}{15}$; la fracción mayor es: $\frac{11}{15}$

2. Si tenemos un conjunto de fracciones que presentan numeradores iguales, entonces la mayor será aquella que tenga el menor denominador.

   Ejemplos:

   $\frac{8}{11}; \frac{8}{15}; \frac{8}{5}; \frac{8}{7}$ la mayor será $\frac{8}{5}$ pues tiene el menor denominador.

4. POR LOS DIVISORES DE SUS TÉRMINOS

Los términos de una fracción (el numerador y el denominador) pueden tener divisores comunes o no. Según esto ocurra, las fracciones se clasificarían en **reductibles** o en **irreductibles**, respectivamente. Veamos:

Sea: $f = \frac{a}{b}$ una fracción. Si a y b son primos entre sí, entonces **f** será fracción irreductible pero en caso contrario **f** será reductible (o reducible).

Ejemplo:

Fracción reductible:

$\frac{6}{12}; \frac{9}{27}; \frac{18}{30}; \frac{8}{6}; \frac{12}{16}; \frac{10}{15}$

Fracción irreductible:

$\frac{2}{3}; \frac{7}{5}; \frac{11}{2}; \frac{4}{9}; \frac{123}{170}; \frac{401}{11}$

Observación:

1. Si $f: \frac{a}{b}$ es una fracción reductible ⇒ MCD (a,b)=d con $d \neq 1$

   Luego:

   $f = \frac{dp}{dq}$ donde $\frac{p}{q}$ es irreductible (p y q son primos entre sí). Esto quiere decir que al simplificar las fracciones reductibles, obtenemos finalmente una **fracción irreductible**. Se dice entonces que la fracción original (la que empezó a simplificarse) es una fracción equivalente a la que se obtuvo por simplificación. Así por ejemplo:

   Al simplificar $\frac{18}{24}$ queda $\frac{3}{4}$ luego $\frac{3}{4}$ y $\frac{18}{24}$

   Son fracciones equivalentes.

2. A partir de una fracción irreductible podemos obtener una infinidad de fracciones equivalentes a ella.

5. FRACCIONES EQUIVALENTES

Se dice que dos fracciones son equivalentes cuando con términos distintos expresan la misma porción de la unidad.

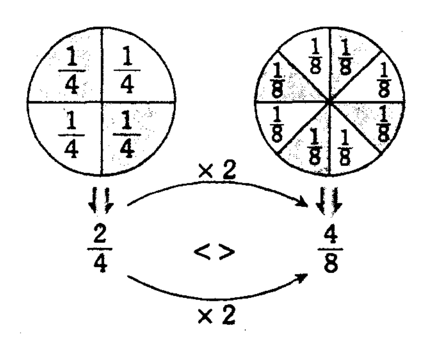
Escribimos : $\frac{a}{b} <> \frac{c}{d}$ y decimos: "La fracción $\frac{a}{b}$ es equivalente a la fracción $\frac{c}{d}$"

$$\frac{a}{b} <> \frac{c}{d} \quad \text{Si: } \left.\begin{matrix} c = a \times K \\ d = b \times K \end{matrix}\right\} K \in \mathbb{Z}^+$$

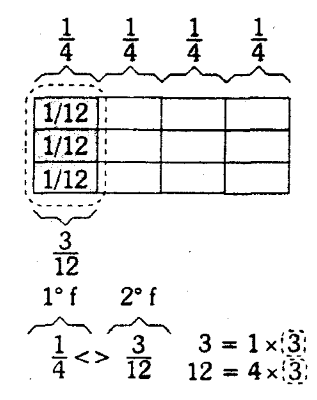
$$\Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a \times K}{b \times K} \quad \text{siendo } \frac{a}{b} \text{ irreductible}$$

Gráficamente:

Ejemplo 1



Ejemplo 2



Se aprecia que en el ejemplo 2, el numerador 3 y el denominador 12 de la segunda fracción se obtiene al multiplicar el numerador 1 y el denominador 4 de la primera fracción por un mismo número. En este caso, dicho número es 3.

De acuerdo con lo último, se dice que una fracción común es equivalente a otra, si sus términos resultan de la multiplicación de los términos respectivos de esta última por un mismo número entero positivo.

Observación:

Hemos usado el símbolo <> el cual se lee como **es equivalente a** para denotar que dos fracciones son equivalentes. Sin embargo, se tiene la costumbre de escribir $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ siendo esto, matemáticamente, incorrecto. Debe escribirse $\frac{3}{4} <> \frac{6}{8}$. Ahora, toda fracción común es igual y **equivalente a sí misma**. Esto no quiere decir que si dos fracciones comunes son equivalentes, implica que las dos fracciones sean iguales. En el ejemplo dado 3/4 y 6/8 son **fracciones equivalentes** pero NO fracciones iguales.

Para que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, debe cumplirse que:

$$a=c \;\; y \;\; b=d.$$

Recuerda:

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{fracción irreductible}} <> \underbrace{\frac{a \times K}{b \times K}}_{\text{fracción equivalente}} \qquad K = 1;\ 2;\ 3; \ldots$$

Ejemplo 3

Halle la fracción equivalente a $\frac{8}{36}$ tal que la suma de sus términos sea 110.

Resolución:

$$f: \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{9}{\cancel{36}}} \Rightarrow f_{EQ} = \frac{2k}{9k}$$

Por dato $2k + 9k = 110$

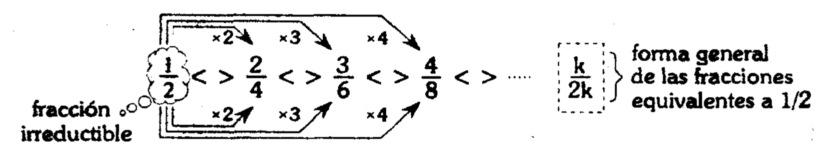
$\therefore\ k = 10$

luego : $f_{EQ} = \frac{2(10)}{9(10)} = \frac{20}{90}$

Ejemplo 4

Indica tres fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$

Resolución:



$\therefore$ Las fracciones equivalentes pedidas serán: $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$

Ejemplo 5

Halle una fracción equivalente a $\frac{12}{32}$, si la suma de sus términos es 55.

Resolución:

Tenemos $f: \frac{12}{32}$ y queremos hallar una fracción equivalente a ella, tal que la suma de sus términos sea 55. En principio, la fracción que nos dan como dato **debe ser irreductible**.

¿Acaso $\frac{12}{32}$ es irreductible? Pues no, no lo es.

Entonces, tiene que simplificarla, hasta hacerla irreductible, así: $\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{32}_{8}}$ y nos queda: $\frac{3}{8}$ luego, f: $\frac{3}{8}$

$\Rightarrow f_{EQ} = \frac{3K}{8K}\ \forall K \in Z^+$

Condición: $3K + 8K = 55 \rightarrow K = 5$

Luego, la fracción buscada es $f_{EQ} = \frac{3(5)}{8(5)} = \frac{15}{40}$

La fracción equivalente a $\frac{12}{32}$, tal que la suma de sus términos sea 55, es la fracción: $\frac{15}{40}$

Ejemplo 6

Halle la fracción equivalente a $\frac{6}{4}$ tal que la suma de sus términos sea 35.

Resolución:

$f: \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}} < > \frac{3}{2} \rightarrow f_{EQ} = \frac{3K}{2K}$

Condición $3K + 2K = 35 \quad K = 7$

$\therefore f_{EQ} = \frac{3(7)}{2(7)} = \frac{21}{14}$

Ejemplo 7

Halle la fracción equivalente a 2/3, tal que la suma de sus términos sea 650.

Resolución:

$f: \frac{2}{3} \rightarrow f_{EQ}: \frac{2K}{3K}$

Condición: $2K + 3K = 650 \rightarrow K = 130$

Reemplazando y efectuando: $f_{EQ} = \frac{260}{390}$

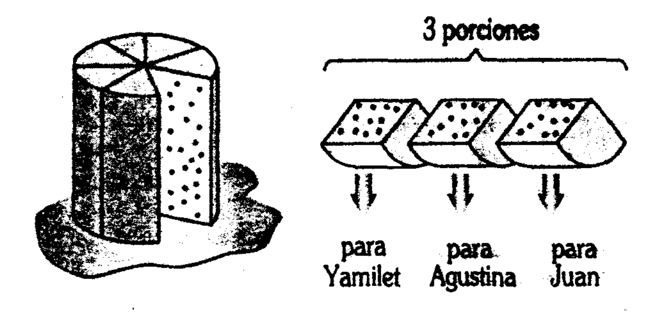
FRACCIÓN DE FRACCIÓN

En la vida diaria es común encontrarnos en situaciones en las que habiendo tomado una porción de la unidad nos vemos en la necesidad de reducir a partes menores de la porción considerada, tenemos por lo tanto una noción práctica de lo que es fracción de fracción. Consideremos el siguiente ejemplo :

Papá compró un panetón y lo partió en 7 partes iguales.

Yamilet recibió una de las partes y ella a su vez la dividió en 3 porciones iguales quedándose con una y compartiendo el resto con Agustina y Juan.

Respecto del total, ¿cuánto recibió Agustina?



Resolución:

Aquí el panetón es nuestra unidad, el cual va a dividirse en 7 partes iguales. Al tomar una de las porciones podríamos considerarlo como una **nueva unidad**. Luego la porción que recibe Yamilet es para ella una **nueva unidad** la cual ha de compartir con Agustina y Juan partiendo su porción en 3 partes iguales. De acuerdo a esto puede darse el siguiente dialogo:

Yamilet : "La porción del panetón que recibí, la partí en 3 partes iguales; cada una de ellas constituyen un tercio de la misma; es decir, cada una de ellas es un tercio de un séptimo del panetón".

Agustina: "Es verdad. Si partes en 3 cada uno de los demás pedazos, tendrás en total 7×3=21 pedazos; y como recibí 1 pedazo del total puedo decir que recibí $\frac{1}{21}$ de este. ¿No es cierto Juan?"

Juan : "Claro, a ti te tocó $\frac{1}{21}$ del total"

Bien, ahora sistematizamos toda la información.

Calcularemos, un tercio de un séptimo de la unidad, lo cual se escribirá así:

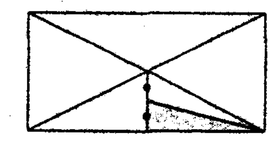
$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{7} \text{ de } 1 \;<\;>\; \frac{1}{21} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} \times 1$$

¿Qué papel esta cumpliendo la proposición **de**, que están escritas entre las fracciones?

Si te das cuenta, cada una de ellas denota multiplicación. Análogamente, la misma operación denota **de los**, **de las** y **del**.

Ejemplo 1

Indique la fracción de fracción que representa la región sombreada.



Resolución:

La región sombreada representa:

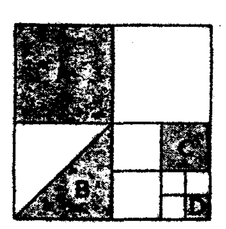
$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total, es decir:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{16}$$

Ejemplo 2

Se muestra un cuadrado en la que cada división genera partes iguales.

Señale, en forma de fracción, cada una de los secciones indicadas.



Resolución:

- Si observas atentamente notarás que A es la cuarta parte del total.

  $\therefore$ A es $\frac{1}{4}$ de $1 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

- La región triangular B es:

  $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{8}$

La región C representa:

$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ del total : $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{16}$

- La región D es:

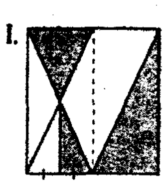
  $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$ del total: $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times$

  $= \frac{1}{64}$

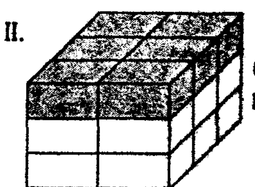
EJERCICIOS

Indique para cada caso en forma de fracción de fracción lo que representan las partes sombreadas respecto del total.

I.

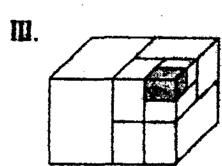


II.



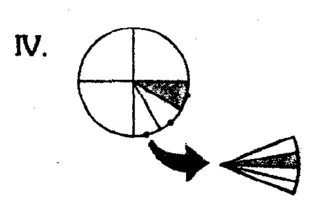
Cada división genera partes iguales.

III.



Cada división genera partes iguales.

IV.



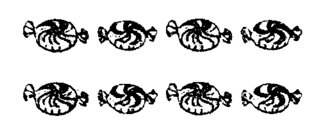
RELACIÓN PARTE TODO

Es común encontrarnos a veces con preguntas como: ¿Qué parte de la botella de chicha te has bebido? ¿Qué parte del premio te tocó? ¿Qué parte de tu dinero se llevaron? ¿Qué parte me dejaste? etc.

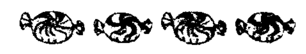
Éste es el resultado de una simple comparación de objetos de igual o diferente clase.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ana tiene 8 caramelos de diferentes sabores



Claudia tiene 4 caramelos



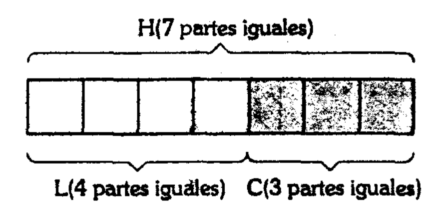
Tomando como referencia y comparando los caramelos de Ana y Claudia, podríamos interpretarlo así: "De lo que tiene Claudia, ¿qué parte representa de los caramelos de Ana?" La respuesta sería la mitad $\left(\frac{1}{2}\right)$, cuyo producto es la comparación de 4 y 8 ó $\left(\frac{4}{8}\right)$

Ahora, resolveremos un ejemplo del cual extraeremos una conclusión muy interesante y útil.

Ejemplo 1

Observe la siguiente representación:

Hemos partido una barra de helado **(H)** confeccionada de chocolate (C) y leche (L) en 7 partes iguales.



Podríamos hacernos entonces algunas preguntas como las siguientes:

a) ¿Qué parte del helado representa la porción de leche?
b) El chocolate, ¿qué porción es respecto del helado?
c) ¿Qué fracción es el chocolate respecto de la porción de leche?
d) ¿Qué fracción respecto del chocolate representa la parte que es leche?
e) El helado, ¿qué fracción representa respecto de la porción de leche?
f) ¿Qué fracción del chocolate es el helado?

Bien, resolveremos estas preguntas ateniéndonos a un criterio lógico para luego deducir una relación general y adecuada, veamos:

Resolución:

a) ¿Qué parte de H es L ?

Se nota que la porción de leche es 4 partes de un total de 7, esto se puede representar de la siguiente manera.

$$\frac{\text{Leche}}{\text{Helado}} \rightarrow \frac{4}{7}$$

$\therefore$ La porción de leche es $\frac{4}{7}$ del helado.

Nota que la base de comparación es todo el helado con respecto al cual estamos comparando la porción de leche.

b) C, ¿qué porción es de H ?

Análogamente a la pregunta anterior diremos:

$$\frac{\text{chocolate}}{\text{helado}} \rightarrow \frac{3}{7}$$

$\therefore$ La porción de chocolate es $\frac{3}{7}$ del helado.

c) ¿Qué fracción es C de L?

Ahora, estamos comparando la porción de chocolate con la porción de leche. El texto pregunta: "¿Qué fracción es C de L?", es como decir: "Qué parte es C respecto de la porción de leche? luego como la porción de chocolate es 3 partes y la porción de leche es 4 partes, el chocolate será 3 partes, respecto de las 4 partes de leche:

Es decir: $\dfrac{\text{chocolate}}{\text{leche}} \begin{matrix} \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \end{matrix}$

∴ La porción de chocolate representa los $\dfrac{3}{4}$ de la porción de leche.

d) ¿Qué fracción de C es L.

Podríamos interpretarlo como.

¿Qué parte del chocolate es la porción de leche?, y aquí la porción de chocolate será nuestra base de comparación con respecto a la cual trabajaremos.

Luego: $\dfrac{\text{leche}}{\text{chocolate}} \begin{matrix} \rightarrow 4 \\ \rightarrow 3 \end{matrix}$

∴ La porción de leche representa los $\dfrac{4}{3}$ respecto de la porción de chocolate.

e) ¿H qué fracción es de L?

Esto es equivalente a preguntar:

¿Qué fracción, o parte, representa el helado respecto de la porción de leche?.

Por lo expuesto lineas atrás ya puedes identificar cual es nuestra base de comparación, cierto?;

Entonces coincidiremos en decir que dicha base de comparación es la porción de leche respecto de la cual estamos considerando el helado, luego:

$$\dfrac{\text{helado}}{\text{leche}} \begin{matrix} \rightarrow 7 \\ \rightarrow 4 \end{matrix}$$

∴ El helado representa $\dfrac{7}{4}$ de la porción de leche.

f) ¿Qué fracción de C es H?

Al preguntar ¿Qué fracción de C? o también ¿Qué parte de C? . . . ?

Notamos que la base de comparación es la porción de chocolate y con respecto a esta comparamos el helado así:

helado → 7 partes

chocolate → 3 partes

Luego: $\dfrac{H}{C} = \dfrac{7}{3}$

∴ El helado representa 7/3 de la porción de chocolate.

Ahora ya podemos establecer la siguiente:

Conclusión:

En la relación Parte – Todo se establece:

$$f = \dfrac{\text{lo que hace de parte}}{\text{lo que hace de todo}}$$

Ejemplo 2

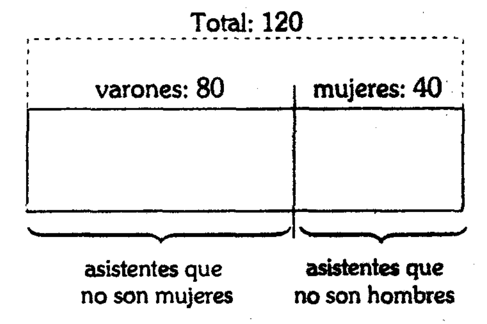
Pregunta	**Respuesta**
• ¿Qué parte de 27 es 9?	$\dfrac{9}{27} <> \dfrac{1}{3}$
• ¿Qué fracción de b es c?	$\dfrac{c}{b}$
• ¿M representa que fracción de N?	$\dfrac{M}{N}$
• ¿Q qué fracción representa respecto de P?	$\dfrac{Q}{P}$
• ¿Qué fracción es 24 respecto de 60?	$\dfrac{24}{60} <> \dfrac{2}{5}$
• ¿Qué fracción es a respecto de b?	$\dfrac{a}{b}$
• ¿Qué fracción es b respecto de a?	$\dfrac{b}{a}$
• ¿Qué parte representa 11 de 33?	$\dfrac{11}{33} <> \dfrac{1}{3}$

Ejemplo 3

En una reunión hay 120 personas las cuales 80 son varones. ¿Qué fracción representan los que no son hombres respecto de los que no son mujeres?

Resolución:

Observa el siguiente esquema:



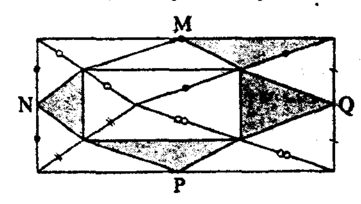
Luego:

$$\frac{\text{Asistentes que no son hombres}}{\text{Asistentes que no son mujeres}} = \frac{40}{80} <> \frac{1}{2}$$

Entonces, la fracción que representan los que no son hombres respecto de los que no son mujeres es: $\frac{1}{2}$

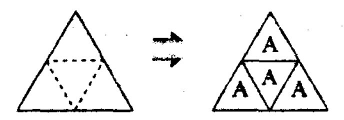
Ejemplo 4

¿Qué fracción representa el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada, si M, N, P y Q son puntos medios?

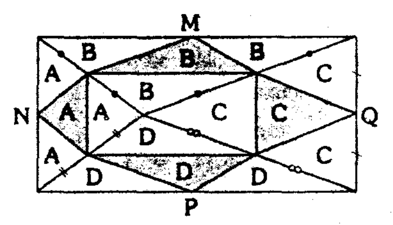


Resolución:

Recordemos que cuando unimos los puntos medios de los lados de un triángulo cualquiera se forman cuatro regiones equivalentes; es decir, que tiene la misma área, veamos:



De acuerdo a esta propiedad planteamos:



Región sombreada: A + B + C + D

Región no sombreada : 3(A + B + C + D)

$$\therefore \frac{R.S}{R.N.S.} = \frac{1\cancel{(A+B+C+D)}}{3\cancel{(A+B+C+D)}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 5

Nano observa que en una fiesta, 10 parejas están bailando, 10 mujeres están sentadas y el número total de personas es 50. Entonces:

I. ¿Qué fracción representa el número de hombres respecto del número de mujeres?

II. ¿Qué parte son los que bailan respecto del total?

III. ¿Qué fracción representa el número de hombres respecto del número de personas que bailan?

IV. ¿Qué parte son las mujeres que bailan respecto de las mujeres que no bailan?

Resolución:

De acuerdo con los datos, podemos utilizar el **diagrama de Carroll** para resolver el problema, dicho diagrama sirve para representar y relacionar conjuntos disjuntos.

Como el conjunto de hombres y de mujeres son disjuntos; y también lo son el conjunto de los que bailan y de los que no bailan, tendremos:

	hombres	mujeres	Total
bailan	10	10 →	20
no bailan	20	10 →	30
			50

I. Parte → $\dfrac{\text{\# de hombres}}{\text{\# de mujeres}} = \dfrac{30}{20} <> \dfrac{3}{2}$ ← Todo

II. Parte → $\dfrac{\text{\# los que bailan}}{\text{\# total de asistentes}} = \dfrac{30}{50} <> \dfrac{2}{5}$ ← Todo

III. Parte → $\dfrac{\text{\# de hombres}}{\text{los que bailan}} = \dfrac{30}{20} <> \dfrac{3}{2}$ ← Todo

IV. Parte → $\dfrac{\text{\# de mujeres que bailan}}{\text{\# de mujeres que no bailan}} = \dfrac{10}{10} <> 1$ ← Todo

Luego : ambos conjuntos tiene igual cantidad de elementos

Ejemplo 6

¿Qué fracción representan los asistentes que no son hombres respecto de los que son hombres, en una reunión de 60 personas donde 1/5 son mujeres?

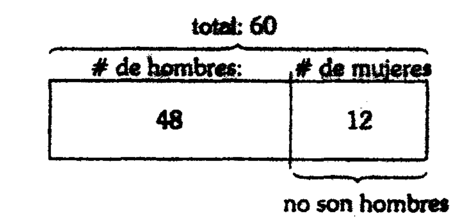
Resolución:

Ya que el total de asistentes es 60

→ # de mujeres: $\frac{1}{5}(60) = 12$

Luego # de hombres: $60 - 12 = 48$;

grafiquemos:



Entonces:

$$\frac{\text{\# de asistentes que no son hombres}}{\text{\# de asistentes que son hombres}} = \frac{12}{48} <> \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, los asistentes que no son hombres representan 1/4 de los asistentes que son hombres.

GANANCIAS Y PÉRDIDAS SUCESIVAS

Si consideramos una cantidad como unidad, es posible que se pierda o gane una parte (fracción), con respecto a ésta. Quedando entonces disminuida o aumentada nuestra cantidad inicial. Empleando lo aprendido hasta aquí, podemos representar en forma fraccionaria el resultado de dicho aumento o disminución. En los dos cuadros adjuntos, damos ejemplos que ilustran la situación teórica.

Pierdo	Queda
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{8}{11}$
⋮	⋮
$\frac{m}{n}$	$\frac{n-m}{n}$

Gano	Tengo
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{11}{13}$	$\frac{24}{13}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$
⋮	
$\frac{p}{q}$	$\frac{p+q}{q}$

Observación:
La fracción que se va perdiendo debe ser una fracción propia, es decir, menor que uno, pues de lo contrario se estaría perdiendo más de la unidad, lo que significa perder más de lo que se tiene:

$$\left(\frac{m}{n} < 1\right)$$

Seguidamente, resolveremos ejemplos que nos permitirán aplicar lo planteado.

Aplicación 1
Susana tiene S/ 120 y pierde 3 veces consecutivas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de lo que le iba quedando, ¿Con cuánto se quedó?

Resolución:
Para la resolución consideraremos lo que va quedando cada vez que se pierde y aplicaremos las conclusiones de la tabla dada.
Así tendremos:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(120)\right)\right) = \frac{\not{3}\times\not{2}\times 1(120)}{4\times\not{3}\times\not{2}} = 30$$

- (120) → se tiene al inicio
- $\frac{1}{2}$ → si pierde 1/2 queda 1/2
- $\frac{2}{3}$ → si pierde 1/3 queda 2/3
- $\frac{3}{4}$ → si pierde 1/4 queda 3/4

$\therefore$ Se quedó con S/ 30

Aplicación 2
Luego de perder en forma sucesiva 1/2 y 2/5 de lo que le iba quedando, Alfredo gana en forma consecutiva sus 3 últimos juegos: 1/2, 1/4 y 1/6 de la cantidad que iba acumulando retirandose con S/ 70. ¿Cuánto tenía al inicio?

Resolución:
Sea x lo que tenía al principio. Procediendo de manera análoga al ejemplo anterior, planteamos:
Se retiró con:

$$\frac{7}{6}\left(\frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}x\right)\right)\right)\right) = 70 \Rightarrow x = 80$$

- x → Inicio
- $\frac{2}{3}$ → 1er. resto
- $\frac{3}{5}$ → 2do. resto
- $\frac{3}{2}$ → si gana 1/2 ahora tiene 3/2
- $\frac{5}{4}$ → si gana 1/4 ahora tiene 5/4
- $\frac{7}{6}$ → si gana 1/6 ahora tiene 7/6

$\therefore$ Al inicio tenía S/ 80

Aplicación 3
Luego de regalar los $\frac{2}{3}$ de mi dinero y enseguida perder los $\frac{2}{17}$ del resto, me quedaron S/450. ¿Cuánto tenía al inicio?

Resolución:

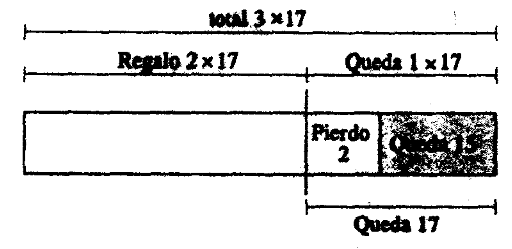
Consideremos a "D" el total de dinero. Ahora, si regalara 2/3, me quedaría 1/3 y si perdiera 2/17 del resto, me quedaría 15/17 de dicho resto; luego, planteamos lo que nos queda finalmente:

$$\frac{15}{17}\left(\frac{1}{3}D\right) = 450$$

Resolviendo: $D = 1\,530$

Otra forma:

Mediante un gráfico :



Luego queda 15 → S/. 450

Total: 51 → S/. D

∴ D = 1530 al inicio tenía S/.1 530

Aplicación 4

Luego de ganar 3 veces consecutivas 1/5 del dinero que iba acumulando, tengo 2 160 soles. ¿Con cuánto inicié el juego?

Resolución:

Supongamos que inicialmente tenemos x.

Si ganara 1/5 de lo que tengo, entonces tendría 6/5 de dicha cantidad y como esto ocurre 3 veces consecutivas, planteamos:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}x\right)\right) = 2160$$

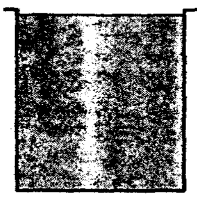
Resolviendo: $x = 1\,250$

Luego, inicié el juego con S/ 2 160

PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS

Supongamos que tenemos un recipiente con 4 litros de agua y otro con 8 litros de vino tinto (rojo). Si juntáramos todo en un tercero llenándolo completamente, tendríamos 12 litros de una mezcla con un color evidentemente rojo, pero más tenue debido al agua empleada. Antes de la experiencia podríamos distinguir el color rojo del vino y lo incoloro del agua, pero una vez mezclados ya no podemos distinguir el agua del vino pues se han unido para formar una mezcla. Si quisiéramos representar gráficamente esta situación (que es difícil ya que ambos está revueltos) podríamos (por razones didácticas y prácticas), utilizar el esquema de la fig. 2 en donde podemos ver de manera clara a cada uno de los componentes, así como sus cantidades y el resultado obtenido.

Fig. 1
Vista real de la mezcla de vino y agua aunque no se distinguen por separado cada uno de los componentes ni las cantidades empleadas



Total: 12 L de mezcla

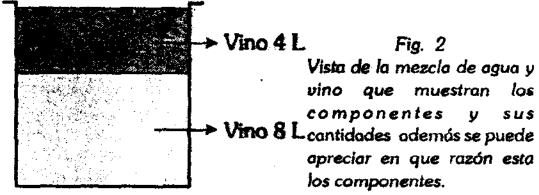
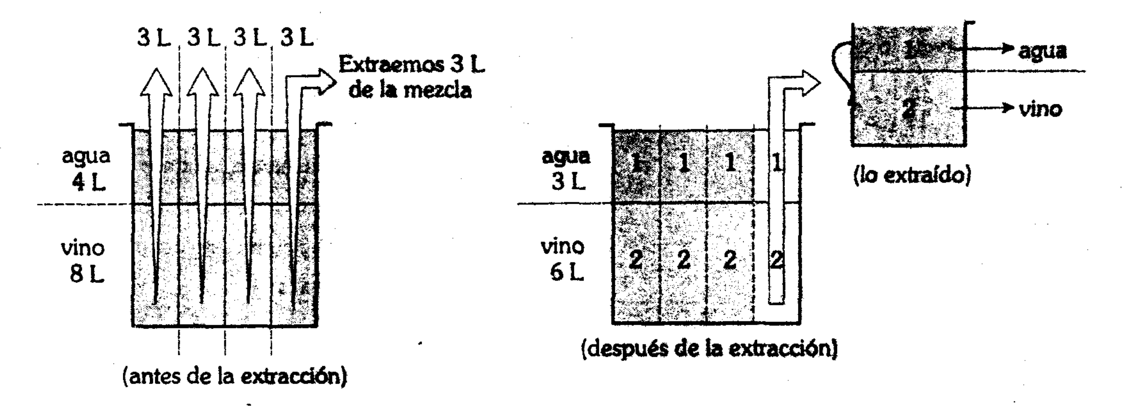


Fig. 2
Vista de la mezcla de agua y vino que muestran los componentes y sus cantidades además se puede apreciar en que razón esta los componentes.

Recuerda que el esquema de la fig. 2 es ideal, pues como sabemos realmente los componentes no se disponen de esa forma; pero en química la diferencia de sus densidades sería muy notoria. Imaginemos ahora que extraemos 3 L de la mezcla y esquematicemos lo que ocurre.

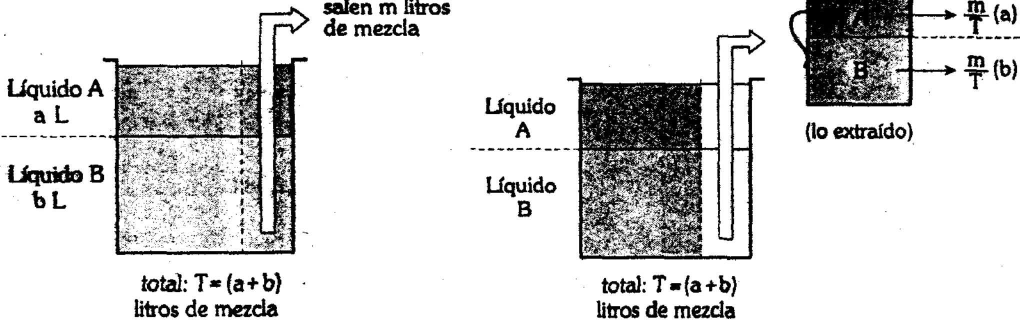


Si observamos y analizamos atentamente, obtendremos las siguientes conclusiones:

1. Hemos extraído 3 L de la mezcla, es decir, 1/4 de la mezcla. Como puede apreciarse, sale 1/4 de cada componente de la mezcla, quedándonos en total 3/4 de la mezcla inicial y también, 3/4 de cada componente.
2. En la cantidad inicial de mezcla, se nota que la relación de agua a vino es de 4 L a 8 L, es decir, como 1 es a 2; y en la cantidad final tendremos que el agua es al vino como 3 L es a 6 L, es decir, que la relación se mantiene de 1 a 2.
3. Como ya se dijo antes, lo extraído era 1/4 de la mezcla, notandose que había salido 1/4 de cada componente. Es decir 1 L de agua y 2 L de vino, por lo cual la razón de agua a vino en la porción extraída es como 1 es a 2. Entonces la razón de los componentes de la parte extraída es la misma que la razón de componentes de la mezcla inicial.
4. Si después de la extracción agregamos a la mezcla que nos queda alguna cantidad de alguno de los componentes (cualquiera de ellos), por ejemplo si agregamos más agua, entonces la cantidad de agua **pero no, el vino; pues este componente no varía**, no disminuye ni aumenta, es decir, permanece constante.

En general

Si consideramos la mezcla de dos líquidos A y B y extraemos de ella $\frac{m}{T}$ partes tendremos.



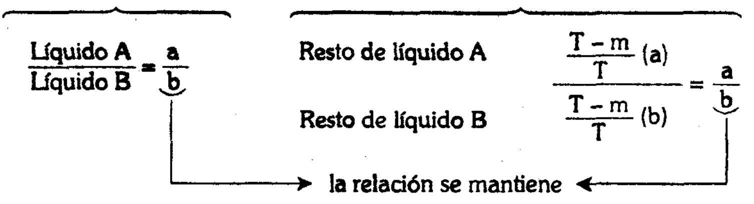
Recordando que T = a + b tendremos.

1° Salen $\frac{m}{a+b}$ partes de la mezcla $\Rightarrow$ salen $\frac{m}{a+b}$ partes de cada componente, especificando.

Salio de líquido A: $\frac{m}{T}(a)$ litros $\Rightarrow$ queda de líquido A: $\frac{T-m}{T}.(a)$ litros.

Salio de líquido B: $\frac{m}{T}(b)$ litros $\Rightarrow$ queda de líquido B: $\frac{T-m}{T}(b)$ litros.

2° **Relación de líquidos en la mezcla inicial** — **Relación de líquidos en el frasco final**



3° Relación de líquidos en la parte extraída.

$$\begin{matrix}\text{Lo extraído de líquido A} \Rightarrow \\ \text{Lo extraído de líquido B} \Rightarrow\end{matrix} \quad \frac{\frac{m}{T}(a)}{\frac{m}{T}(b)} = \frac{a}{b}$$

La relación de líquidos de la parte extraída es la misma relación de líquidos de la mezcla inicial y de la mezcla que nos queda.

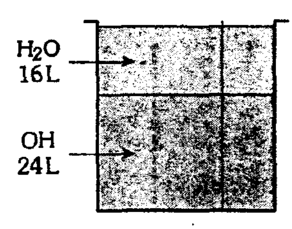
4° Si a la mezcla que nos queda agregamos n litros de líquido A (puede ser también de líquido **B**) entonces la cantidad de líquido de este aumentará, pero lo que nos quedaba de **B** no sufrirá variación.

Podemos decir finalmente en la 4° conclusión: si agregamos a lo que nos quedaba cualquier líquido distinto de A y B, evidentemente las cantidades de estos no sufrirán ninguna variación.

Aplicación

En un recipiente se tiene 40 litros de mezcla alcohólica, donde el agua es 16 litros, se extrae 1/3 del volumen total reemplazando por agua. Luego de la mezcla resultante, se extrae la mitad para volver a reemplazar por agua. Si finalmente se extrajo 3/4 del resto y se volvió a suplir por agua, ¿cuánto de alcohol quedó?

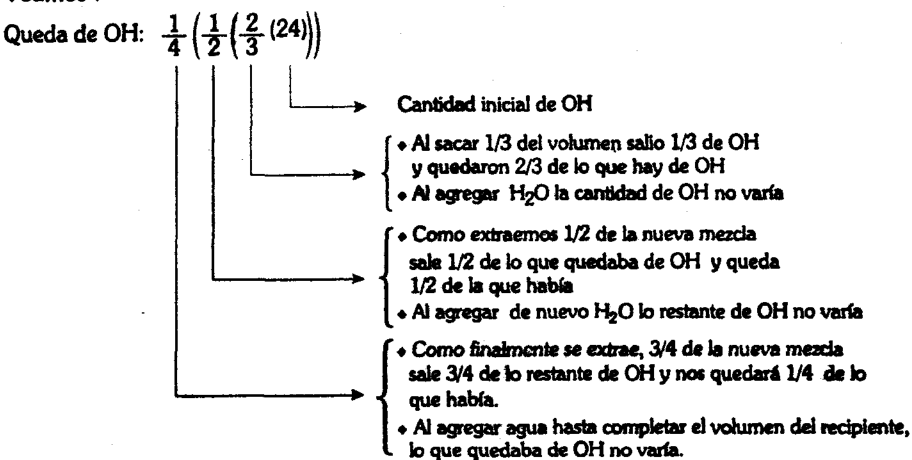
Resolución:



Total: 40L

Observa que después de cada extracción se vuelve a llenar el recipiente con agua hasta completar el volumen inicial. En este caso se está reemplazando siempre lo extraído por una cantidad igual de agua. Es evidente que la cantidad de agua varía, aumentando o disminuyendo, cada vez que agregamos o extraemos agua, respectivamente; mientras que lo referente al volumen restante de alcohol no varía al agregar el agua y tan sólo disminuye cuando se extrae una parte de la mezcla. Resolveremos este problema tomando en cuenta el hecho de que la cantidad de alcohol sólo disminuye y después, iremos trabajando con lo que nos va quedando de alcohol (OH).

Veamos :



Así, queda de OH: 2 L

∴ El resto sera H_2O: 38 L

Respuesta: Queda 2 L de alcohol.

Aplicación :

De una mezcla alcohólica donde 12 L es agua y los otros 18 L son alcohol, se extrae la mitad de la mezcla y se reemplaza por agua. Luego del resto, se extrae la tercera parte y se vuelve a reemplazar por agua. Finalmente, del nuevo resto se extrae la cuarta parte y se reemplaza por agua. ¿Cuánto de alcohol se extrajo en total?

Resolución:

La mezcla total tiene 30 L de volumen. Procediendo análogamente del ejemplo anterior, trabajaremos con lo restante de OH. Como inicialmente hay 18 L de OH, entonces:

queda de OH: $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}(18)\right)\right) = 4{,}5\text{L}$

Como se completaba el volumen total (30 L), siempre con H_2O, entonces quedará **25,5 L** de agua. Ahora, lo que nos pide es cuánto se extrajo de alcohol. Como inicialmente había 18 L de OH, finalmente quedó 4,5 L planteamos:

$$\therefore \text{ Salió de OH: } 18 - 4{,}5 = 13{,}5 \text{ L}$$

Observación:

Al realizar extracciones con reposición (o reemplazo del volumen extraído) de una mezcla , ¿con cuál de los componentes debe trabajarse por lo general?
Pues, se debe trabajar con aquel componente que **sólo varía en disminución; es decir, no debemos tomar aquel que está aumentando y disminuyendo cada** vez sino aquel que únicamente disminuye.

NÚMEROS DECIMALES

Los números decimales se desarrollaron durante la época feudal por las necesidades en el ámbito comercial y científico. Se sostiene que Simon Stevin (1 548 – 1 620) realizó el primer estudio sistemático sobre las fracciones decimales, publicándolo en su obra *La Thlende* en 1 585. Dicha obra fue divulgada por Robert Norton en una traducción inglesa editada en Londrés en 1 608 bajo el titulo de *La Disme*.

Se puede decir, que el uso de las fracciones decimales fue un gran factor de progreso para la astronomía, la navegación y la humanidad en general. Para que la adopción se diese fue necesario, encontrar un medio para representar cualquier fracción en forma decimal.

FRACCIONES DECIMALES

Recordemos que al hacer la clasificación de las fracciones por su denominador mencionamos que se llamaban porque su denominador era una potencia de diez.

Es decir, dada la fracción $f = \frac{a}{b}$ entonces f será fracción decimal si $b=10^n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ (fracción cuyo denominador es la unidad seguida de ceros)

Ejemplo:

$\frac{9}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{189}{1\,000}$; $\frac{21}{10\,000}$; . . . etc. Ahora estas fracciones decimales pueden ser representadas de otra manera muy útil en otros casos.

NOCIÓN DE NÚMERO DECIMAL

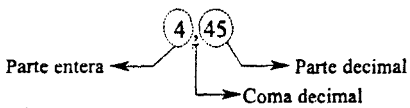
Pues bien, otra forma de representar una fracción decimal es haciendo uso de los **números decimales**. Estos son representaciones lineales que constan de dos partes: una parte entera y una parte decimal separadas ambas por una coma. Antiguamente se utilizaba el punto decimal; ahora se acostumbra a usar la coma decimal, reservando el punto para los casos de multiplicación. Por ejemplo, 5 × 3 puede escribirse como 5 . 3.

Ejemplo 1

La fracción $\frac{1}{10}$ se lee **un décimo** y se representa linealmente como **0,1**.

Ejemplo 2

La fracción $\frac{445}{100}$ se lee **cuatrocientos cuarenta y cinco centésimos** y se representa linealmente **4,45** donde:



Luego, una fracción decimal puede escribirse como un número decimal, escribiendo el numerador y separando con una coma tantas cifras a la derecha como ceros tiene el denominador, agregando ceros a las izquierda si fuese necesario.

No obstante los números decimales no surgen únicamente de las fracciones decimales, sino, éstos se obtienen **al calcular el cociente de la división del numerador y el denominador de una fracción dada**.

Veamos:

Ejemplo 1

Representa las fracciones dadas mediante números decimales:

I. $\frac{1}{2}$ II. $\frac{4}{11}$

Resolución:

I. $\frac{1}{2} = 0{,}5$ en efecto :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 10 & 0{,}5 \\ 10 & \\ \hline -- & \end{array}$$

Luego: $\frac{1}{2}=0{,}5$ se lee **cinco décimos**

II. $\frac{4}{11} = 0,3636$ en efectos

$$\begin{array}{l|l} 4 & 11 \\ \hline 40 & 0,3636... \\ \;\;70 & \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;70 & \\ \;\;\;\;\;40 & \end{array}$$

Luego: $\frac{4}{11} <> 0,3636$

también: $\frac{4}{11} <> 0,\overline{36}$

Ejemplo 2

Representa las fracciones $\frac{5}{8}; \frac{7}{16}$ y $\frac{7}{20}$ como números decimales.

Resolución:

$\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{7}{16} = 0,4375$;

$\frac{5}{8} \times \frac{125}{125} = \frac{625}{1000}$ $\quad$ $\frac{7}{16} \times \frac{625}{625} = \frac{4375}{10000}$

$\frac{7}{20} = 0,35$

$\frac{7}{20} \times \frac{5}{5} = \frac{35}{100}$

De los ejemplos anteriores podemos deducir que las únicas fracciones irreductibles que podríamos transformar en fracciones decimales (para luego expresarlas cómodamente como números decimales) son las que tienen por denominador potencias de 2, de 5 o un producto de potencias de 2 y 5. Los números decimales que obtenidos aquí se denominan decimales exactos; también se les conoce como decimales limitados o decimales terminantes y tienen un número limitado de cifras.

En el caso (II), del ejemplo 1, $\frac{4}{11}$ no se puede expresar como una fracción decimal por mucho que lo intentamos; es decir no podemos expresarla como una fracción equivalente que tenga por denominador la unidad seguida de ceros y cuando esto ocurre, sólo nos queda efectuar la división que ésta indica transformandose así la fracción dada en un número decimal inexacto, siendo el número decimal obtenido un tanto especial; ya que presenta características por las cuales se le denomina **expresión decimal periódica**.

NÚMEROS DECIMALES EXACTOS Y NÚMEROS DECIMALES INEXACTOS PERIÓDICOS

NÚMERO DECIMAL EXACTO O LIMITADO

Hemos mencionado que un número decimal es una representación lineal que consta de una parte entera y de una parte decimal separadas ambas por una coma. Cuando la parte decimal presente una cantidad finita o limitada de cifras estaremos hablando de un **número decimal exacto**.

Ejemplo:

0,75 ; 0,48 ; 2,53 ; 7,234 ; 196,6 , etc.

¿Cómo se generan números decimales exactos?

Es muy sencillo, estos números se obtienen a partir de aquellas fracciones cuyos denominadores tengan como únicos divisores primos a 2 y/o 5.

Ejemplo 1

La fracción $\frac{3}{4}$ genera un número decimal exacto porque $4 = 2^2$ y 2 es divisor de 4.

Verificando

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{28} & 0,75 \\ 20 & \\ \underline{20} & \\ -- & \end{array}$$

$\therefore \ \frac{3}{4} = 0,75$

Ejemplo 2

La fracción $\frac{17}{20}$ genera un número decimal exacto porque el denominador tiene como únicos divisores primos a 2 y 5. En efecto: $20 = 2^2 \times 5$

Verificando

$$\begin{array}{r|l} 17 & 20 \\ \underline{0} & 0,85 \\ 170 & \\ \underline{160} & \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ -- & \end{array}$$

$\therefore \ \frac{17}{20} = 0,85$

NÚMERO DECIMAL INEXACTO PERIÓDICO

Se llama así al número decimal que tiene un número infinito de cifras en su parte decimal; además, en dicha parte decimal, una cifra o un grupo de cifras se repiten sucesivamente de manera infinita recibiendo dicho bloque o grupo de cifras el nombre de **período**. Estos números se clasifican en:

A. Número decimal periódico puro.

B. Número decimal periódico mixto.

Estudiaremos a continuación cada uno de estos números.

A. Número decimal inexacto periódico puro

Se denomina así a todo número decimal cuyo período se representa inmediatamente después de la coma decimal.

Ejemplo:

2, 343434, ... también se escribe como $2,\widehat{34}$

0,275275275 ... también se escribe como $0,\widehat{275}$

¿Cómo se genera un número decimal periódico puro?

Se genera de aquella fracción cuyo denominador no tiene como divisores primos ni a 2 ni a 5.

Ejemplo 1

$\frac{4}{11}$ genera el número decimal periódico puro

0,363636 . . . Es decir: $\frac{4}{11} = 0,\widehat{36}$ (¡verifícalo!)

Ejemplo 2

$\frac{398}{999}$ genera el número decimal periódico puro:

$0,\widehat{398}$

$\therefore \ \frac{398}{999} = 0,\widehat{398}$ (¡verifícalo!)

B. Número decimal inexacto periódico mixto

En esta clase de números decimales el período aparece espacios después de la coma decimal. Es decir, la parte decimal consta de una cifra o un grupo de cifras que no se repite en una parte no periódica y de una cifra o grupo de cifras que se repiten al cual hemos denominado período o parte periódica.

Tenemos:

Parte entera → 0 ; Parte decimal → 2341

$$0{,}23\widehat{41}$$

Parte no periódica ← 23 ; Parte periódica → 41

Ejemplos:

$0{,}23414141$ ... se puede escribir: $0{,}23\widehat{41}$

$12{,}3578578578$ ... pudiéndose escribir: $12{,}3\widehat{578}$

Podemos apreciar en ambos casos que se ha colocado una línea curva sobre el bloque de cifras que se repiten sucesiva e indefinidamente, se indica de esta manera la parte denominada período.

¿Cómo se genera un número decimal periódico mixto?

Se genera de aquella fracción cuyo denominador tiene como divisores a 2 y/o 5 además de otro u otros divisores primos diferentes.

Ejemplo 1

La fracción $\frac{8}{15}$ genera un decimal periódico mixto, ya que el denominador 15 tiene como divisores a 3 y 5.

Así: $\frac{8}{15} = 0{,}5\widehat{3}$

Ejemplo

$\frac{127}{90} = 1{,}\widehat{1}$

Observación:

Al estudiar Simon Stevin las fracciones decimales introdujo para expresarlas un punto dentro de un círculo.
En 1 616 al publicar su obra sobre ***Los logaritmos Neper***, usó el punto decimal para separar la parte entera de la parte decimal. En la actualidad, se ha generalizado el uso de la coma decimal.

TRANSFORMACIÓN DE EXPRESIONES DECIMALES RACIONALES A FRACCIONES

En el transcurso de la resolución de un problema o ejercicio de este tema surge la necesidad de realizar conversiones de expresiones decimales a fracciones y viceversa, razón por la cual mostraremos a continuación la forma de realizar dichas trasformaciones. Como ya hemos visto el paso de fracción a decimal, veremos ahora la transformación de expresión decimal a fracción.

Cálculo de la fracción generatriz de un número decimal exacto

Ejemplos:

- $0{,}2 = \frac{2}{10}$
- $0{,}13 = \frac{13}{100}$
- $0{,}127 = \frac{127}{1000}$

Luego, en general:

$$\underbrace{0{,}\overline{ab\ldots m}}_{n \text{ cifras}} = \frac{\overline{ab\ldots m}}{\underbrace{10\ldots0}_{n \text{ ceros}}}$$

Cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico puro

Ejemplos:

- $0,\widehat{2} = \frac{2}{9}$
- $0,\widehat{13} = \frac{13}{99}$
- $0,\widehat{104} = \frac{104}{999}$

Luego:

$$0,\underbrace{\widehat{ab\ldots m}}_{n \text{ cifras}} = \frac{\overline{ab\ldots m}}{\underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ cifras}}}$$

Cálculo de la fracción generatriz de un número decimal periódico mixto

Ejemplos:

- $0,4\widehat{3} = \frac{43-4}{90} = \frac{39}{90} = \frac{13}{30}$
- $0,97\widehat{31} = \frac{9731-97}{9900} = \frac{9634}{9900} = \frac{4817}{4950}$
- $1,4\widehat{72} = \frac{1472-14}{990} = \frac{1458}{990} = \frac{162}{110}$

Luego, en general:

$$0,\underbrace{\overline{abc\ldots m}}_{x \text{ cifras}}\underbrace{\widehat{n\ldots p}}_{y \text{ cifras}} = \frac{\overline{abc\ldots mn-p}-\overline{ab\ldots m}}{\underbrace{99\ldots 9}_{y \text{ cifras}}\underbrace{00\ldots 0}_{x \text{ cifras}}}$$

Ejemplo 1

Halle: a+b. Si $0,\widehat{ab} = \frac{7}{11}$

Resolución:

Del dato deducimos que el número decimal dado es un número decimal periódico puro.

$$\Rightarrow 0,\widehat{ab} = \frac{\overline{ab}}{99}$$

Además:

$$\frac{7}{11} \times \frac{9}{9} = \frac{63}{99}$$

Entonces: $\frac{\overline{ab}}{99} = \frac{63}{99}$

Luego: $\overline{ab} = 63$

$\therefore a = 6 \quad b = 3$

Nos piden: $a + b = 6 + 3 = 9$

Ejemplo 2

¿En qué cifra termina el período en el desarrollo decimal de $\frac{1}{7}$?

Resolución:

La fracción 1/7 es irreductible y su denominador no tiene como divisores primos ni a 2 ni a 5; por lo tanto, genera un número decimal periódico puro y como el menor número formado por cifras "9" que contiene al denominador 7 es 999999 (púes $999999=3^3\times7\times11\times13\times37$), diremos que el período del número decimal tiene 6 cifras (cantidad de cifras 9 del número 999999).

Luego:

$$\frac{1}{7} = 0,\widehat{abcdef} = \frac{\overline{abcdef}}{999999}$$

$\Rightarrow 999999 = (\overline{abcdef}) \times 7$

$\Rightarrow 1(\ldots 9) = 7(\overline{\ldots f})$

$\therefore f = 7$

Así, la última cifra del período del número decimal obtenido a partir de 1/7 es 7.

Vale la pena aclarar que era importante saber si el decimal que se iba a generar era periódico puro o periódico mixto y que no hacia realmente falta conocer cuantas cifras decimales tenía el período porque únicamente importa la última cifra de dicho período.

CUADRO RESUMEN

Tipo de número decimal	Noción y ejemplos	Observación	Fracción generatriz
Exacto	Siendo $f=\frac{a}{b}$ una fracción irreductible, genera un número decimal exacto, si b tiene como únicos divisores primos a 2 y/o 5. **Ejemplos**: • $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=0,25$ • $\frac{2}{25}=\frac{2}{5^2}=0,08$ • $\frac{3}{50}=\frac{3}{2\times5^2}=0,06$ • $\frac{7}{2500}=\frac{7}{2^2\times5^4}=0,0028$	El número de cifras en la parte decimal es el mayor exponente del factor 2 ó 5 que contiene b.	**Fracción generatriz**: $0,\overline{ab\ldots m}=\frac{\overline{ab\ldots m}}{10\ldots0}$ $\underbrace{\quad}_{n\text{ cifras}}\quad\underbrace{\quad}_{n\text{ cifras}}$ **Ejemplos**: • $0,8=\frac{8}{10}$ • $0,726=\frac{726}{1000}$ • $0,42=\frac{42}{100}$
Periódico puro	Siendo f=a/b una fracción irreductible, ésta genera un número decimal inexacto periódico puro, si b no tiene como divisores primos ni a 2, ni a 5. **Ejemplos**: • $\frac{1}{3}=0,333\ldots=\widehat{3}$ • $\frac{5}{11}=0,4545\ldots=0,\widehat{45}$ • $\frac{7}{27}=0,259259\ldots=0,\widehat{259}$ • $\frac{5}{101}=0,0495\ldots=\widehat{0495}$	El número de cifras en la parte decimal es la cantidad de cifras del menor numeral formado por cifras "9" que contiene a b	**Fracción generatriz**: $0,\widehat{ab\ldots m}=\frac{\overline{ab\ldots m}}{99\ldots9}$ $\underbrace{\quad}_{n\text{ cifras}}\quad\underbrace{\quad}_{n\text{ cifras}}$ **Ejemplos**: • $0,\widehat{32}=\frac{32}{99}$ • $0,\widehat{312}=\frac{312}{999}<>\frac{104}{333}$
Periódico mixto	Siendo f=a/b una fracción irreductible ella genera un número decimal inexacto periódico mixto, si tiene como divisores primos a **2 y/o 5** y necesariamente a otro u otros diferentes de los anteriores. **Ejemplos**: • $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=0,1\widehat{6}$ • $\frac{3}{44}=\frac{3}{2^2\times11}=0,06\widehat{81}$ • $\frac{1}{275}=\frac{1}{5^2\times11}=0,00\widehat{36}$ • $\frac{17}{220}=\frac{17}{2^2\times5\times11}=0,07\widehat{72}$	Para determinar el número de cifras de la parte no periódica se considera el criterio del decimal exacto, y de la parte periódica se considera el criterio del decimal periódico puro	**Fracción generatriz**: $0,\overline{ab}\widehat{cde}=\frac{\overline{abcde}-\overline{ab}}{99900}$ **Ejemplos**: • $0,1\widehat{3}=\frac{13-1}{90}=\frac{12}{90}$ • $0,4\widehat{25}=\frac{425-4}{990}=\frac{421}{990}$ • $0,1\widehat{325}=\frac{1325-1}{9990}=\frac{1324}{9990}$

TABLA DE LOS NUEVES

9	=	3^2
99	=	$3^2 \times 11$
999	=	$3^3 \times 37$
9999	=	$3^2 \times 11 \times 101$
99999	=	$3^2 \times 41 \times 271$
999999	=	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

DUDAS SOBRE ALGUNAS EXPRESIONES DECIMALES

El siguiente artículo ha sido condensado del libro: "Mi profesor de Matemáticas" de Elon Lages Lima, la exposición clara y didáctica nos permitirán entender fácilmente el material expuesto.

La transformación de fracciones ordinarias en expresiones decimales, dando origen al fenómeno curioso de las llamadas expresiones decimales periódicas, es indudablemente un tema que provoca preguntas, suscita controversia y genera problemas.

Hay, de hecho, motivo para perplejidad en las igualdades siguientes:

$$\frac{1}{9}=0{,}111\ldots \qquad 1=0{,}999\ldots \qquad 32{,}8=32{,}799\ldots$$

En la primera de ellas, tenemos una fracción ordinaria irreducible, cuyo denominador no es una potencia de 10, igual a algo que nos parece una fracción decimal. En la segunda, tenemos un número entero igual a una fracción decimal (o algo semejante). En la tercera, vemos dos fracciones decimales de aspectos diferentes pero se dice que son iguales.

Ciertamente, hay motivos para dudas. ¿Cómo enseñar esto a nuestros alumnos si antes no entendemos bien lo que queremos enseñar? Todo el problema radica en las expresiones que aparecen en los segundos miembros de las igualdades anteriores: las llamadas "expresiones decimales periódicas". Si las interpretamos correctamente, las dificultades desaparecerán.

Las expresiones decimales periódicas surgieron como un recurso para auxiliar a quien procura realizar la tarea imposible de transformar ciertas fracciones ordinarias, como 1/9, 3/11 ó 4/15 en fracciones decimales. Una fracción decimal es, por definición, una fracción ordinaria cuyo denominador es una potencia de 10. Así, por ejemplo, 3/10, 152/100 y 13/1000 son fracciones decimales.

Algunas fracciones, como 3/5, 7/20 y 6/25, no son, estrictamente hablando, fracciones decimales (pues sus denominadores no son potencias de 10) pero pueden ser escritas como (esto es, son equivalentes a) fracciones decimales.

Así, tenemos: $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$, $\frac{7}{20}=\frac{35}{100}$ y $\frac{6}{25}=\frac{24}{100}$

Por otra parte, no existe fracción decimal alguna equivalente a la fracción irreductible 3/11. En efecto, las únicas fracciones equivalentes a 3/11 son las de la forma 3n/11n, que se obtienen al multiplicar el numerador 3 y el denominador 11 por el mismo número natural n. Ahora bien, cualquiera que sea nuestra selección de n, el denominador 11n no será jamás una potencia de 10. El mismo razonamiento se aplica a las fracciones 1/9 y 4/15.

El argumento anterior prueba que una fracción irreductible cuyo denominador contenga algún factor primo diferente de 2 ó 5 no es equivalente a una fracción decimal. (Pues 2 y 5 son los únicos factores primos que aparecen en una potencia de 10).

Pero, aún así, 3/11 puede ser escrita "en forma decimal". El secreto está en admitir fracciones decimales ilimitadas.

Veamos cómo:

La manera bien conocida de transformar una fracción ordinaria como 3/11 en fracción decimal consiste en escribir 3 como 3,0 ó 3,00 ó 3,000 etc. (el número de ceros queda a nuestro criterio) y efectuar la división por 11. Si tomamos 4 ceros, por ejemplo obtenemos el cociente 0,2727 y, en el lugar del resto, aparece la cifra 3. Esto quiere decir que el resto es 0,0003 (ya que fuimos hasta las diezmilésimas). Como el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto, tenemos:

$$3{,}0000 = 11 \times 0{,}2727 + 0{,}0003$$

Dividiendo ambos miembros de esta igualdad por 11 y escribiendo 0,0003 bajo la forma de fracción ordinaria, obtenemos:

$$= 0{,}2727 + \frac{3}{110000}$$

Esto quiere decir que, si sustituimos la fracción ordinaria 3/11 por la fracción decimal 0,2727, cometeremos un error igual a 3/110000. El mismo razonamiento muestra que, en general, si en lugar de 3/11 escribimos la fracción decimal 0,2727... 27 (con el "período" 27 repetido n veces) el error cometido será una fracción cuyo numerador es 3 y cuyo denominador es 11×10^{2n}. Este error se hace cada vez menor, a medida que n aumenta. Tomando n suficientemente grande, podemos hacer el error tan pequeño como deseemos.

Así, las fracciones decimales.

(*) 0,27 0,2727 0,2727272 etc., constituyen valores aproximados de la fracción ordinaria 3/11. Cuando mayor sea el número de cifras decimales tomadas, menor será el error cometido (esto es, mejor será la aproximación). Por esto, cuando escribimos: $\frac{3}{11} = 0{,}2727\ldots$ no estamos afirmando que 3/11 es igual a 0,2727. Los puntos suspensivos al final del símbolo 0,2727 ... significa que el no representa una única fracción decimal sino la sucesión infinita de fracciones decimales (*) anterior, las cuales son valores aproximados de 3/11.

A la luz de esas consideraciones, analicemos la igualdad $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$

Tomemos la sucesión infinita de fracciones decimales.

0,1 0,11 0,111 0,1111 etc.

Cada una de esas fracciones decimales es un valor aproximado para 1/9. Tomando un número suficiente grande de cifras decimales, podemos hacer esta aproximación tan precisa como deseemos. Por ejemplo, escribiendo 0,11111 en lugar de 1/9 estaremos cometiendo un error igual a.

$$\frac{1}{9} - 0{,}11111 = \frac{1}{9} - \frac{11111}{100000} = \frac{1}{900000}$$

Explicación análoga vale para la igualdad 1 = 0,999 ... La sucesión infinita de fracciones decimales

0,9 0,99 0,999 0,9999 etc.

proporciona valores aproximados para el número 1. Por ejemplo, la diferencia 1 – 0,999999 es igual a 1 millonésima.

Finalmente, la igualdad 32,8 = 32,799 ... significa que la diferencia entre 32,8 y 32,799 ... 9 (con **n** cifras iguales a 9) puede hacerse tan pequeña como se desea, siempre que se tome un número n suficientemente grande).

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Ordena de menor a mayor:

- $a = \frac{2}{3}$
- $b = \frac{17}{19}$
- $c = \frac{11}{12}$
- $d = \frac{10}{27}$

Resolución:

Sacaremos el M.C.M. de los denominadores para transformar las fracciones heterogéneas en homogéneas. Veamos: M.C.M.(3; 19; 12; 27) =2 052

$$a = \frac{2}{3} <> \frac{1\,368}{2\,052}$$

$$b = \frac{17}{19} <> \frac{1836}{2\,052}$$

$$c = \frac{11}{12} <> \frac{1\,881}{2\,052}$$

$$d = \frac{10}{27} <> \frac{760}{2\,052}$$

Observando los numeradores y ordenando según lo pedido tendremos:

$$\frac{760}{2\,052} < \frac{1\,368}{2\,052} < \frac{1\,836}{2\,052} < \frac{1\,881}{2\,052}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{10}{27} < \frac{2}{3} < \frac{17}{19} < \frac{11}{12}$$

Luego:

$$d < a < b < c$$

Otra forma:

Otra forma sería efectuar la división:

$\frac{2}{3} = 0{,}66666$ . . . .

$\frac{17}{19} = 0{,}89473$ . . . .

$\frac{11}{12} = 0{,}91666$ . . . .

$\frac{10}{27} = 0{,}37037$ . . . .

Y ordenar los decimales obtenidos de menor a mayor, de acuerdo a lo pedido (vamos aproximandonos al milésimo).

$$0{,}370 < 0{,}667 < 0{,}895 < 0{,}917$$

$$\frac{10}{27} < \frac{2}{3} < \frac{17}{19} < \frac{11}{12}$$

$$d < a < b < c$$

PROBLEMA 2

¿De qué número, 45 es $\frac{1}{6}$ menos?

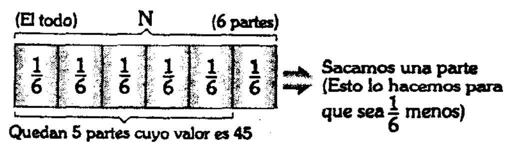
Resolución:

Sea N el número buscado, al disminuirlo en su sexta parte nos quedará sus cinco sextos que por dato es 45. Luego:

$$\frac{5}{6}N = 45 \Rightarrow N = 54$$

Otra forma:

Gráficamente:



$\Rightarrow$ 1 parte es 9

$\therefore$ 6 partes son 54

PROBLEMA 3

Si a y b $\in$ N. Halle la mayor fracción:

$$\overset{(I)}{\frac{2a+b+5}{2a+b+10}} \qquad \overset{(II)}{\frac{3b+2a+8}{2a+b+2(b+3)}}$$

Resolución:

Tomemos (I) y démosle una forma adecuada:

$$\frac{2a+b+5}{(2a+b+5)+5} \Rightarrow \frac{n}{n+5} \quad \textbf{fracción propia} \qquad (2a+b+5 = n \in N)$$

Ahora damos forma a (II)

$$\frac{(2a+3b+6)+2}{2a+3b+6} \Rightarrow \frac{m+2}{m} \quad \textbf{fracción impropia} \qquad (2a+3b+6 = m \in N)$$

Como:

fracción propia $<1<$ fracción impropia $\Rightarrow$ I $<$ II

Otra forma :

Consiste en darle valores a las variables **a** y **b**. Por ejemplo: a = 1 y b=2

Entonces:

en (I): $\dfrac{2(1)+2+5}{2(1)+2+10} = \dfrac{9}{14}$

en (II): $\dfrac{3(2)+2(1)+8}{2(1)+2+2(2+3)} = \dfrac{16}{14}$

$\overset{(I)}{\dfrac{9}{14}} < \overset{(II)}{\dfrac{16}{14}}$

$\Rightarrow$ I $<$II

PROBLEMA 4

Si a una fracción propia la convertimos en impropia invirtiendo sus términos y sumamos estas fracciones, resultaría el producto de estas 2 fracciones, más el resultado de la suma del numerador al cubo y el denominador al cubo de esta fracción. Halla el producto de la suma de los términos de la fracción con el producto de estos mismos.

Resolución:

Sea $\dfrac{a}{b}$ la fracción propia, de acuerdo al enunciado, tendremos:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)+a^3+b^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Nos piden: (a + b) (ab)

Desarrollando (I): $\dfrac{a^2+b^2}{ab} = 1 + a^3 + b^3$

$a^2 + b^2 = ab(1) + a\,b(a^3 + b^3)$

$a^2 + b^2 = ab + (ab)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\cancel{a^2+b^2-ab} = (ab)(a+b)(\cancel{a^2+b^2-ab})$

$1 = (a + b)(ab)$

$\therefore (a + b)(ab) = 1$

PROBLEMA 5

A una fracción propia de términos consecutivos se le añade 2 unidades a cada término. Esta nueva fracción excede en $\dfrac{1}{12}$ a la original. Hallar la fracción original.

Resolución:

Sea $\dfrac{n}{n+1}$ la fracción propia de términos consecutivos. Por condición del problema:

"Se le añade 2 unidades a cada término".

$$\frac{n+2}{(n+1)+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

además: $\dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{12}$

Efectuando:

$$\frac{\cancel{n^2}+\cancel{3n}+2-\cancel{n^2}-\cancel{3n}}{(n+3)(n+1)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{(n+3)(n+1)} = \frac{1}{12}$$

De donde: $(n+1)(n+3) = 24 = 4(6) = (3+1)(3+3)$

luego: n=3

Entonces, la fracción original será: $\dfrac{3}{4}$

PROBLEMA 6

Dadas 3 fracciones equivalentes a $\frac{m}{n}$, se observa que la suma de sus numeradores es 77 y la de sus denominadores es 165. Halle $\frac{m}{n}$

Resolución:

Fracción dada: $\frac{m}{n}$

Fracciones equivalentes: $\frac{mK_1}{nK_1}$; $\frac{mK_2}{nK_2}$; $\frac{mK_3}{nK_3}$

con K_1 ; K_2 ; K_3 enteros positivos.

Por dato:

Suma de numeradores es 77

$mK_1+mK_2+mK_3 = 77 \Rightarrow m(K_1+K_2+K_3)=77$ ... (I)

Suma de denominadores es 165

$nK_1+nK_2+nK_3=165 \Rightarrow n(K_1+K_2+K_3)= 165$ .. (II)

Dividiendo (I) por (II)

$$\frac{m(k_1+k_2+k_3)}{n(k_1+k_2+k_3)} = \frac{77}{165} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{7}{15}$$

PROBLEMA 7

La suma de los términos de 2 fracciones equivalentes a $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{11}$ están comprendidas entre 400 y 450. Al duplicar las fracciones, observamos que la suma de los denominadores es igual a la suma de los numeradores. Indica una de las fracciones equivalentes.

Resolución:

Fracciones Originales	F. Equivalentes	Fracciones Duplicadas
$f_1 : \frac{5}{7}$	$f_{1\,EQ} : \frac{5K_1}{7K_1}$	$\frac{10K_1}{7K_1}$
$f_2 : \frac{3}{11}$	$f_{2EQ} : \frac{3K_2}{11K_2}$	$\frac{6K_2}{11K_2}$

Por condición:

$$400 < \left(\begin{array}{c}\text{suma de los términos}\\ \text{de las fracciones equivalentes}\end{array}\right) < 450$$

$400 < 5K_1 + 7K_1 + 3K_2 + 11K_2 < 450$

$400 < 12K_1 + 14K_2 < 450$ . . . . . (I)

Además:

Al duplicar las fracciones equivalentes

$7K_1 + 11K_2 = 10K_1+6K_2$ (suma de numeradores igual a la suma de los denominadores)

$5K_2 = 3K_1$

$$\therefore \frac{5}{3} = \frac{K_1}{K_2}$$

De aquí:

$K_1 = 5n$ $\quad K_2 = 3n$ $\quad ; n \in \mathbb{N}$

Reemplazamos los valores de K_1 y K_2 en (I):

$400 < 12(5n) + 14(3n) < 450$

$400 < 102n < 450$

De la desigualdad obtenida, se deduce $n = 4$,

Entonces: $K_1 = 5(4) = 20$

$K_2 = 3(4) = 12$

Luego, las fracciones equivalentes serán:

$\frac{100}{140}$ y $\frac{36}{132}$

PROBLEMA 8

Encuentra la fracción equivalente a $\frac{377}{493}$, tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 42 y la diferencia de dichos términos esté comprendida entre 30 y 80. Calcule la suma de las cifras del numerador.

Resolución:

$f : \frac{377}{493} <> \frac{13}{17} \qquad f_{EQ}: \frac{13K}{17K}$; $K \in \mathbb{N}$

Condiciones:

Suma de sus términos:

$13K + 17K = 30K = \overset{\circ}{42} = 42n \quad (n \in \mathbb{N}) \ldots$ (I)

Diferencia de sus términos:

$17K - 13K = 4K$; cumpliendo $30 < 4K < 80$ ..(II)

De (I):

$\cancel{3}0K = \cancel{4}2n;\ n \in \mathbb{N}$

$5K = 7n$

Veamos los posibles valores de K y n.

$\frac{K}{n} = \frac{7}{5} \Rightarrow$

k =	7	14	21	....
n =	5	10	15	....

De (II):

$30 < 4K < 80$

El valor adecuado de K es 14 (es el único valor que cumple en II).

Entonces en el cuadro de arriba: n = 10

Luego: $f_{EQ}: \frac{13K}{17K} = \frac{13(14)}{17(14)} = \frac{182}{238}$

Nos piden 1 + 8 + 2 = 11 (suma de cifras del numerador).

PROBLEMA 9

Si $\frac{a}{37} + \frac{n}{9} = 0,\widehat{(n+1)a0}$

Calcule a + n

Resolución:

$$\frac{a}{37} + \frac{n}{9} = \frac{\overline{(n+1)a0}}{999}$$

$$\frac{27a + 111n}{9\cancel{9}9} = \frac{\overline{(n+1)a0}}{9\cancel{9}9}$$

$$27a + 111n = 100(n+1) + 10a + 0$$

$$17a + 11n = 100$$

$\Downarrow \quad \Downarrow$

2 $\quad$ 6

Resolviendo la ecuación obtenemos: $\begin{cases} a = 2 \\ n = 6 \end{cases}$

Nos piden: a + n = 2 + 6 = 8

Observación:

Descomposición polinómica:

Ejemplos:

$64 = 60 + 4 = 10 \times 6 + 4$

$72 = 70 + 2 = 10 \times 7 + 2$

$\overline{ab} = 10a + b$

$257 = 200 + 50 + 7 = 100 \times 2 + 10 \times 5 + 7$

$532 = 500 + 30 + 2 = 100 \times 5 + 10 \times 3 + 2$

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$

Ejemplo:

$\overline{(n+1)ao} = 100(n+1) + 10a + o$

PROBLEMA 10

Calcule

$$F = \frac{4,555\ldots + 2,777\ldots - 0,4533\ldots}{0,5466\ldots + 0,77\ldots - 0,0266\ldots}$$

Resolución:

$$4,555\ldots = 4,\widehat{5} = \frac{45-4}{9} = \frac{41}{9} <> \frac{4\,100}{900}$$

$$2,777\ldots = 2,\widehat{7} = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9} <> \frac{2\,500}{900}$$

$$0,4533\ldots = 0,45\widehat{3} = \frac{453-45}{900} = \frac{408}{900}$$

$$0,5466\ldots = 0,54\widehat{6} = \frac{546-54}{900} = \frac{492}{900}$$

$$0,777\ldots = 0,\widehat{7} = \frac{7}{9} <> \frac{700}{900}$$

$$0{,}0266\ldots = 0{,}02\overset{\frown}{6} = \frac{26-2}{900} = \frac{24}{900}$$

Luego:

$$F = \frac{\frac{4100}{900} + \frac{2500}{900} - \frac{408}{900}}{\frac{492}{900} + \frac{700}{900} - \frac{24}{900}} = \frac{\frac{6\,192}{900}}{\frac{1168}{900}} = \frac{387}{73}$$

$$\therefore\ F = \frac{387}{73}$$

PROBLEMA 11

En un salón de ADUNI, los 7/12 de los alumnos son hombres. Si la diferencia entre mujeres y hombres es **P**, hallar cuántos alumnos hay en el salón.

$$P = 0{,}\overset{\frown}{3} + (1{,}\overset{\frown}{2} + 1{,}\overset{\frown}{3} + \ldots + 1{,}\overset{\frown}{6} + 1{,}\overset{\frown}{7})$$

Resolución:

Cálculo de P:

Efectuando las conversiones a fracción generatriz tendremos:

$$P = \frac{1}{3} + \left(\frac{12}{9} + \frac{13}{9} + \ldots + \frac{16}{9} + \frac{17}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{12+13+14+15+16+17}{9}\right)$$

$$P = \frac{1}{3} + \frac{87}{9} = \frac{1}{3} + \frac{29}{3} = 10$$

$\therefore$ P = 10

Como se hablan de docenas (7/12), al total le ponemos 12K

Ahora, sea total de alumnos: 12 K

$\Rightarrow$ hombres : $\frac{7}{12}$ (12 K) = 7 K

mujeres : 5 K

Por dato:

7 K – 5 K = 10 $\Rightarrow$ K = 5

(# hombres) – (# mujeres) = P = 10

$\therefore$ Total de alumnos: 12 K = 12(5) = 60

PROBLEMA 12

Calcule la fracción impropia que sumada con su inversa da por resultado 2,083333 . . . .

Resolución:

Hallaremos la fracción generatriz del número decimal periódico mixto:

$$2{,}08\overset{\frown}{3} = \frac{2\,083-208}{900} = \frac{1\,875}{900} = \frac{25}{12}$$

Si a/b es la fracción impropia y b/a, su inversa, entonces:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{25}{12}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{4^2+3^2}{4(3)}$$

(Lo que se ha hecho es darle una forma adecuada).

Luego: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow\ f: \frac{4}{3}$

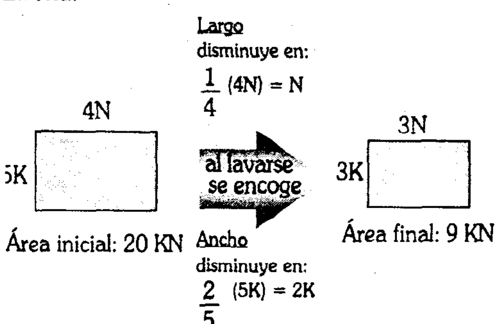
PROBLEMA 13

Una tela de forma rectangular al lavarse se encoge en 1/4 de su largo y los 2/5 de su ancho. ¿Qué fracción del área inicial de la tela es la nueva área?

Resolución:

Como me habla de cuarta $\left(\frac{1}{4}\right)$, al largo le ponemos 4N y como me hablan de quinta $\left(\frac{2}{5}\right)$ al ancho le ponemos 5K. Veamos:

La tela:



$\therefore \dfrac{\text{nueva área}}{\text{área inicial}} = \dfrac{9\,KN}{20\,KN} = \dfrac{9}{20}$

Nota:

Recuerda:

$\text{Área del rectángulo} = (\text{largo}) \times (\text{ancho})$

PROBLEMA 14

Los 2/3 de los miembros de un club son *mujeres*, 1/4 de los hombres están casados. Si hay 9 hombres solteros, ¿cuántas mujeres hay en total?

Resolución:

Como nos hablan de tercera $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ y cuarta $\left(\dfrac{1}{4}\right)$, entonces le ponemos: $(3 \times 4)K = 12K$ al total de personas.

Luego:

$$\text{Mujeres} = \frac{2}{3}(\text{total}) = \frac{2}{3}(12K)$$

$$\text{Hombres casados} = \frac{1}{4}(\text{hombres}) = \frac{1}{4}(4K)$$

Lo haremos utilizando el siguiente esquema:

Total: 12k

	Hombres (4k)	Mujeres (8k)
casados	K	8K
solteros	3k	

$$3k = 9 \Rightarrow k = 3$$

$\therefore$ Número de mujeres: $8k = 8(3) = 24$

Otra forma:

Dice, según el problema, que los $\dfrac{2}{3}$ del total son mujeres, entonces la tercera parte del total son hombres.

$\Rightarrow$ Mujeres: $\dfrac{2}{3}(\text{total})$

Hombres: $\dfrac{1}{3}(\text{total})$

Además, la cuarta parte de los hombres son casados, entonces los $\dfrac{3}{4}$ de los hombres son solteros.

(Por dato, los solteros son 9).

$$\Rightarrow \text{Solteros: } \frac{3}{4}(\text{hombres}) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(\text{total})\right) = 9$$

$\Rightarrow$ Total: 36

$$\therefore \text{Mujeres: } \frac{2}{3}(\text{total}) = \frac{2}{3}(36) = 24$$

PROBLEMA 15

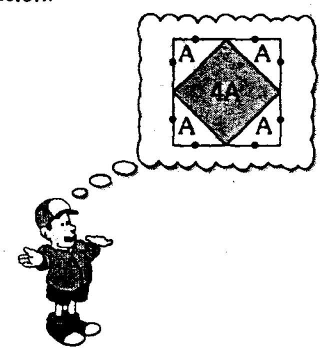
Halle que parte de la región sombreada en (I) representa la región sombreada en (II). El área del cuadrado es 2/3 del área del triángulo.

(I)

(II)

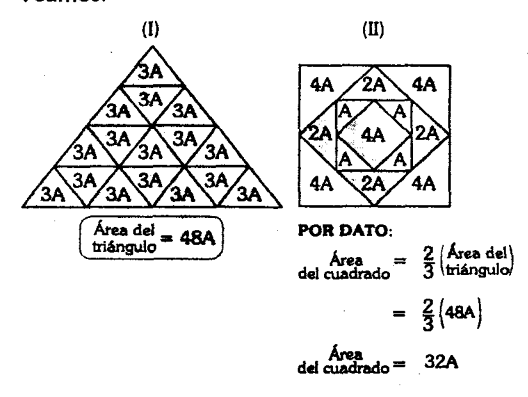
Resolución:

Observación:



Como el problema nos indica que el área del triángulo grande tiene tercia (2/3), entonces le ponemos 3A al área de cada triangulito que conforman el triángulo grande.

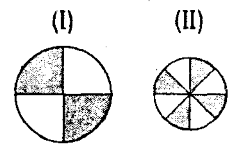
Veamos:



Nos piden: $f = \dfrac{\text{Región Sombreada en (II)}}{\text{Región Sombreada en (I)}} = \dfrac{12A}{30A} = \dfrac{2}{5}$

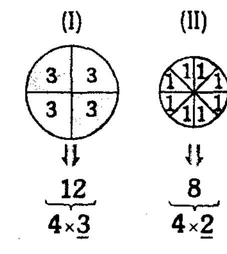
PROBLEMA 16

En la siguiente figura, el área del círculo (I) y el área del círculo (II) están en la relación de 3 a 2. ¿Qué fracción representa el área de la región no sombreada de (II) respecto del área de la región sombreada de (I)?



Resolución:

A cada parte de la figura I le damos el valor de 3 unidades, puesto que su área total debe ser como 3.



$\therefore\ f = \dfrac{A_{\text{no somb. (II)}}}{A_{\text{somb. (I)}}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

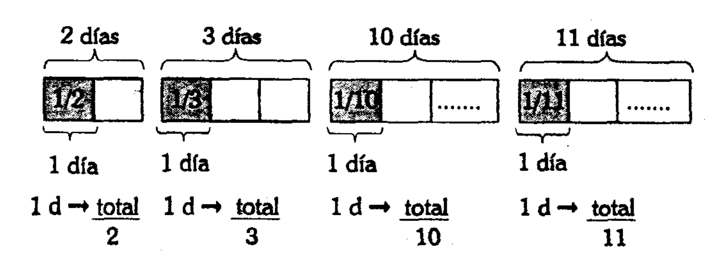
PROBLEMA 17

El caño **A** puede llenar un estanque en 15 horas, en cambio el caño **B** puede en 10 horas. Si se abre un caño **C, de desagüe**, puede desocupar todo el contenido del estanque en 2 horas. Los caños A y B se abren durante 4 horas exactamente, inmediatamente después se abre el caño C. ¿En cuánto tiempo será desalojado todo el contenido existente en el estanque?

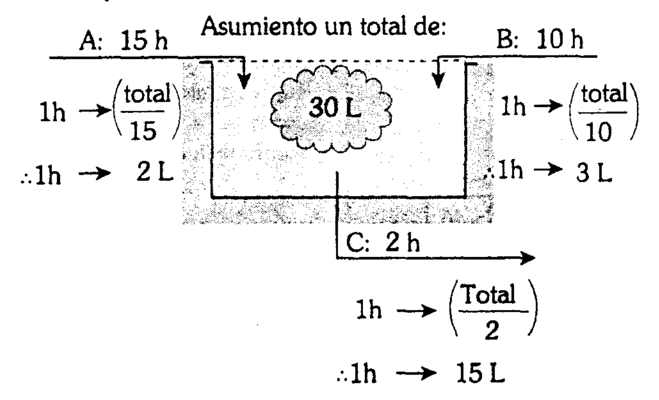
Resolución:

Observación previa:

Siempre que tengamos un mismo total (obra) hecho en tiempos diferentes se aplica el método de "Reducción a la unidad", que consiste en lo siguiente:



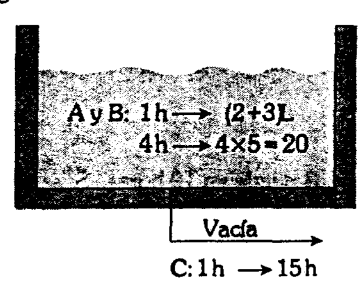
Aplicando este método en el problema obtendremos:



Observación:

Asimismo: Total = 30 porque es el menor número que es divisible entre 15, 10 y 2, a la vez.

Luego:



$$\therefore\ T_C = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}h = 1h\ 20min.$$

Vemos que A y B juntos en 1 hora llenan 2+3 =5 litros , entonces , en 4 horas llenaran 4 ×5 = 20 litros, en este momento se abre el desagüe C que en 1 hora vacía 15 litros; luego C:

1h → 15 L

xh → 20 L

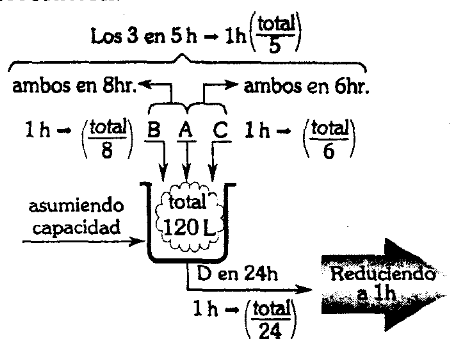
$$\therefore\quad x = \frac{20\times 1h}{15} = \frac{4}{3}h = 1h\,20min$$

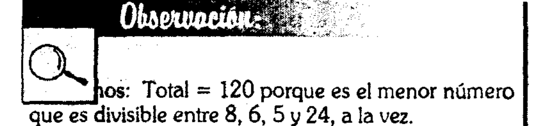
PROBLEMA 18

Se dispone de 3 caños (**A, B, C**) para llenar un estanque, y un caño (D) para evacuarlo. Si se abre **A** y **B** el estanque se llenaría en 8 horas; mientras que **A** y **C** lo llenarían en 6 horas. Pero si se abriese los 3 caños, simultáneamente, el tanque sería llenado a 5 horas. Además, el caño **D** puede desaguarlo en 24 horas.

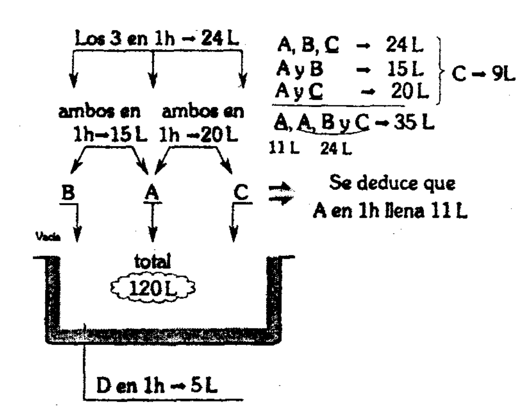
Determinar el tiempo que tardaría el caño **A** en llenar el estanque si el caño **D** estuviese abierto.

Resolución:





hos: Total = 120 porque es el menor número que es divisible entre 8, 6, 5 y 24, a la vez.



Luego, en una hora A llena 11L, y en esa misma hora D vacía 5 L
entonces:

A y D 1h → 6L

xh → 120 L (todo el estanque)

$$\therefore\ x = \frac{120L \times 1h}{6L} = 20h$$

PROBLEMA 19

Se tiene un recipiente que contiene una mezcla de leche, alcohol y agua en la relación de 3, 4 y 5 respectivamente. Se extrae de la mezcla $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{5}{12}$ de lo que iba quedando, resultando el volumen final de leche igual a 2 litros. Halle el volumen inicial de agua.

Resolución:

	se extrae	queda
	2/5	3/5
leche = 3K L	1/3	2/3
alcohol = 4K L	5/7	2/7
agua = 5K L	5/12	7/12

En todo momento lo que se extrae es respecto a lo que iba quedando.

Calculando el volumen final de leche:

$$\begin{array}{c}\text{Volumen} \\ \text{final de leche}\end{array} = \frac{7}{12} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}(3K) = 2$$

Resolviendo: $K = 10$

Luego: $\begin{array}{c}\text{Volumen inicial} \\ \text{de agua}\end{array} = 5(10) = 50\ \ell$

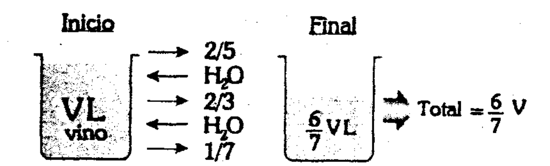
Nota:

Recuerda que cuando de una mezcla se extrae una fracción del total, se extrae la misma fracción de cada una de las sustancias que componen dicha mezcla.

PROBLEMA 20

Se tiene un recipiente lleno de vino, del cual se extraen 2/5 de su contenido para luego ser reemplazados por agua; de la mezcla resultante se extraen 2/3 del total para ser reemplazados por agua; por último se extraen 1/7 de la nueva mezcla. ¿Qué parte del volumen inicial quedará con agua?

Resolución:



Se puede observar que después de la tercera extracción no hubo reemplazo (se sacó 1/7 del total); por lo tanto, el volumen final será 6/7 del volumen inicial.

También observamos que el vino, en todo el proceso, ha estado saliendo y variando siempre, respecto a lo que quedaba en ese momento. Por esa razón es más fácil y rápido calcular la cantidad de vino al final.

La cantidad de vino que queda al final la calculamos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}\text{Vino} \\ \text{final}\end{array} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}V = \frac{6}{35}V$$

La cantidad de agua que queda al final la calculamos haciendo diferencia:

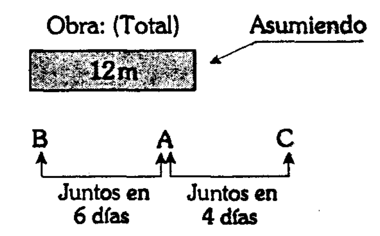
$$H_2O = \begin{pmatrix} \text{total} \\ \text{final} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{vino} \\ \text{final} \end{pmatrix} = \frac{6}{7}V - \frac{6}{35}V = \frac{24}{35}V$$

$\therefore$ La respuesta es $\frac{24}{35}$

PROBLEMA 21

A y B pueden hacer una obra en 6 días, A y C en 4 días, A, B y C en 3 días. ¿En cuántos días podrá hacer la obra A trabajando solo?

Resolución:



$$1 \text{ día} \rightarrow \left(\frac{\text{total}}{6}\right) \quad 1 \text{ día} \rightarrow \left(\frac{\text{total}}{4}\right)$$

Además:

Los tres juntos en 3 días

$$\Rightarrow 1 \text{ día} \rightarrow \left(\frac{\text{total}}{3}\right)$$

Observación:

Asumimos: Total = 12 porque es el menor número que es divisible entre 6, 4 y 3, a la vez.

Reducimos a 1 día de trabajo:

B — A — C

Juntos en 1 día → 2m | Juntos en 1 día → 3m

Luego:

Los tres juntos en

1 día ⇒ 4 m

$$\left.\begin{matrix} A, B, \underline{C} \Rightarrow 4m \\ A \text{ y } B \Rightarrow 2m \end{matrix}\right\} C \Rightarrow 2m$$

A y C ⇒ 3m

Se deduce que A en 1 día hará 1 m.

$\therefore$ Luego, para que A pueda hacer toda la obra (12 m) empleará 12 días.

PROBLEMA 22

Calcule la suma de los términos de una fracción mayor que $\frac{2}{5}$ y menor que $\frac{5}{8}$, sabiendo que dichos términos son los mayores posibles y su diferencia es 12.

Resolución:

Sea la fracción: f

Dato:

$$\frac{2}{5} < f < \frac{5}{8}$$

Se deduce que f es propia; además, por dato,, la diferencia de sus términos es 12

$$\Rightarrow f = \frac{x}{x+12}$$ ← Los mayores posibles

Luego:

$$\frac{2}{5} < \frac{x}{x+12} < \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{5} < \frac{x}{x+12} \wedge \frac{x}{x+12} < \frac{5}{8}$$

$$8 < x \quad \wedge \quad x < 20$$

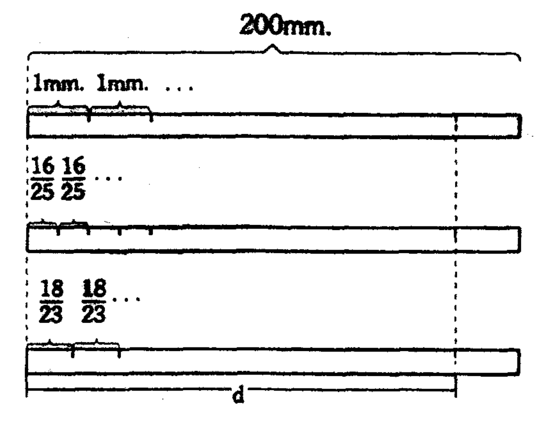
$$8 < x < 20 \longrightarrow x \text{ máximo} = 19$$

Luego, $f = \frac{19}{31} \Rightarrow$ suma de términos = 50

PROBLEMA 23

Se tiene 3 reglas de 200 milímetros de longitud cada una; la primera está dividida en milímetros; la segunda, en 16/25 de milímetros y la tercera, en 18/23 de milímetros. Se superponen de modo que coincidan en toda su extensión. ¿A qué distancia del origen coincidirán tres trazos de las reglas?

Resolución:



La distancia para que los tres trazos coincidan debe ser un múltiplo común de 1, 16/25 y 18/23

Es decir, $d = \text{MCM}\left(1, \frac{16}{25}, \frac{18}{23}\right)$

$$d = \frac{\text{M.C.M}(1, 16, 18)}{\text{M.C.D}(1, 25, 23)} = \frac{144}{1} \rightarrow d = 144\,\text{mm}.$$

PROBLEMA 24

Una liebre, perseguida por un galgo, lleva ya adelantados 90 saltos y da 5 saltos mientras el galgo da 4. Como 7 saltos de la liebre equivalen a 5 del galgo, se desea saber ¿cuántos saltos tendrá que dar éste para alcanzarla?

Resolución:

Sea:

L: Salto de la liebre

G: Salto del galgo

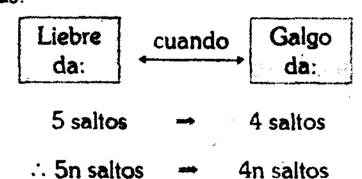
Por dato:

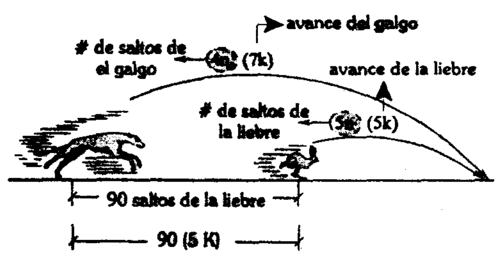
7 saltos de la **liebre** equivalen a 5 del galgo.

$$7L = 5G \rightarrow \frac{L}{G} = \frac{5}{7}$$

En cada salto avanzan : $L = 5K$, $G = 7K$

Además:





Del gráfico, se observa:

$(4n)(7K) = (90)(5K) + (5n)(5K)$

$28n\not{K} - 25n\not{K} = 450\not{K}$

$3n = 450$

$n = 150$

Entonces la liebre da $5n = 5(150) = 750$ **saltos** y es alcanzada simultáneamente por **el galgo** que da:

$4n = 4(150) = 600$ **saltos.**

PROBLEMA 25

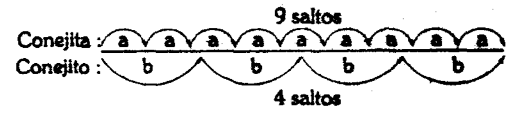
Una conejita de $2\frac{1}{3}$ saltos por segundo tiene ya avanzadas $46\frac{3}{4}$ saltos, cuando un conejito empieza a perseguirla. Si el conejito da $4\frac{1}{2}$ saltos por segundo, ¿en cuánto tiempo será alcanzada la conejita si lo que avanza en 9 saltos lo recorre el conejito en 4 saltos?

Resolución:

a: salto de conejita

b: salto de conejito

Según el dato, lo que avanza la conejita en 9 saltos lo recorre el conejito en 4 saltos.



Luego: $9a = 4b$

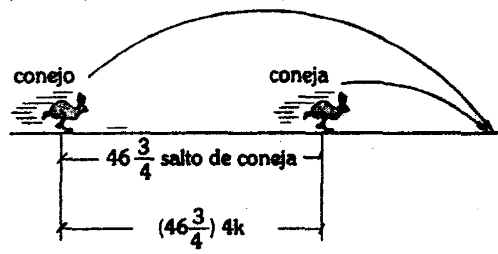
$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4}{9} \rightarrow a = 4K; \quad b = 9K$

Entonces:

La conejita en un salto avanza como 4, es decir: 4 K

El conejito en un salto avanza como 9, es decir: 9K

($K \in Z^+$)



$$\text{Tiempo de alcance} = \frac{\text{Distancia que los separa}}{\begin{pmatrix}\text{Rapidez}\\ \text{del conejo}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rapidez}\\ \text{de la coneja}\end{pmatrix}}$$

$$T_A = \frac{\left(46\frac{3}{4}\right)(4K)}{\left(4\frac{1}{2}\right)(9K) - \left(2\frac{1}{3}\right)(4K)}$$

$$= \frac{\left(\frac{187}{4}\right)(4K)}{\frac{9}{2}(9K) - \frac{7}{3}(4K)} = \frac{187K}{\frac{187K}{6}} = 6$$

$\therefore T_A = 6$ segundos

PROBLEMA 26

Se va a repartir S/ 3 600. Si a Pedro le corresponde 5/9 del total y sólo ha recibido 3/8 de su parte, ¿cuánto le falta recibir?

Resolución:

Le corresponde $\frac{5}{9} \times 3\,600 = 2\,000$,

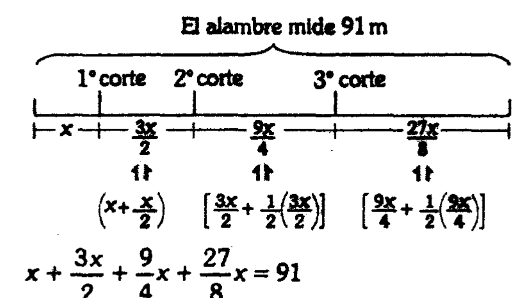
recibe $\frac{3}{8} \times 2000 = 750$

Le falta recibir: $2\,000 - 750 =$ S/.1 250

PROBLEMA 27

A un alambre de 91 m se le dio 3 cortes de manera que la longitud de cada trozo resultante es igual al del inmediato anterior aumentado en su mitad. ¿Cuál es la longitud del menor trozo?

Resolución:



$$x + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}x + \frac{27}{8}x = 91$$

Multiplicando todo por 8:

$8x + 12x + 18x + 27x = 91(8)$

$\rightarrow x = \frac{56}{5}$

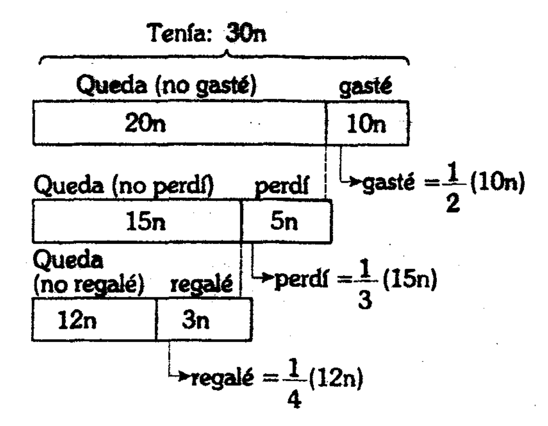
$\therefore$ La longitud del menor trozo es $\frac{56}{5}$ m

PROBLEMA 28

Del dinero que tenía, gasté 1/2 de lo que no gasté; luego perdí 1/3 de lo que no perdí; en seguida, regalé 1/4 de lo que no regalé. ¿Qué parte del total aún me queda?

Resolución:

Por comodidad empezamos de lo último. Si regaló $\frac{1}{4}$ de lo que se regaló, es decir de lo que quedaba, entonces para evitar la fracción, a la parte que no regalo (queda) le damos un valor adecuado (por ejemplo: 12n , para que tenga cuarta $\left(\frac{1}{4}\right)$, tercera $\left(\frac{1}{3}\right)$ y mitad $\left(\frac{1}{2}\right)$, a la vez) que nos permita obtener la cantidad que se tenía al inicio. (Observa el esquema, es decir la reconstrucción, es de abajo hacia arriba).



$\therefore$ Nos piden: $\dfrac{\text{Queda al final}}{\text{Total (inicial)}} = \dfrac{12\,n}{30\,n} = \dfrac{2}{5}$

PROBLEMA 29

De un recipiente que está lleno de agua, saco 1/4 de lo que no saco. Luego se extrae 2/3 de lo que no se extrae. Si todavía quedan 24 litros, halle la capacidad del recipiente.

Resolución:

Del igual modo, procedemos como en el problema anterior, pero en este caso usaremos directamente el dato numérico que nos da el problema.

Saco (10 L): $\frac{1}{4}(40)=10$ L

Queda (no saco) (40 L): $\frac{2}{3}(24)=16$ L — Extrae; 24 L — No se extrae (lo que queda al final)

$\therefore$ Capacidad del recipiente: 40 + 10 = 50 litros

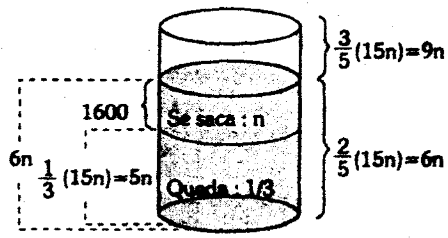
PROBLEMA 30

Después de sacar de un tanque 1 600 litros de agua, el nivel de la misma descendió de $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{3}$.

¿Cuántos litros habrá que añadir para llenar el tanque hasta sus 5/8?

Resolución:

Sea 15n el volúmen total pues debe tener quinta y tercia.



Se aprecia, entonces, que se saca: n del volumen total

Luego: 1 600 = n

$\therefore$ Volumen total = 15n = 15 (1600) = 2400

$\frac{5}{8}$ Volumen total $= \frac{5}{8}(15n) = \frac{5}{8}(24000) = 15000$

Como el volumen total es 24 000 litros, entonces sus 5/8 son 15 000 litros; ya que el tanque tiene 8 000 litros (1/3 del volumen total), habrá que añadirle 7 000 litros para llenarlo hasta sus 5/8.

PROBLEMA 31

En una fiesta, el mozo observa que con los $\frac{12}{35}$ del volumen de una botella de licor se llena las $\frac{3}{4}$ partes de una copa. En el bar sólo hay 7 botellas y el debe repartir 35 copas llenas. ¿Cuántas botellas le faltan para cumplir con su labor?

Resolución:

Volumen de la botella de licor : B

Volumen de la copa : C

Del enunciado $\frac{12}{35}B = \frac{3}{4}C$

$\rightarrow \frac{16}{35}B = C$ (una copa llena)

Luego: 35 C = 16 B

Por lo tanto, tiene que haber 16 botellas para llenar 35 copas y como sólo tiene 7 botellas, le faltan 16 – 7 = 9 botellas.

∴ La respuesta es 9 botellas

PROBLEMA 32

Un depósito está lleno de agua. Se saca la mitad y se llena de vino. La operación se realiza dos veces más. Halle la relación del agua y vino al final.

Resolución:

Sea V el volumen del depósito. Hemos visto, en la parte teórica y en el problema 20 como resolver este tipo de problemas. Por lo tanto, después de realizar la operación de sacado y llenado, lo que nos queda de agua al final es:

Agua: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}V\right)\right) = \frac{1}{8}V$

De vino habrá entonces : $\frac{7}{8}V$

$$\frac{\text{Agua}}{\text{Vino}} = \frac{\frac{1}{8}V}{\frac{7}{8}V} = \frac{1}{7}$$

∴ La relación es: $\frac{1}{7}$

En este caso, hemos trabajado con el agua debido a su extracción y fácil cálculo. Después, por diferencia, se halla el vino.

PROBLEMA 33

Después de perder los 3/11 de su fortuna, 1/8 del resto y los 2/7 del nuevo resto, una persona ganó S/ 19 2500 y de este modo su pérdida quedó reducida a 1/6 de su fortuna primitiva. ¿Cuál era aquella fortuna?

Resolución:

Si F es la fortuna inicial de la persona, trabajaremos con lo que va quedando después de perder.

Si pierde		Le queda
$\frac{3}{11}$	⇒	$\frac{8}{11}$
$\frac{1}{8}$	⇒	$\frac{7}{8}$
$\frac{2}{7}$	⇒	$\frac{5}{7}$

De acuerdo a lo anterior:

(la perdida final es sólo 1/6 de su fortuna)

$$\underbrace{\frac{5}{7}\left(\frac{7}{8}\left(\frac{8}{11}F\right)\right)}_{\text{lo que queda}} + \underbrace{192500}_{\text{lo que gana}} = \underbrace{\frac{5}{6}F}_{\text{lo que ahora tiene}}$$

Resolviendo la ecuación, F = 508 200

PROBLEMA 34

¿Cuántos valores puede tomar n, si 24/n es una fracción propia e irreductible, mayor que 3/5?

Resolución:
Del enunciado:

$$\frac{3}{5} < \frac{24}{n} < 1$$

$\frac{3}{5}$ → Por condición del problema
1 → (la fracción es propia)

Entonces: $\frac{3}{5} < \frac{24}{n} \Rightarrow n < 40$
Además: $\frac{24}{n} < 1 \Rightarrow 24 < n$
Juntando ambas desigualdades surge: $24 < n < 40$

Para que la fracción $\frac{24}{n}$ sea irreductible, "n" y 24 deben ser primos entre si.
Entonces, n no debe tener factor 2 ni factor 3, porque: $24 = 2^3 \times 3$
Luego:
n = 25; 29; 31; 35 ; 37;

∴ n tiene 5 valores

PROBLEMA 35
¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 35 existen?

Resolución:
Sea f: $\frac{a}{35} \Rightarrow a < 35$ (Porque la fracción es propia)
entonces, a: 1, 2, 3, ... 34 (34 valores)

Además, debe ser irreductible. Por esta razón a y 35 deben ser primos entre sí.
Entonces, a no sebe tener factor 5 ni factor 7 porque $35 = 5 \times 7$

Luego:
$\overset{\circ}{5}$: 5, 10, 15, 20, 25, 30
$\overset{\circ}{7}$: 7, 14, 21, 28

Notamos que del conjunto de 34 valores que teníamos hay que eliminar a 10 de ellos, porque no cumplen la condición del problema.

∴ Nos quedan: $34 - 10 = 24$ valores

⇒ Existen 24 fracciones.

PROBLEMA 36
La suma de 2 fracciones irreductibles es 2 y la suma de sus numeradores es 48. ¿Cuántos pares de fracciones cumplen esta condición?

Resolución:
Sean las fracciones:

$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ irreductibles

Por dato:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2$; $a+c=48$

Observación:
si:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ = Número Entero (Irreductibles)
$\Rightarrow b=d$

De la observación:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 2$

$\Rightarrow \frac{a+c}{b} = 2 \Rightarrow \frac{48}{b} = 2 \Rightarrow b = 24$

Entonces a y c no deben tener factores en común con 24 (las fracciones son irreductibles), además recuerda que $a + c = 48$.

Los pares de fracciones son:

$\frac{a}{24} \rightarrow \frac{1}{24}; \frac{5}{24}; \frac{7}{24}; \frac{11}{24}; \frac{13}{24}; \frac{17}{24}; \frac{19}{24}; \frac{23}{24}; \boxed{\frac{25}{24}; \frac{29}{24}; \frac{31}{24}; ...}$

$\frac{c}{24} \rightarrow \frac{47}{24}; \frac{43}{24}; \frac{41}{24}; \frac{37}{24}; \frac{35}{24}; \frac{31}{24}; \frac{29}{24}; \frac{25}{24}; \boxed{\frac{23}{24}; \frac{19}{24}; \frac{17}{24}; ...}$

Son 8 parejas

Nos interesan las parejas de fracciones y estas parejas ya han sido consideradas si se están repitiendo, entonces ya no se cuenta.

$\therefore$ 8 parejas cumplen la condición.

PROBLEMA 37

Calcule el número de fracciones con numeradores primos que están comprendidos entre $\frac{11}{13}$ y $\frac{5}{7}$, si se sabe que tienen denominador 91.

Resolución:

Si $\frac{n}{91}$ es la fracción pedida; entonces del enunciado:

$$\frac{5}{7} < \frac{n}{91} < \frac{11}{13}$$

Multiplicando a todo por 91:

$$\frac{5}{7}\times(91) < \frac{n}{\not{9}1}(\not{9}1) < \frac{11}{13}\times(91)$$

$$65 < n < 77$$

Por dato: n es un número primo.

Diremos que n=67, 71 y 73 son los únicos números primos que están comprendidos entre 65 y 77, es decir, n asume 3 valores. En conclusión habrá 3 fracciones que cumplan con las condiciones del problema. Estas son:

$$\frac{67}{91}; \frac{71}{91}; \frac{73}{91}.$$

Nota:

Los números primos son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,61

[67,71,73], 79,83, 89, ...

PROBLEMA 38

Los $\frac{3}{4}$ del volumen de un barril más 7 litros es vino puro y $\frac{1}{3}$ del barril menos 20 litros es agua.

¿Qué fracción del vino puro representa la cantidad de agua?

Resolución:

Sea V el volumen del barril.

$$\underbrace{\frac{3}{4}(V) + 7}_{\text{vino}} \qquad \underbrace{\frac{1}{3}(V) - 20}_{\text{agua}}$$

Luego:

$$\overbrace{\left[\frac{3}{4}(V) + 7\right]}^{\text{Volumen vino}} + \overbrace{\left[\frac{1}{3}(V) - 20\right]}^{\text{Volumen agua}} = \overbrace{V}^{\text{Volumen total}}$$

Resolviendo: V = 156

Entonces:

vino es $\frac{3}{4}(156) + 7 = 124$ litros

agua es $\frac{1}{3}(156) - 20 = 32$ litros

$\therefore$ Nos piden: $\frac{\text{agua}}{\text{vino}} = \frac{3\not{2}}{12\not{4}} = \frac{8}{31}$

PROBLEMA 39

Al dividir un terreno en dos partes, resulta que los $\frac{2}{5}$ de la primera parte mide lo mismo que los $\frac{3}{5}$ de la segunda. ¿Que fracción de los $\frac{2}{3}$ de la segunda parte representa $\frac{1}{2}$ de la primera?

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{2}{\not 5}(1° \text{ parte}) = \frac{3}{\not 5}(2° \text{ parte})$$

Es decir:

(1ra. parte) es una cantidad como 3.

(2da. parte) es una cantidad como 2.

Luego:

Nos piden:

$$\frac{\frac{1}{2}\ (\text{1ra. parte})}{\frac{2}{3}\ (\text{2da. parte})} = \frac{\frac{1}{2}(3)}{\frac{2}{3}(2)} = \frac{9}{8}$$

∴ La respuesta es $\frac{9}{8}$

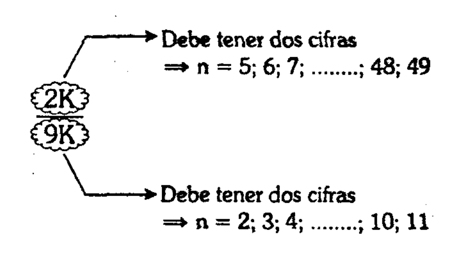
PROBLEMA 40

¿Cuántas fracciones equivalentes a $0,\widehat{2}$ existen tales que sus términos sean de 2 cifras y que la suma de dichos términos sea un número impar?

Resolución:

Del dato: $0,\widehat{2} = \frac{2}{9}$

Si buscamos fracciones equivalentes, entonces tendremos: $\frac{2K}{9K}$; donde $K \in \mathbb{Z}^+$



Para que los términos sean de dos cifras K debe tomar valores a partir de 5 hasta 11, y además **K** debe ser impar, puesto que la suma de términos (11K), por condición, debe ser impar.

Entonces:

$$K = 5, 7, 9, 11$$

∴ Son 5 fracciones.

Problemas Propuestos

1. Simplifique

$$E = \left[2\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \times \frac{7}{3\frac{4}{5}} - \frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right] \div 1\frac{77}{228}$$

A) $\frac{15}{19}$ B) $\frac{31}{19}$ C) 3
D) $\frac{85}{19}$ E) $\frac{3}{5}$

2. Si la fracción: $\frac{1}{\overline{AL}}$ genera el decimal: $0,\widehat{0(A-1)L}$, calcule el valor de:

$$\left(\frac{\overline{AL} + \overline{LA}}{\underbrace{\overline{AL} + \overline{AL} + \ldots + \overline{AL}}_{(A+L+1)\text{ veces}}}\right)^{-1}$$

A) 73 B) 7,3 C) 38
D) 3,7 E) 78

3. Si $x, y, z \in \mathbb{N}$, halle $x+y+z$
Si: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, sabiendo que: $x \neq y \neq z$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 37 E) 14

4. "Amable y querida Lilavati de dulces ojos dime cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las tres cuartas partes del producto anterior, dividido por 7, disminuido en dos tercios del cociente anterior, multiplicado por el número inicial disminuido en 52 y después de la extracción de la raíz cuadrada, adicionado en 8 y dividido por 10, dé como resultado final 2".

A) 4 B) 14 C) 84
D) 28 E) 21

5. Un número racional irreductible $x = \frac{p}{q}$ tiene las siguientes propiedades:

I. $\frac{3}{5} < x < \frac{4}{5}$

II. Si se divide el intervalo $\left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ en 5 partes iguales, el número x está en el punto medio del tercer intervalo.

Halle p+q.

A) 85 B) 51 C) 34
D) 68 E) 17

6. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de denominador 900 existen?

A) 30 B) 320 C) 240
D) 120 E) 560

7. Halle la fracción propia e irreductible $\frac{m}{n}$, sabiendo que la fracción equivalente a $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$ tiene como producto de términos a 840

A) 7/9 B) 4/5 C) 3/10
D) 3/7 E) 4/7

8. Si a los dos términos de una fracción ordinaria irreductible, se le suma el cuádruple del denominador, a cuyo resultado se le resta la fracción original, entonces se obtiene la misma fracción. Halle la fracción.

A) 9/13 B) 3/4 C) 2/3
D) 1/3 E) 4/9

9. El número de alumnos de una aula es menor que 240 y mayor que 100. Se observa que los 2/7 del total usan anteojos y los 5/13 son alumnos de ciencia. Si los conjuntos de alumnos mencionados son disjuntos, ¿cuál es la suma de los alumnos que usan anteojos con los de la especialidad de ciencias?

A) 50 B) 72 C) 110
D) 122 E) 182

10. Los 2/3 más de la edad de Alfredo es igual a los 3/5 menos de la edad de Sonia. ¿Qué fracción representa la edad de Sonia respecto de la edad de Alfredo?

A) 10/9 B) 25/6 C) 3/5
D) 9/10 E) 25/3

11. ¿Cuál es la fracción irreductible que dividida entre su recíproco da como resultado el decimal 0,751111... ?

A) 11/15 B) 26/14 C) 2/7
D) 13/20 E) 13/15

12. Determine la última cifra del período de cada fracción y luego suma estas cifras.

$$\frac{1}{7};\frac{1}{17};\frac{1}{27};\ldots;\frac{1}{187}$$

A) 135 B) 157 C) 140
D) 133 E) 121

13. Si la siguiente fracción irreductible cumple:

$$\frac{a}{\overline{mn}} = 0,\overline{(2n)\left(\frac{n}{2}\right)(\widehat{3n})}$$

Calcule el valor de $a + m + n$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 10 E) 12

14. Determine las dos últimas cifras del período de la fracción $\frac{3}{151}$. De como resultado la suma de las cifras.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

15. ¿En cuánto excede la fracción decimal periódica pura 0,7777 . . . a la fracción decimal periódica mixta 0,6111 . . .?

A) 1/5 B) 5/6 C) 1/6
D) 2/3 E) 2/5

16. Halle el menor valor de n en:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)=0,\widehat{b}$$

Si se sabe que $b + n < 10$

A) 3 B) 7 C) 9
D) 5 E) 2

17. Dos vehículos con idénticos depósitos de gasolina consumen a ésta uniformemente en 4 y 5 horas respectivamente. ¿Después de cuánto tiempo el contenido del depósito de uno será la mitad del contenido del otro?

A) $2\frac{1}{3}$ B) $1\frac{2}{3}$ C) $3\frac{1}{3}$
D) $2\frac{2}{3}$ E) $3\frac{2}{3}$

18. Dos personas arriendan una finca. El primero ocupa los 5/13 de la finca y paga 40 500 soles de alquiler al año. ¿Cuánto paga de alquiler semestral el segundo?

A) 32400 B) 64500 C) 16125
D) 54350 E) 24230

19. Se tienen 2 recipientes; el primero contiene 4ℓ de agua y 8ℓ de leche, el segundo contiene 8ℓ de agua y 4ℓ de leche. Si se extrae 3 ℓ de cada uno simultáneamente para ser intercambiados, ¿qué cantidad de agua hay en el primer recipiente ahora?

A) 7 B) 6 C) 4
D) 3 E) 5

20. José empezó a jugar casino con cierta cantidad de dinero perdiendo el primer juego perdió 1/4 de su dinero, en el segundo juego ganó S/ 5, en el tercer juego perdió 1/7 de lo que tenía hasta ese momento y, en el último juego gana S/ 3, retirándose con S/ 15. ¿Cuánto ganó o perdió José? ¿Qué fracción de lo que tenía al inicio representa la cantidad final?

A) Perdió; 5/6 B) Ganó; 5/2 C) Ganó; 5/3
D) Ganó; 5/4 E) Perdió;5/5

21. Mientras que un estanque está vacío, se abren 2 llaves y un desagüe que lo llenan y vacían en 3, 6 y 4 horas respectivamente. ¿En qué tiempo se llenará el estanque?

A) 7 h B) 2 h C) 4 h
D) 5 h E) 6 h

22. Un tanque puede ser llenado por una bomba en 5 horas y por una segunda bomba en 4 horas. Si una llave en el fondo lo puede vaciar en 10 horas, ¿en cuánto tiempo se llenaría el tanque con las 3 bombas funcionando a la vez?

A) 7 horas B) 5 horas C) $2\frac{6}{7}$ horas
D) 1 hora E) 3 horas

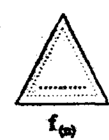
23. Un caño vierte X_{LT} en Y horas, y otro vierte también W_{LT} en Z horas. Si, al estar vacío un depósito y actuando los dos juntos lo llenan en T horas, calcule la capacidad del depósito.

A) Txyz B) $\frac{Zw}{xy}$
C) Tuz
D) $\frac{w}{x+y+z+T}$ E) $\frac{T(xz+yw)}{yz}$

24. La quinta parte de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de crisantemo; la tercera parte en una rosa, el triple de la diferencia entre estos dos números vuela sobre un clavel y una abeja vuela indecisa de una flor de pandamus a un oloroso jazmín. ¿Cuál es el número de abejas?

A) 26 B) 17 C) 15
D) 31 E) 20

25. En una noche estrellada, pensaba:
"Veo en el cielo azul y triste, tantas estrellas como el doble del inverso multiplicativo de $A_{(n)}$". ¿Cuántas estrellas he visto si n=5?



$f_{(1)}$ $f_{(2)}$ $f_{(3)}$ .... $f_{(n)}$

Se sabe además que $A_{(K)}$ representa la fracción del área del menor triángulo respecto al área total en la figura $f_{(K)}$.

A) 2761 B) 1999 C) 2001
D) 1315 E) 2048

26. Se reparte una cantidad de dinero entre 2 personas; al primero le corresponde $\frac{1}{3}$ de lo que no le corresponde, más la tercera parte de la diferencia entre lo que recibe el segundo y el primero. ¿Qué parte del total tiene el primero?

A) 7/20 B) 6/7 C) 5/12
D) 2/5 E) 6/13

27. De un recipiente que está lleno $\frac{1}{7}$ de lo que no está lleno, se derrama $\frac{1}{4}$ de lo que no se derrama; luego de lo que queda se extrae la mitad de lo que no se extrae. ¿Qué parte del volumen total del recipiente queda con líquido?

A) 7/13 B) 2/7 C) 2/5
D) 6/11 E) 1/15

28. Si se sabe que la edad actual de Yuli es $\overline{a(2a+7)}$ y la de Milagros es 12 años, y que cuando Milagros nació Yuli tenía "x" años. Determine la última cifra del período de cada fracción y luego suma estas cifras.

$$\underbrace{\frac{1}{x}, \frac{1}{x+10}, \frac{1}{x+20}, \frac{1}{x+30}, \ldots}_{\overline{ax} \text{ términos}}$$

A) 119 B) 106 C) 99
D) 101 E) 88

29. Dos carpinteros, Pedro y Ángel, deben hacer una obra. Si trabajaran solos se demorarían 6 y 12 días respectivamente. Calcule el tiempo que demorarían en hacer toda la obra si trabajaran juntos.

A) 2 días B) 4 días C) 6 días
D) 8 días E) 10 días

30. Un ladrón acaba de robar la billetera de un hombre y luego de caminar 56 pasos, empezó a perseguirlo el dueño de la billetera. Si el ladrón da 9 pasos mientras el dueño da 7, pero 3 pasos de éste equivalen a 5 del ladrón, ¿cuántos pasos dará el ladrón para ser alcanzado por la víctima?

A) 158 B) 132 C) 124
D) 189 E) 147

31. ¿A qué hora los 2/3 de lo que queda del día es igual al tiempo transcurrido?

A) 9:30 a.m. B) 9:36 a.m. C) 10:36 a.m.
D) 9:03 a.m. E) 10:36 a.m.

32. El intervalo $\left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right]$ se divide en 5 partes iguales y x se encuentra en el punto medio del tercer intervalo. Si x es una fracción irreductible, halle la suma de sus términos.

A) 13 B) 6 C) 7
D) 26 E) 8

33. Dos hermanos deciden llenar con baldes de igual volumen 3 cilindros de 80, 90 y 120 litros. Calcule el número mínimo de baldes con que llenaron los cilindros cada hermano, si el llenado de cada cilindro se realizó con un número entero de baldes.

A) 14 B) 15 C) 18
D) 29 E) 28

34. Los efectos que produjo un ciclón en los árboles de un bosque fueron devastadores tanto es así que la cantidad de árboles sanos aumentada en 2/3 era igual a la mitad de los 3/5 de 1000 . Se desea averiguar el número de árboles que había en el bosque antes del ciclón, sabiendo que los 2/7 de este número fueron arrancados a cuajo, que 1/12 quedaron destruidos, 1/4 descortezados y 1/6 quedaron sin ninguna hoja.

A) 840 B) 250 C) 360
D) 870 E) 980

35. Dadas las fracciones irreductibles a/b y c/d; se cumple: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 5$

Además d es el menor número que tiene 4 divisores. Calcule la menor diferencia de a y c.

A) 1 B) 3 C) 4
D) 8 E) 16

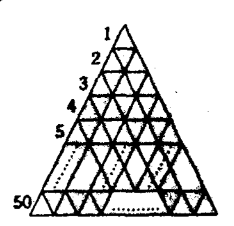
36. ¿Cuál es la relación de la fracción transcurrida de la semana a la fracción transcurrida del día cuando son las 6a.m. del miércoles?

A) 9/28 B) 9/4 C) 1/4
D) 1/28 E) 9/7

37. La superficie de África representa los 22/7 de la superficie de Europa. Se sabe además que la superficie de África es de 2 970 0000 km^2. Calcule la superficie de Europa.

A) 9410 000 B) 9430 000
C) 9450 000
D) 9400 000 E) 9470 000

38. En la figura mostrada:



¿Qué parte del total es el área de la región sombreada?

¿Qué parte es el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada?

A) $\frac{49}{100}; \frac{51}{100}$ B) $\frac{49}{100}; \frac{49}{51}$

C) $\frac{51}{49}; \frac{49}{100}$

D) $\frac{41}{100}; \frac{61}{49}$ E) $\frac{49}{100}; \frac{52}{100}$

39. Calcule la última cifra de A:

$A = \overline{abc}^4 + \overline{ba}^3 + b^2$

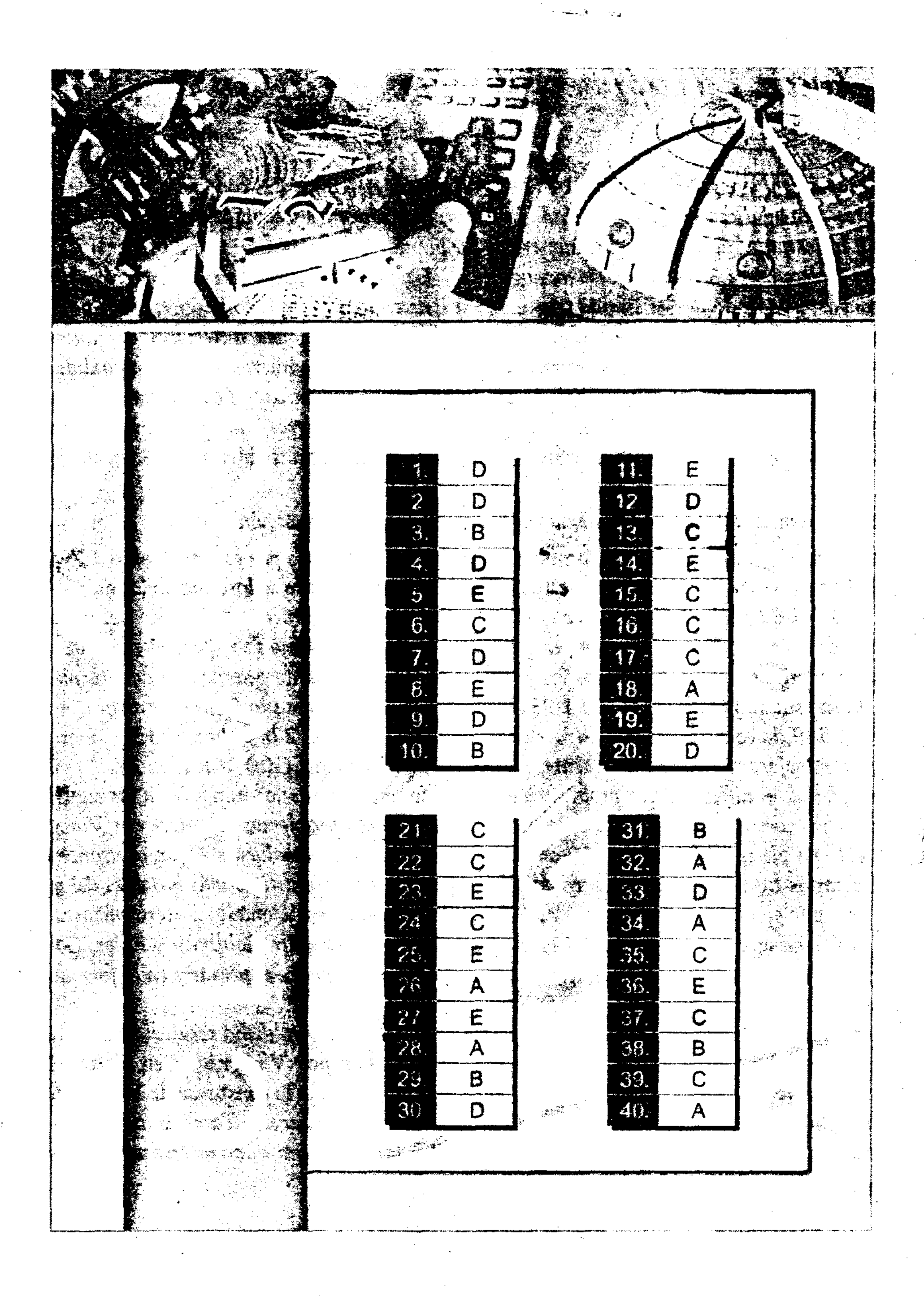
Si: $a = b+1$; $c = a + 1$; $0,\overline{\ldots mb} = \frac{1}{5^{212}}$

Además el valor de C es máximo.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

40. Se tiene un tonel lleno de 324 litros de vino puro. Se saca 1/3 del contenido y se completa con agua. ¿Cuántas veces más se debe repetir esta operación para que al final quede 260 litros de agua?

A) 4 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7



1.	D	11.	E	21.	C	31.	B
2.	D	12.	D	22.	C	32.	A
3.	B	13.	C	23.	E	33.	D
4.	D	14.	E	24.	C	34.	A
5.	E	15.	C	25.	E	35.	C
6.	C	16.	C	26.	A	36.	E
7.	D	17.	C	27.	E	37.	C
8.	E	18.	A	28.	A	38.	B
9.	D	19.	E	29.	B	39.	C
10.	B	20.	D	30.	D	40.	A

Ivan Matveecich Vinográdov

Iván Matvévich Vinográdov nació el 14 (2) de setiembre de 1 891, y es considerado uno de los más célebres matemáticos de la actualidad. Las investigaciones de Vinográdov están directamente ligadas a los estudios de teoría de los números y ha publicado más de 140 trabajos científicos entre los cuales merecen especial atención las monografías: ***Un método nuevo en la teoría analítica de los números y Método de las sumas trigonométricas en la teoría de los números.*** *En estas dos monografías se condensa los resultados de todas las investigaciones anteriores del autor, que contribuyeron a la creación de un nuevo método en la teoría de los números. En la actualidad, éste se cor.oce como el método de Vinográdov de las sumas trigonométricas. Los fundamentos de este método fueron creados por él en 1 934. Este es un método muy general, muy profundo y sumamente fecundo, mediante el cual Vinográdov consiguió resolver los problemas clásicos de Golbach, Waring y otros más.*

Mucha atención prestó al problema de la resolución de la ecuación: $x_1^n + \ldots + x_r^n = N$ en números enteros x_i donde el llamado problema de Waring, planteado por éste en el años 1 770. En el año 1 909, D. Hilbert demuestra que esta ecuación es resoluble para valores acotados de r. En los años 1 919 – 1 920, Hardy y Littlewood estudiaron el comportamiento asintótico del número de soluciones de las ecuaciones de Waring para $r \geq n\, 2^n$. El valor mínimo de r, para el cual la ecuación de Waring admite solución para todos los números N suficientemente grandes, se denota mediante G(n). Para esta magnitud, en el año 1 934, Vinográdov obtuvo cota la $G(n) < n\,(3\ln n + 11)$ y en el año 1 959, la cota más exacta $G(n) < n\,(2\ln n + 4\ln\ln n + 2\ln\ln\ln n + 13)$. Estas colas no se pueden mejorarse considerablemente, puesto que es sabido que $G(n) > n$ $(n \geq 2)$.

En general, es difícil indicar problemas de la teoría analítica de los números, a los cuales él no haya prestado atención alguna. Por otra parte algunos de los problemas resueltos por Vinográdov habían sido ya planteados más de 150 años atrás, sin encontrar resolución alguna durante dichos años, a pesar de los esfuerzos realizados para resolverlos por los científicos más notables del mundo. Tales son, por ejemplo, los problemas de Waring y Goldbach mencionados anteriormente. Este último problema apareció en el año 1 742 en la correspondencia entre Goldbach y Euler. Goldbach manifestó la hipótesis de que todo número entero mayor que tres podía expresarse en la forma de una suma con no más de tres números primos.

Todos los intentos de los grandes matemáticos de resolver este problema resultaban inútiles. En lo fundamental, este problema fue resuelto por primera vez por Vinográdov en el año 1 937, demostrando que todo número impar, mayor que cierto número N_0 (la constante de Vinográdov), se expresa en la forma de una suma de no más de tres números primos. También demostró que el número de expresiones I(N) de un número impar N>0 en forma de una suma de tres números primos, $N = p_1 + p_2$ se expresa por la fórmula asintótica.

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^2} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3,5-\varepsilon}}\right),$$

donde $S(N) > 0,6$, $r = \ln N$ y $\varepsilon > 0$ es un número arbitrariamente pequeño.

El Tanto por Cuanto

Muchos aspectos de la matemática surgieron de la actividad diaria dedicada al comercio. Uno de ellos, el tanto por cuanto, (y su caso particular: el tanto por ciento) tiene una gran importancia en el ámbito mercantil y estadístico.

Lectura 10

El rebaño del Sol

Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.n.e.)

Arquímedes, desafiando a los matemáticos de Alejandría les propuso el siguiente problema: "El Sol tenía una ganadería de diferentes colores: blancos, zainos, manchados y castaños. El número de toros manchados era inferior al número de toros blancos en 1/2 + 1/3 de veces el número de toros zainos, e inferior al número de toros zainos en 1/4 + 1/5 de veces el número de toros castaños, e inferior al número de toros castaños en 1/6 + 1/7 de veces el número de toros blancos.

Por otra parte, el número de vacas blancas era 1/3 + 1/4 de veces el número total de ganado zaino (vacas + toros), mientras el número de vacas zainas era 1/4 + 1/5 de veces el número de ganado castaño; el número de vacas castañas era 1/5 + 1/6 de veces el número de ganado manchado y el número de vacas manchadas era 1/6 + 1/7 de veces el número de ganado blanco. ¿Cuántos toros y vacas había de cada color?

En nuestros tiempos, resolveríamos el problema mediante un sistema de ecuaciones de primer grado, lo cual no era conocido en esa época.

La solución de Arquímedes fue la siguiente:

GANADO	TOROS	VACAS
manchados	331 950 960	435 137 040
blancos	829 318 560	576 508 800
zainos	596 841 120	391 459 680
castaños	588 644 800	281 265 600

Es difícil creer que Arquímedes pudiera haber manejado estos números valiéndose del rudimentario sistema de numeración de esa época. Por lo tanto, debió obtener sus resultados mediante un sistema privado similar al actual.

FUENTE : El mundo de la matemática Tomo 1

Objetivos

1. Manejar los conceptos básicos para la resolución de estos tipos de problemas.
2. Comprender la relación de la parte con el todo.
3. Dominar un esquema adecuado de como enfocar los problemas tipos compra-venta.
4. Relacionar los conceptos de este capítulo con aspectos de la vida cotidiana.

Introducción

Durante muchos años, desde el origen comercial (trueques, pagos con dinero, etc.), el hombre utilizó en forma práctica la comparación de cantidades respecto a otra cantidad fija; generalmente cuando realizaba préstamos o negocios en sus diversas formas.

Veamos a continuación algunos ejemplos tomados del mundo cotidiano:

- *Una campesina desea encargar sus 200 conejos a su mejor vecina para que los cuide durante los 6 meses que se irá a la capital, dando a cambio de su servicio 4 conejos **por cada 7 conejitos que nazcan** . . . (el 4 por 7 : 4/7)*

  (Este tipo de interés muy incipiente aún se mantiene todavía hasta la actualidad en diversos pueblitos muy alejados de la ciudad).
- *Un mercader presta 100 monedas de oro con la condición de que se le entregue 2 moneditas de plata por cada 20 días que transcurran, siendo el plazo del préstamo pactado en 120 días.*

  (Hoy en día este ejemplo se presenta a niveles bancarios y con diversas condiciones lo que prueba su evolución).

A través de la historia han ido evolucionando estos conceptos del tanto por cuanto y han llegado a estandarizarse cuando la cantidad fija sobre la cual se compara es 100, por ser el más fácil de recordar, expresarlo y operarlo.

Siendo común escuchar o leer expresiones como:

- *El costo de vida aumenta en doce por ciento según el INEI, en el último trimestre.*
- *Los sueldos de los maestros sólo cubren el 30% de la canasta básica familiar.*
- *El Estado aumentó 2% el pago por concepto de seguro social a los maestros.*
- *La población se incrementó en 40% respecto a la del año 1 980.*

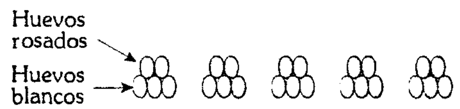
Es por ello muy importante conocer esta parte de las matemáticas para comprender muchos aspectos de nuestra vida diaria, tanto en el comercio y la ciencia en general.

En adelante desarrollaremos éste capítulo desde un principio, deduciendo cada aspecto teórico y reforzándolo con ejercicios resueltos y propuestos.

EL TANTO POR CUANTO

Para empezar, veamos un ejemplo:

Un comerciante de huevos acostumbra agrupar sus productos de 5 en 5, de modo que en cada grupo de 5 haya 2 huevos rosados y 3 huevos blancos. Como se muestra en el siguiente gráfico:

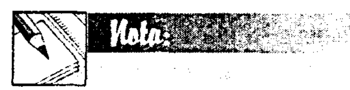


esto significa que:

- **2 de cada 5** huevos son rosados.
- El **2 por 5** del total de huevos son rosados y visto como fracción, significa que:

  $\frac{2}{5}$ **del total** de huevos son rosados.

Luego se deduce que $\boxed{\text{el 2 por 5} <> \frac{2}{5}}$



El 2 por 5 de una cantidad equivale a 2/5 de dicha cantidad; es decir, dividimos la cantidad en 5 partes iguales y tomamos 2 de esas partes.

$\Rightarrow$ el 2 por 5 de C = $\frac{2}{5}$(C)

Entonces, al comparar una cantidad respecto de otra, podemos expresar el resultado de esa comparación como una fracción.

- Ahora consideremos una regla dividida en 8 partes iguales, de la cual se va a tomar 3 de aquellas partes:

← total <> 8 partes iguales →

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3 partes

$\Rightarrow$ Las 3 partes tomadas equivalen al **3 por 8** del total es decir los $\frac{3}{8}$ del total.

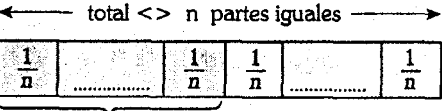
$\therefore$ El **3 por 8** $<> \frac{3}{8}$

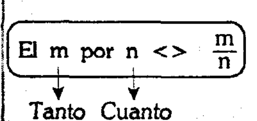
También podemos sostener:

- El 5 por 40 $<> \frac{5}{40}$
- El 30 por 80 $<> \frac{30}{80}$
- El 25 por 70 $<> \frac{25}{70}$
- El 20 por 100 $<> \frac{20}{100}$

En general:

Al dividir una cantidad en n partes iguales, podemos tomar m de estas partes, y representarlo gráficamente así:





El m por n de una cantidad significa que tomamos **m** partes de un total de **n** partes iguales en que fue dividida la cantidad, donde **n** es entero positivo y **m** es racional positivo.

Ejemplos:

Calcule:

a. El 7 por 9 de 45

$\Rightarrow \frac{7}{9}(45) = 35$

b. El 2 por 3 de 15

$\Rightarrow \frac{2}{3}(15) = 10$

c. El 1,5 por 20 de 80

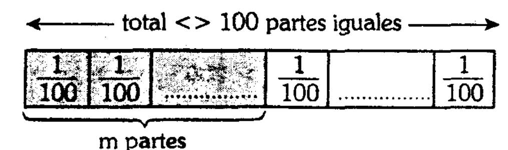
$\Rightarrow \frac{1,5}{20}(80) = 6$

d. El 3 por 10 del 17 por 20 de 200

$\Rightarrow \frac{3}{10} \times \frac{17}{20}(200) = 51$

EL TANTO POR CIENTO (%)

En particular, si dividimos a una cantidad en 100 partes iguales y tomamos cierto número **m** de esas partes, nos estamos refiriendo entonces al tanto por ciento; luego:



$\Rightarrow$ Las **m** partes tomadas equivalen **al m por 100** del total o **al m por ciento** del total, es decir, los $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{100}}$ del total .

$\Rightarrow$ **El m por ciento** es igual a $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{100}}$

$\therefore$ $\boxed{\text{El m\%} = \frac{m}{100}}$

Entonces, podemos afirmar lo siguiente:

- El 3% $<>$ $\frac{3}{100}$ $<>$ 0,03
- El 32% $<>$ $\frac{32}{100}$ $<>$ 0,32
- El 20% $<>$ $\frac{20}{100}$ $<>$ 0,2
- El 200% $<>$ $\frac{200}{100}$ $<>$ 2

Como podemos apreciar, un tanto por ciento se puede expresar como un número racional positivo, es decir, todo tanto por ciento tiene su equivalente que puede ser un número fraccionario, un número decimal o un número entero.

EQUIVALENCIAS

Hace un momento hemos visto que el 20% $<>$ $\frac{1}{5}$ $<>$ 0,2; esto significa que **el 20% de una cantidad** C es equivalente a **la quinta parte de dicha cantidad**, es decir:

$$20\%\ C = \frac{1}{5}\ (C) = 0{,}2C$$

Es oportuno que conozcas algunas equivalencias para que las uses adecuadamente en los problemas y también en tu vida diaria. Y fíjate que la equivalencia de un tanto por ciento no sólo es con una fracción, sino con un número decimal.

En general:

> Un tanto por ciento tiene su equivalente con un número racional positivo y viceversa.

Veamos otro ejemplo: el $300\% < > \frac{300}{100} < > 3$

Esto significa que **el 300% de una cantidad** es equivalente **al triple de la cantidad**, es decir: $300\%\ C = 3C$

Ahora, conozcamos más equivalencias:

- $1\% < > \frac{1}{100} < > 0{,}01$
- $5\% < > \frac{5}{100} < > \frac{1}{20} < > 0{,}05$
- $10\% < > \frac{10}{100} < > 0{,}1$
- $25\% < > \frac{25}{100} < > \frac{1}{4} < > 0{,}25$
- $50\% < > \frac{50}{100} < > \frac{1}{2} < > 0{,}5$
- $75\% < > \frac{75}{100} < > \frac{3}{4} < > 0{,}75$

$$100\% < > \frac{100}{100} < > 1$$

Nota:

Cuando decimos **el 100% de una cantidad C,** significa que dividimos a la cantidad en 100 partes iguales y que tomamos las 100 partes. Es decir, **tomamos a C en su totalidad**.

$\Rightarrow$ El 100% C = C

Por lo tanto, **toda cantidad representa el 100% de sí misma.**

Veamos ahora **cómo conseguimos el equivalente en tanto por ciento de un número positivo cualquiera.**

Por ejemplo, ¿a qué tanto por ciento equivale $\frac{3}{4}$?

Para responder razonamos así: como sabemos que $\frac{1}{4}$ equivale a 25%, entonces $\frac{3}{4}$ (que es el triple de $\frac{1}{4}$) equivaldrá a 75%. Es decir:

$$\frac{1}{4} < > 25\% \Rightarrow \frac{3}{4} < > \boxed{75\%}$$

Pero, ¿de qué otra manera podemos conseguir el equivalente de $\frac{3}{4}$ en tanto por ciento?

Para responder recordemos que si multiplicamos un número por **1** se obtiene el mismo número, pero sabemos que **1 < > 100%**, entonces:

$$\frac{3}{4} < > \frac{3}{4} \times \mathbf{1} < > \frac{3}{4} \times \mathbf{100\%} < > \boxed{75\%}$$

> Entonces, para expresar un número cualquiera en tanto por ciento se multiplica al número por **100%.**

Por ejemplo:

- $\frac{2}{5} < > \frac{2}{5} \times \mathbf{100\%} < > 40\%$
- $\frac{7}{2} < > \frac{7}{2} \times \mathbf{100\%} < > 350\%$
- $\frac{1}{8} < > \frac{1}{8} \times \mathbf{100\%} < > 12{,}5\%$
- $\frac{1}{6} < > \frac{1}{6} \times \mathbf{100\%} < > 16\frac{2}{3}\% < > 16{,}\widehat{6}\%$
- $\frac{1}{9} < > \frac{1}{9} \times \mathbf{100\%} < > 11\frac{1}{9}\% < > 11{,}\widehat{1}\%$
- $0{,}42 < > 0{,}42 \times \mathbf{100\%} < > 42\%$
- $0{,}08 < > 0{,}08 \times \mathbf{100\%} < > 8\%$
- $0{,}18 < > 0{,}18 \times \mathbf{100\%} < > 18\%$

- $2{,}051 <> 2{,}051 \times \mathbf{100\%} <> 205{,}1\%$
- $\frac{1}{3} <> \frac{1}{3} \times \mathbf{100\%} <> 33\frac{1}{3}\% <> 33{,}\widehat{3}\,\%$

Ejemplo:

Si de un recipiente que contiene 36 litros de agua se extrae el $33{,}\widehat{3}\,\%$ de su contenido, ¿cuántos litros quedan?

Resolución:

Se extrae el $33{,}\widehat{3}\,\%$ de 30L.

Pero sabemos que:

$$33{,}\widehat{3}\,\% <> \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Se extrae: $\frac{1}{3}(30) = 10L$

$\therefore$ Quedan: $30 - 10 = \boxed{20L}$

Observación:

- ¿Qué significa y cómo se calcula el m% de una cantidad C?
  Significa que a la cantidad C la dividimos en 100 partes iguales y que tomamos m de esas partes.
  Se entiende que cada parte es $\frac{1}{100}$ de C.
  Para calcular hacemos lo siguiente:

$$\boxed{\text{El m\% de C} = \frac{m}{100}(C)}$$

- Al resultado de aplicar el tanto por ciento de una cantidad, le llamaremos porcentaje.

Ejemplos:

a. Calcule los siguientes porcentajes:

1. El 28% de 150

$$28\%(150) = \frac{28}{100}(150) = \boxed{42}$$

2. El 118% de 300

$$118\%(300) = \frac{118}{100}(300) = \boxed{354}$$

3. El 25% del 30% de 120

$$25\% \times 30\% \times (120) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{10}(120) = \boxed{9}$$

4. El $66{,}\widehat{6}\,\%$ del 10% de 60

$$66{,}\widehat{6}\,\% \times 10\%(60) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{10}(60) = \boxed{4}$$

5. El (a+b)% de (a–b)

$$(a+b)\%\,(a-b) = \frac{(a+b)}{100}(a-b) = \boxed{\frac{a^2-b^2}{100}}$$

b. Halle el número en cada caso:

1. **Seis es el 15%, ¿de qué número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $15\% \, . \, x = 6$

$\frac{15}{100} \, . \, x = 6$

$\therefore \boxed{x = 40}$

2. **Nueve es el 12,5%, ¿de qué número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $12{,}5\% \, . \, x = 9$

$\frac{12{,}5}{100} \, . \, x = 9$

$\frac{1}{8} \, . \, x = 9$

$\therefore \boxed{x = 72}$

3. **Siete es el 10% del 50% de un número. ¿Cuál es el número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $10\% \,.\, 50\% \,.\, x = 7$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = 7$$

$$\therefore \boxed{x = 140}$$

4. **¿Cuarenta es el 20% de qué número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $20\% \,.\, x = 40$

$$\frac{1}{5} x = 40$$

$$\therefore \boxed{x = 200}$$

5. **¿Cinco es el $16,\widehat{6}$ % de qué número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $16,\widehat{6}\ \%\ x = 5$

$$\frac{1}{6} \cdot x = 5$$

$$\therefore \boxed{x = 30}$$

c. Halle el tanto por ciento, en cada caso:

1. **¿Qué tanto por ciento de 82 es 41?**

Sea el $x\%$

$\Rightarrow$ $x\%\ 82 = 41$

$$\frac{x}{100} \cdot 82 = 41$$

$$x = 50$$

$\therefore$ Es el $\boxed{50\%}$

2. **¿Qué tanto por ciento de 36 es 27?**

$\Rightarrow$ $x\%\ 36 = 27$

$$\frac{x}{100}\ 36 = 27$$

$$x = 75$$

$\therefore$ Es el $\boxed{75\%}$

3. **¿Qué tanto por ciento es a+1 respecto de a^2-1 ?** $(a \neq 1)$

$\Rightarrow$ $x\%\ (a^2-1) = a+1$

$$\frac{x}{100}\cancel{(a+1)}(a-1) = \cancel{a+1}$$

$$x = \frac{100}{a-1}$$

$\therefore$ Es el $\boxed{\left(\frac{100}{a-1}\right)\%}$

Las preguntas 1, 2 y 3 también se pueden contestar usando relación parte-todo que veremos más adelante.

d. Halle el número en cada caso:

1. **¿De qué número, 27 es el 10% menos?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $27 = x - 10\%\, x$ (27 es igual al número menos 10% del número)

$$27 = 90\%\, x$$

$$27 = \frac{9}{10} x$$

$$\therefore \boxed{x = 30}$$

2. **¿Sesenta es el 20% más, de qué número?**

Sea x el número.

$\Rightarrow$ $60 = x + 20\%\, x$ (60 es igual al número más 20% del mismo)

$$60 = 120\%\, x$$

$$60 = \frac{6}{5} x$$

$$\therefore \boxed{x = 50}$$

3. **¿De qué número 48 es el 4% menos?**

Sea x el número

$\Rightarrow$ $48 = x - 4\% x$

$48 = 96\% x$

$48 = \frac{96}{100}x$

$\therefore$ $\boxed{x = 50}$

4. **¿De qué número 92 es el 15% más?**

Sea x el número

$\Rightarrow$ $92 = x + 15\% x$

$92 = 115\% x$

$92 = \frac{23}{20} x$

$\therefore$ $\boxed{x = 80}$

5. **¿Veintiocho es el $33\frac{1}{3}\%$ más de qué número?**

Sea "x" el número

$\Rightarrow$ $28 = x + 33\frac{1}{3}\% x$

$28 = x + \frac{1}{3}x$

$28 = \frac{4}{3} x$

$\therefore$ $\boxed{x = 21}$

6. **¿Treintaiseis es el 20% menos de qué número?**

Sea "x" el número

$\Rightarrow$ $36 = 80\% x$

$36 = \frac{4}{5}x$

$\therefore$ $\boxed{x = 45}$

OPERACIONES CON TANTO POR CIENTO

En determinadas situaciones se nos puede presentar la necesidad de sumar o restar dos o más tantos por ciento referidos a una misma cantidad. En tales casos a veces es conveniente reducir toda la expresión a un solo tanto por ciento (referido a la misma cantidad) como veremos a continuación.

Ejemplos:

a. Reduzca:

1. $10\%V + 25\%V = 35\%V$
2. $40\%I - 15\%I - 6\% I = 19\%I$
3. $E + 70\% E = 170\% E$
   $(E = 100\% E)$
4. $M - 10\% M = 90\%M$
   $(M = 100\%M)$

b. Reduzca a un solo tanto por ciento de A:

1. $2A + \frac{1}{2}A - \frac{3}{5}A + 40\%A$

   Pasamos a tanto por ciento:
   $200\% A + 50\%A - 60\%A + 40\%A = 230\%A$

2. $\frac{5}{2}A - \frac{1}{4}A - 0{,}75A$

   $250\%A - 25\%A - 75\%A = 150\%A$

c. Reduzca:

$a\% B - 80\% (a\%B)$

$100\%(a\%B) - 80\%(a\%B) = 20\%(a\%B)$

$= \boxed{\frac{1}{5}a\%B}$

Observación:

Si tenemos **10%A + 23%B,** notamos que en cada sumando, el **10%** y el **23%** están aplicados a cantidades diferentes (**A≠B**). Entonces no se puede sumar y reducir a un solo tanto por ciento. Lo que se tiene que hacer, en este caso, es calcular cada uno por separado y luego sumar los resultados.

Por ejemplo:

$$15\%(20) + 25\%(8) = \frac{15}{100}(20) + \frac{1}{4}(8)$$

$$= 3 + 2 = 5$$

RELACIÓN PARTE-TODO APLICADO AL TANTO POR CIENTO

Ya hemos mencionado en el capítulo de fracciones, que la relación **parte-todo** es una comparación de una cantidad (al cual le llamamos **parte**) respecto de otra cantidad (al cual le llamamos **todo**). Ahora, lo que vamos hacer es expresar el resultado de esa comparación en **tanto por ciento**.

Ejemplo:

¿Qué tanto por ciento es 10 respecto de 40?

Resolución:

Si comparamos 10 respecto de 40, notamos que el primero es **la cuarta parte** del segundo.

Pero sabemos que $\frac{1}{4}$ **< > 25%**

Entonces significa que 10 es el $\boxed{25\%}$ de 40.

Observación:

En la comparación 10 hace de **parte** y 40 hace del **todo**, entonces:

$$\frac{10}{40} = \frac{1}{4} \times 100\% = \boxed{25\%}$$

Ejemplos:

1. ¿Qué tanto por ciento representa 30 respecto de 300?

   Recuerda que el **todo** es la cantidad respecto de quien se compara.

   En este caso el todo es 300 y la parte es 30, entonces, representa el:

   $$\frac{30}{300} = \frac{1}{10} \times 100\% = \boxed{10\%}$$

2. ¿Qué tanto por ciento es 50 respecto de 40?

   Aquí comparamos respecto de 40, entonces el todo es 40 y la cantidad que hace de parte es 50.

   Luego es el:

   $$\frac{50}{40} = \frac{5}{4} \times 100\% = \boxed{125\%}$$

3. ¿Qué tanto por ciento de 60 es 18?

   Ahora comparamos respecto de 60, entonces 60 es el todo y 18 es la parte.

   Luego es el:

   $$\frac{18}{60} \times 100\% = \frac{3}{10} \times 100\% = \boxed{30\%}$$

4. ¿Qué tanto por ciento es 41 de 82?

   Aquí el todo es 82 y la parte 41.

   Luego es el:

$$\frac{41}{82} \times 100\% = \frac{1}{2} \times 100 = \boxed{50\%}$$

5. ¿Qué tanto por ciento de 36 es 27?

$$\frac{27}{36} \times 100\% = \frac{3}{4} \times 100\% = \boxed{75\%}$$

6. ¿Qué tanto por ciento es 48 de 40?

   Estamos comparando 48 respecto de 40, entonces el todp es 40 y la parte 48.

   Luego es el:

$$\frac{48}{40} \times 100\% = \frac{6}{5} \times 100\% = \boxed{120\%}$$

7. ¿Qué tanto por ciento representa A respecto de B?

   Aquí comparamos respecto de B, entonces B es el todo y A es la parte.

   Luego es el:

$$\boxed{\frac{A}{B} \times 100\%}$$

8. ¿Qué tanto por ciento es a+b respecto de a^2-b^2? $(a \neq b)$

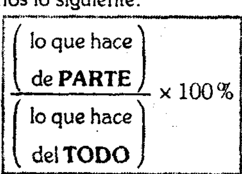
   Es el:

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} . 100\% = \frac{\cancel{a+b}}{(\cancel{a+b})(a-b)} . 100\%$$

$$= \boxed{\left(\frac{100}{a-b}\right)\%}$$

Conclusión

Entonces, para expresar qué tanto por ciento representa una cantidad (parte) respecto de otra (todo), hacemos lo siguiente:



$$\frac{\left(\text{lo que hace de } \textbf{PARTE}\right)}{\left(\text{lo que hace del } \textbf{TODO}\right)} \times 100\%$$

Ejemplos:

1. ¿Qué tanto por ciento menos es 40 respecto de 50?

   Aquí se está comparando respecto de 50, entonces 50 es el todo.

   Ahora, 40 es 10 menos que 50, entonces la parte es 10.

   Luego:

$$\frac{10}{50} \times 100\% = 20\%$$

   ∴ Es el $\boxed{20\% \text{ menos}}$

2. ¿Qué tanto por ciento más es 50 respecto de 40?

   Respecto de 40, 50 es 10 más, entonces 40 es el todo y 10 es la parte.

   Luego:

$$\frac{10}{40} \times 100\% = 25\%$$

   ∴ Es el $\boxed{25\% \text{ más}}$

3. ¿Qué tanto por ciento menos es 17 respecto de 20?

   17 es 3 menos respecto de 20, entonces 3 es la parte y 20 es el todo.

   Luego:

$$\frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$$

   ∴ Es el $\boxed{15\% \text{ menos}}$

4. ¿Qué tanto por ciento más de 80 es 84?
84 es 4 más respecto de 80, entonces 4 es la parte y 80 es el todo.
Luego:

$$\frac{4}{80} \times 100\% = 5\%$$

∴ Es el $\boxed{5\% \text{ más}}$

5. ¿Qué tanto por ciento menos es **a** respecto de **b**? (a < b)
Respecto de **b**, **a** es (**b** − **a**) menos, entonces **b** es el todo y (**b** − **a**) es la parte.
Luego es el:

$$\boxed{\frac{b-a}{b} \times 100\% \text{ menos}}$$

6. ¿Qué tanto por ciento más es **m** respecto de **n**? (m > n)
Respecto de **n**, **m** es (**m** − **n**) más, entonces **n** es el todo y (**m** − **n**) es la parte.
Luego es el:

$$\boxed{\frac{m-n}{n} \times 100\% \text{ más}}$$

Ejemplo 1

En una reunión el número de hombres es el 60% del número de mujeres. ¿Qué tanto por ciento representa la diferencia entre el número de mujeres y el número de hombres respecto del total?

Resolución:

Por dato: $H=60\%\,M \Rightarrow H=\frac{3}{5}M \Rightarrow \frac{H}{M}=\frac{3}{5}$

Luego: H=3k y M=5k

$\Rightarrow$ Total = H + M = 8k

Nos piden:

$$\frac{(M-H)}{Total} \times 100\% = \frac{5k-3k}{8k} \times 100\% = \frac{2\not{k}}{8\not{k}} \times 100$$

$$= 25\%$$

∴ Representa el 25%.

Ejemplo 2

En una granja el número de pollos es el 200% del número de pavos y el número de patos es el 75% del número de pavos. Si sólo hay pollos, patos y pavos, ¿qué tanto por ciento es el número de patos respecto del 75% del número de pollos?

Resolución:

pollos = 200% (pavos) patos = 75% (pavos)

pollos = 2 (pavos) patos = $\frac{3}{4}$ (pavos)

$$\frac{pollos}{pavos} = \frac{2 \times 4}{1 \times 4} \qquad \frac{patos}{pavos} = \frac{3}{4}$$

Luego: Total = 15k

pollos	pavos	patos
8k	4k	3k

Nos piden:

$$\frac{patos}{75\%\,(pollos)} \times 100\% = \frac{3k}{\frac{3}{4}(8k)} \times 100\% = 50\%$$

∴ Es el 50%

Ejemplo 3

Si el 20% de **a** es igual a 30% de **b**, ¿qué tanto por ciento menos es **a** respecto de **a+b**?

Resolución:

Del dato: 20% a = 30% b

$$2\,a = 3b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

Luego: a=3k b=2k $\Rightarrow$ a+b=5k

Entonces a es 2k menos que a + b:

Nos piden: $\frac{2\,k}{5\,k} \times 100\% = 40\%$

∴ a es 40% menos que **a+b**

Sabemos que toda cantidad **representa el 100% de sí misma**, entonces si a una cantidad le quitamos o le restamos por ejemplo el 20%, nos quedará el 80% de la cantidad.

O por otro lado, si a una cantidad le agregamos o le sumamos el 30% de sí misma, entonces ahora tendremos el 130% de la cantidad.

Toda variación porcentual, ya sea de aumento o de disminución, se hace tomando como referencia un todo (100 %).

Luego:

Si pierdo o gasto	Queda
20 %	80 %
35 %	65 %
2,5 %	97,5 %
2 %	98 %
m %	(100–m) %

Si gano o agrego	Resulta
22 %	122 %
45 %	145 %
2,3 %	102,3 %
0,5 %	100,5 %
m %	(100+m) %

Ejemplo 1

Una persona tenía S/240 y pierde el 20 % de su dinero. ¿Cuánto tiene ahora?

Resolución:

Si perdió 20 %, entonces le queda el 80 % del dinero inicial.

Es decir, le queda:

$$80\%(240) = \frac{80}{100}\times(240) = \boxed{S/192}$$

Ejemplo 2

Pedro tiene S/75; enseguida pierde el 20 % pa luego ganar el 10 % del resto. ¿Cuánto tiene finalmente?

Resolución:

Se debe tener presente que cada vez el dinero que va quedando expresa un nuevo 100 % y sobre esa nueva cantidad ocurren las variaciones porcentuales.

Al inicio tenía: S/75

- 1ro. Pierde el 20% de S/75
  Entonces le queda 80%(75)=S/60 que es el resto.
- 2do. Gana el 10% del resto osea de S/.60.
  Entonces ahora tiene: 110%(60)=S/.66

∴ Finalmente tiene S/.66

También podíamos haber calculado la cantidad final así:

$$110\%[\underbrace{80\%(75)}_{\text{Resto}}] = \frac{11}{10}\times\frac{8}{10}(75) = S/66$$

De esta manera, el cálculo es más directo.

Ejemplo 3

Una persona tenía S/240 y perdió 3 veces consecutivas 25 %, 10 % y 50 % de lo que le iba quedando. ¿Cuánto le quedó finalmente?

Resolución:

Al inicio tenía: S/240

- 1ro. Pierde el 25% del total S/240

Entonces le queda 75% (240), que es el resto.

- 2do. Pierde el 10% del resto.

Entonces el nuevo resto será:

90%×75% (240)

- 3ro. Pierde el 50% del nuevo resto.

Entonces finalmente le queda:

$$50\%\times 90\%\times 75\%(240)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}\times\frac{3}{4}240$$

$$=S/.81$$

Nota:

Lo que se sugiere es que usted, estimado lector, haga el cálculo de lo que queda, directamente.

Es decir; si pierde en forma sucesiva 25%, 10% y 50% de lo que le va quedando, entonces al final le queda:

50%×90%×75%×(240) = S/.81

Ejemplo 4

César tenía cierta cantidad de dinero y apostó **4** veces consecutivas. En las dos primeras pierde el 10 % y 30 % y en las dos últimas gana el 20 % y 25 % siempre de lo que iba quedando. Si al final se retiró con S/1 890, ¿cuánto tenía al inicio?, ¿ganó o perdió?

Resolución:

Al inicio tenía S/ x

- Primero pierde 10%, luego 30%, después gana 20% y luego 25%, siempre de lo que le iba quedando.

Al final le quedó S/ 1890

Veamos cuánto le quedó de x y lo igualamos a S/1890

⇒ 125%×120%×70% × 90% (x) = 1890

$$\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{10}\times\frac{9}{10}(x)=1890$$

$$\therefore x = 2000$$

Luego al inicio tenía S/ 2000

∴ Al final perdió 2000–1890 = S/110

Ejemplo 5

En una fiesta se observa que el 20% de los asistentes son hombres y de las mujeres el 75% están casadas. Si hay 8 mujeres solteras, ¿cuántos hombres habían en la fiesta?

Resolución:

Del enunciado, los hombres son el 20% del total de asistentes, entonces las mujeres serán el 80% del total. Luego de las mujeres, el 75% están casadas, entonces el 25% de las mujeres estarán solteras y éstas son 8.

Es decir: 25% [80% (total)] = 8

$$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times \text{total} = 8$$

$$\therefore \text{total} = 40$$

Luego, el número de hombres es:

H = 20% (40) = 8

Nota:

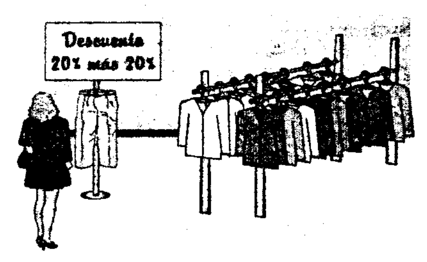
Gráficamente se puede apreciar así:

total = T

H	M = 80%T	
	C	S
20%T	75%(80%T)	25%(80%T)=8

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Supongamos que una persona desea comprar un pantalón y al llegar a la tienda encuentra la siguiente oferta:



¡Cuidado! no vaya a pensar que el descuento del **20% más 20%** equivale al descuento del **40%**, porque no es así. Lo que ocurre es que al precio del pantalón se le aplican descuentos sucesivos del 20% y 20%. Es decir, primero descontamos el **20%** al precio inicial; luego, en forma sucesiva, se aplica el segundo descuento del **20%**, pero éste descuento se aplica a lo que ha quedado luego del primer descuento, o sea al 80% del precio inicial.

Veamos:

Sea el precio inicial = P

- 1er. descuento del 20% = 20%P

  Precio que queda = 80%P

- 2do. descuento del 20% = 20%(80%P)

$$= \frac{20}{100} \times 80\%P = 16\%P$$

$\therefore$ El descuento total es = 20%P + 16%P

$$= \boxed{36\%P}$$

Fíjate, el primer descuento es 20%P y el segundo descuento 16%P que sumados no se obtiene el 40%P, sino sólo el 36% P. Es decir, que luego de descontar 20% y 20% en forma sucesiva, sólo se pagaría el $\boxed{64\%P}$.

Otra forma de enfocar este ejemplo es el siguiente:

Precio inicial = P

Precio final = 80% (80%P)

$$= \frac{80}{100} \times 80\%P = \boxed{64\%P}$$

Luego se deduce que el descuento único equivalente es:

$$P - 64\%P = \boxed{36\%P}$$

Conclusiones:

Cuando tengamos que hacer **descuentos sucesivos**, recordemos que el primer descuento se aplica a la cantidad inicial, y a partir del segundo descuento, éstos se aplican a la cantidad que ha quedado del descuento anterior.

De manera análoga también se hace cuando se trata de **aumentos sucesivos**. El primer tanto por ciento de aumento se aplica a la cantidad inicial; el segundo aumento se aplica a lo que ha resultado luego del primer aumento; el tercer aumento se aplica a lo que ha resultado luego del segundo aumento; y así sucesivamente.

Ejemplo 1

¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 20% y 30%?

Resolución:

Sea la cantidad inicial = $\boxed{P}$

1er. descuento 20%; queda 80%

2do. descuento 30%; queda 70%

Cantidad final = 70%(80%P)

$$= \frac{70}{100} \times 80\%P = \boxed{56\%P}$$

$\therefore$ Descuento único equivalente = P – 56%P

$$= \boxed{44\%P}$$

Ejemplo 2

¿A qué aumento único equivalen tres aumentos sucesivos del 10%, 20% y 50%?

Resolución:

Sea la cantidad inicial = $\boxed{P}$

Aumento	Resulta
10%	110%
20%	120%
50%	150%

$\Rightarrow$ Cantidad final = 150% × 120% × 110%P

$$= \frac{150}{100} \times \frac{120}{100} \times 110\%P$$

$$= \boxed{198\%P}$$

∴ Aumento único equivalente = 198%P – P

$$= \boxed{98\%P}$$

Ejemplo 3

¿A qué aumento o descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 50% y 20%, seguidos de dos aumentos sucesivos del 50% y 20%?

Resolución:

¡Cuidado!, si estás pensando que no hay variación alguna, permítanos, amigo lector, decirle que no es así, veamos:

Sea la cantidad inicial = $\boxed{P}$

$\Rightarrow$ Cantidad final = 120%×150%×80%×50%P

$$= \frac{6}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}\times 50\%P$$

$$= \boxed{72\%P}$$

Si observamos la cantidad inicial y la cantidad final, notaremos que sí hay variación y que ésta equivale a un descuento.

∴ Descuento único equivalente = P–72%P

$$= \boxed{28\%P}$$

Ejemplo 4

Si el precio de venta de un artículo es de S/.160, ¿cuál es el precio que se debe pagar luego de descontar en forma sucesiva el 15% y el 25%?

Resolución:

El precio inicial = $\boxed{S/.160}$

$\Rightarrow$ Precio final = 75%×85%×160

$$= \frac{3}{4}\times\frac{17}{20}\times 160 = \boxed{S/.104}$$

∴ Se debe pagar: S/.104

Observación

Descontar en forma sucesiva el a% y el b% produce el mismo resultado que descontar el b% y el a%.

También ocurre lo mismo para los aumentos sucesivos del a% y b%, que dan el mismo resultado que los aumentos sucesivos del b% y a% en ese orden.

Es decir, el orden como se tomen los descuentos sucesivos o los aumentos sucesivos no alteran el resultado final.

Según lo anterior, da lo mismo, descontar primero el 20% y en forma sucesiva descontar el 30%, que descontar primero el 30% y luego descontar el 20%.

Veamos:

Sea el precio inicial = P

I. Primero descontamos 20% y luego 30%

$\Rightarrow$ Precio final = 70%×80%P

$$= \boxed{56\%P}$$

II. O también descontamos 30% y luego 20%.

Precio final = 80×70%P

$$= \boxed{56\%P}$$

Como puedes notar, en los casos I y II, el resultado final es el mismo.

Observación:

Si tenemos que hacer dos descuentos sucesivos del a% y del b%, éstos pueden ser reemplazados por un sólo descuento que equivale a los dos anteriores, éste es el descuento único equivalente (Du) y se calcula así:

$$\boxed{Du=\left(a+b-\frac{ab}{100}\right)\%}$$

En el caso de tener dos aumentos sucesivos del a% y del b%, el aumento único equivalente (Au) que reemplaza a estos dos aumentos es:

$$\boxed{Au=\left(a+b+\frac{ab}{100}\right)\%}$$

No está de más que conozca estas expresiones para hallar el descuento o aumento único equivalente de dos descuentos o aumentos sucesivos respectivamente.

A continuación veremos la demostración de uno de ellos.

Ejemplo 5

Halle el descuento único equivalente de dos descuentos sucesivos del a% y del b%.

Resolución:

Sea la cantidad inicial = P

- 1er. Descuento del a% = $\boxed{a\%P}$

  Cantidad que queda = P – a%P

- 2do. Descuento del b% = $\boxed{b\%(P-a\%P)}$

Luego, el descuento total es la suma de los dos descuentos:

$$\text{Descuento total} = a\%P + b\%(P-a\%P)$$
$$= a\%P + b(1-a\%)\%P$$
$$= (a+b-ab\%)\,\%P$$

$$\boxed{\text{Descuento total}=\left(a+b-\frac{ab}{100}\right)\%P}$$

Por lo tanto, el descuento único equivalente es:

$$\boxed{Du=\left(a+b-\frac{ab}{100}\right)\%}$$

Ejemplo 6

¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 10% y 20%?

Resolución:

Hallamos el descuento único en forma directa.

$$Du=\left(10+20-\frac{10\times 20}{100}\right)\%$$

$$Du=\boxed{28\%}$$

Ejemplo 7

¿A qué aumento único equivalen dos aumentos sucesivos del 15% y del 20%?

Resolución:

El aumento único que reemplaza a los aumentos sucesivos del 15% y del 20% es:

$$Au=\left(15+20+\frac{15\times 20}{100}\right)\%$$

$$Au=\boxed{38\%}$$

VARIACIÓN PORCENTUAL

Sabemos que en la naturaleza todo está en constante cambio y movimiento. Por ejemplo, si hablamos de la temperatura del ambiente, que en la mañana puede estar en 15°C, y en el mediodía, en 18°C; entonces notamos que ha ocurrido un cambio en la temperatura del ambiente (una variación en la temperatura). Esta variación, en este caso, es un aumento de 3°C.

Ahora, si nosotros expresamos el aumento de 3°C en tanto por ciento, estaríamos indicando la variación porcentual de la temperatura de la mañana al mediodía.

En este caso nos preguntaríamos ¿qué tanto por ciento representa 3°C respecto de 15°C?

La respuesta es: $\frac{3}{15} \times 100\% = 20\%$

Algún lector se puede estar preguntando ¿por qué no se ha comparado el aumento de 3°C respecto de 18°C?.

La respuesta es simple; 18°C es la temperatura final y ésta no es la temperatura que se incrementa, sino es la temperatura inicial de 15°C la que sufre el aumento y a partir de 15°C pasamos a18°C.

Observación:

Si el valor de una magnitud cambia, este cambio nos indica una variación que puede ser de aumento o de disminución, entonces habrá un valor inicial y un valor final para la magnitud. La variación porcentual se expresa indicando ¿qué tanto por ciento representa el aumento o disminución respecto del valor inicial?

Representando:

$$\text{Variación Porcentual} = \frac{\begin{pmatrix}\text{Aumento o}\\ \text{disminución}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{Valor}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}} \times 100\%$$

El aumento o la disminución, según sea el caso que se presente, se obtiene mediante la diferencia entre el valor final y el valor inicial.

Ejemplo 1

El lado de un cuadrado aumenta en 20%. ¿En qué tanto por ciento aumentará su área?

Resolución:

Sabemos que el área de un cuadrado se calcula así: $A_{\square} = \ell^2$, donde ℓ es la medida del lado.

Como el lado va a aumentar en 20%, entonces el lado va a aumentar en 1/5 de su valor. Luego, nos conviene que el lado, al inicio, sea un valor numérico que tenga 5 partes, es decir, que tenga quinta; por eso le asignamos 5k donde k es constante.

$$\ell\text{inicio} := 5k \Rightarrow A_{\square} = (5k)^2 = 25k^2$$
$$+20\%$$
$$\ell\text{final} := 6k \Rightarrow A_{\square} = (6k)^2 = 36k^2$$

Veamos:

Observamos que el área aumenta de $25k^2$ a $36k^2$ en $11k^2$; pero expresado en tanto por ciento es:

$$\frac{11k^2}{25k^2} \times 100\% = 44\%$$

Por lo tanto, el área aumenta en **44%**

Observa que en este ejemplo, la constante k se cancela en la parte final del cálculo. Esto quiere decir, que si al principio no le poníamos el resultado, no iba a cambiar.

Entonces, podemos concluir que, en los problemas de variación porcentual, las constantes se pueden obviar y los cálculos serán más sencillos.

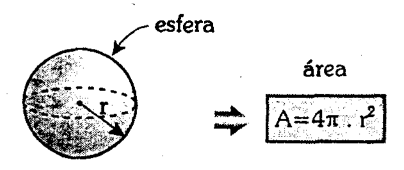
Para confirmar esto, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2

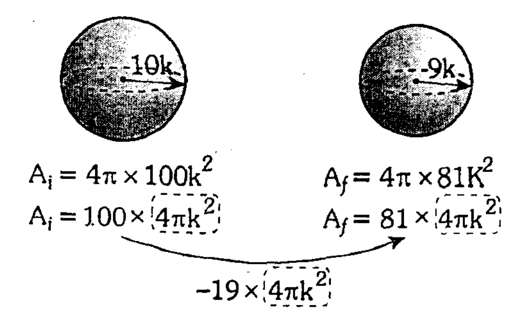
Si el radio de una esfera disminuye en 10%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su área?

Resolución:

Sabemos:



Como el radio disminuye en 10%, significa que disminuye en 1/10 de su valor, entonces le asignamos el valor inicial: 10k, donde k es constante.



$A_i = 4\pi \times 100k^2$ $\qquad$ $A_f = 4\pi \times 81K^2$

$A_i = 100 \times \boxed{4\pi k^2}$ $\qquad$ $A_f = 81 \times \boxed{4\pi k^2}$

$-19 \times \boxed{4\pi k^2}$

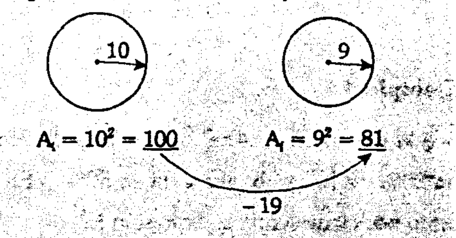
Luego se observa que el área disminuye en $19 \times \boxed{4\pi k^2}$, que expresado en tanto por ciento es

$$\frac{19 \times \boxed{4\pi k^2}}{100 \times \boxed{4\pi k^2}} \times 100\% = 19\%$$

Conclusiones:

Observa, también en este ejemplo, que las constantes, al final, se cancelan. Lo cual reafirma que éstos, es decir, 4π y k, se pueden dejar de colocar en el cálculo del área inicial y final, y el resultado de la variación porcentual en el mismo.

Es decir, se pudo asumir para el radio inicial, un valor igual a 10, así el área sólo depende de r^2.



Se observa que el área disminuye en 19 que representa el 19% del área inicial 100.

Ejemplo 3

El ancho de un rectángulo aumenta en 20% mientras que el largo disminuye en 20%.

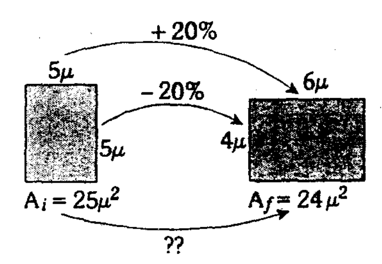
¿En qué tanto por ciento varía su área?

Resolución:

Recordemos que el área de un rectángulo es el producto de las medidas del largo por el ancho ($A = \ell \times a$). Como 20% equivale a 1/5, asumiremos para el largo y el ancho medidas iniciales iguales a 5 unidades.

Pero, ¿es posible que el largo y el ancho de un rectángulo tengan igual medida?

Para efectos de nuestro cálculo, sí. Veamos:



Observamos que el área disminuye de $25\mu^2$ a $24\mu^2$ en $1\mu^2$. Pero, expresado en tanto por ciento es:

$$\frac{1}{25} \times 100\% = 4\%$$

Por lo tanto, el área disminuye en **4%**.

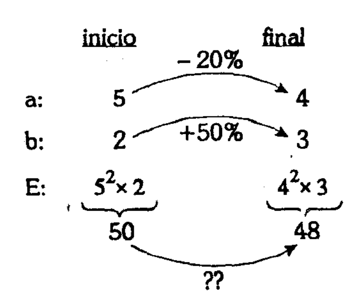
Ejemplo 4

Sea la expresión $E=4\pi a^2.b$, donde **a** disminuye en 20% y a la vez **b** aumenta en 50%. ¿En qué tanto por ciento varía la expresión E?

Resolución:

Según las condiciones dadas para la expresión E, a y b son las únicas cantidades que varían y 4π es constante; por lo tanto, vamos a prescindir de éste último.

Así $E = \cancel{4\pi}\, a^2.b$ la consideramos como $E=a^2b$



Observamos que E disminuye en 2, lo cual expresado en tanto por ciento es:

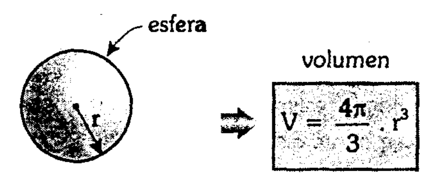
$$\frac{2}{50} \times 100\% = 4\%$$

Por lo tanto, E disminuye en 4%

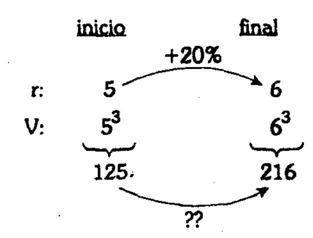
Ejemplo 5

Sabiendo que el radio de una esfera aumenta en 20%, ¿en qué tanto por ciento aumentará su volumen?

Resolución:



Como la pregunta es de variación porcentual, consideramos $V=r^3$, puesto que los demás son constantes.



Observamos que V aumenta de 125 a 216 en 91 que expresado en tanto por ciento:

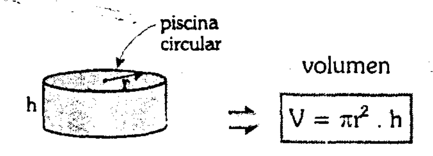
$$\frac{91}{125} \times 100\% = 72,8\%$$

Por lo tanto, V aumenta en 72,8%.

Ejemplo 6

Si el radio de una piscina de forma circular aumenta en 100%, ¿en qué tanto por ciento debe disminuir la altura para que su volumen no varíe?

Resolución:

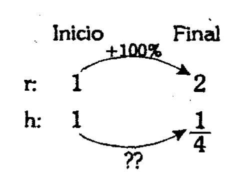


Según las condiciones del problema, nos piden la variación porcentual de la altura h; entonces veamos a qué es igual h, si lo despejamos de la expresión del volumen.

$$h = \frac{V}{\pi . r^2}$$

Pero, como $\frac{V}{\pi}$ permanece constante (no varía), entonces consideramos:

$$\boxed{h = \frac{1}{r^2}}$$



Observamos que h disminuye de 1 a $\frac{1}{4}$, en $\frac{3}{4}$ que equivale al 75%.

Otra forma

Veamos otra forma de resolver el problema.

Consideremos $V = r^2 \times h$, (π es constante).

	Inicio		Final	
r:	1	+100% →	2	Por dato:
h:	100	¿? →	x	
v:	$1^2 \times 100 = 100$	= →	$2^2(x) = 4x$	⇒ $4x = 100$
				$x = 25$

Observamos que h disminuye de 100 a 25, es decir, en 75.

Por lo tanto, h disminuye en 75%.

No te olvides, amigo lector, que si tenemos un problema de variación porcentual debemos considerar lo siguiente:

a. La magnitud que varía puede depender de la variación de otras magnitudes. A la primera le llamaremos magnitud dependiente y a las otras magnitudes independientes.

b. La variación de la magnitud dependiente, ya sea de aumento o de disminución, se compara respecto al valor inicial de la misma.

c. Las magnitudes independientes que permanecen invariables y las constantes no se consideran en los cálculos del valor inicial y final de la magnitud dependiente.

d. Las magnitudes independientes que varían, en cambio, si se consideran en los cálculos. Y podemos asumir, para éstas, valores arbitrarios que sean convenientes para agilizar la resolución del problema.

Ejemplo 7

Sea $M = \frac{5\pi a^2 \times b \times \sqrt{c}}{2d}$, si a aumenta en un 50% y c disminuye en 36%, ¿en qué tanto por ciento varía M?

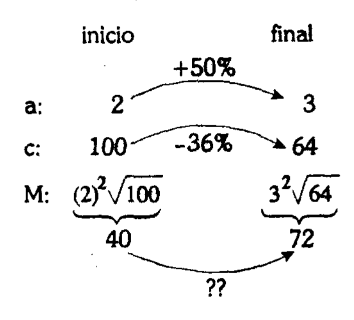
Resolución:

Magnitud dependiente: M

Magnitudes independientes: a, b, c y d

Constantes: $\frac{5}{2}$ y π

Como sólo varían a y c, consideramos: $M=a^2\times\sqrt{c}$



Observamos que M aumenta en 32 que expresado en tanto por ciento es:

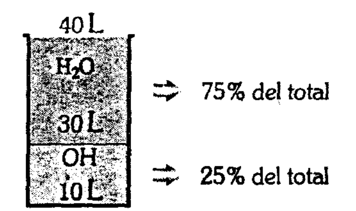
$$\frac{32}{40}\times 100\% = 80\%$$

Por lo tanto M aumenta en 80%.

PROBLEMAS SOBRE MEZCLAS

Para empezar, veamos primero un ejemplo. Supongamos que tenemos un recipiente y que en él mezclamos 10 litros de alcohol puro con 30 litros de agua, entonces el resultado será una mezcla alcohólica de 40 litros.

Gráficamente:



Se puede deducir que el volumen de alcohol (10L) representa el 25% del volumen total.

Entonces diremos que la mezcla tiene una pureza de 25% o una concentración de 25%.

También la pureza se puede expresar en grados, en este caso la mezcla alcohólica es de 25°.

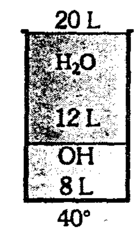
Por lo tanto la pureza de una mezcla alcohólica nos indica qué tanto por ciento representa el volumen de alcohol puro respecto del volumen total. Se calcula así:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Pureza de una}\\ \text{mezcla alcohólica}\end{array}\right)=\frac{V_{OH}}{V_{Total}}\times 100\%$$

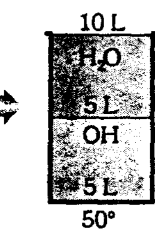
Además, del ejemplo, podemos notar que si el alcohol puro representa el 25% del volumen total, entonces lo que no es alcohol, es decir el agua, representa el 75% del volumen total.

Veamos, algunos ejemplos más:

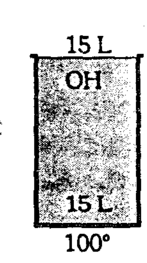
Si tenemos 20 litros de alcohol de 40°, significa que el 40% del volumen total es alcohol puro. ⇒



Si tenemos 10 litros de alcohol al 50%, significa que el 50% de 10L es alcohol puro. ⇒



Si tenemos 15 litros de alcohol de 100°, significa que todo es alcohol puro, es decir, los 15L. ⇒



Ejemplo 1

Se tiene una mezcla alcohólica de 30ℓ al 20%. Halle el volumen de alcohol puro.

Resolución:

Si la mezcla está al 20%, entonces el volumen de alcohol puro es el 20% del volumen total, es decir:

$$V_{OH} = 20\% \ (30)$$

$$V_{OH} = 6 \text{ litros}$$

Gráficamente:

30 L
H_2O 24 L ⇒ 80%
OH 6 L ⇒ 20%

Ejemplo 2

En un recipiente se tienen 20 litros de alcohol de 20° y en otro recipiente 80 litros de alcohol de 10°, ambas mezclas se vierten en un recipiente más grande. Halle la pureza de la mezcla resultante.

Resolución:

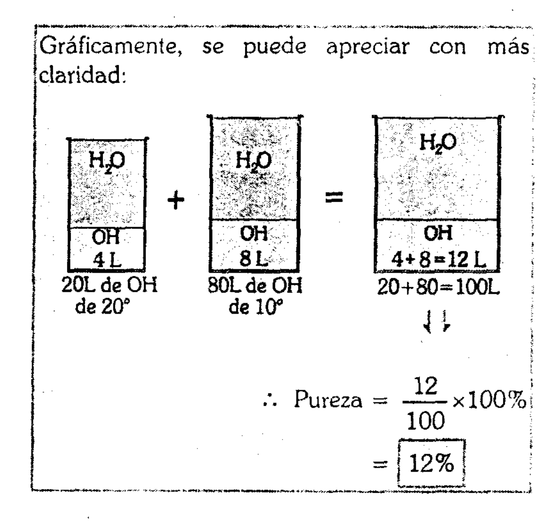
El volumen total de la mezcla resultante es 20+80=100L.

El volumen de alcohol puro en la mezcla resultante es la suma del volumen de alcohol puro que hay en la primera mezcla y el volumen de alcohol puro de la segunda mezcla, es decir:

$$V_{OH} = 20\%(20)+10\%(80) = 12 \text{ litros}$$

Por lo tanto, la pureza de la mezcla resultante es:

$$\frac{12}{100} \times 100\% = \boxed{12\%} < > \boxed{12°}$$



Ejemplo 3

¿Cuántos litros de alcohol puro hay que agregar a una mezcla alcohólica de 10L al 40% para obtener una nueva mezcla de 50% de pureza?

Resolución:

Hay que agregar x litros de alcohol puro.

H_2O 6 L / OH 4 L (10L de OH de 40°) + OH x (OH puro) = H_2O 6 / OH $4+x$ (Nueva mezcla)

Como la nueva mezcla es de 50% el volumen de agua y el volumen de alcohol puro deben ser iguales, entonces:

$$6 = 4 + x \Rightarrow x = 2$$

En el ejemplo vemos que de 40% en la mezcla inicial, pasamos a 50% en la mezcla resultante. Esto es porque agregamos alcohol puro.

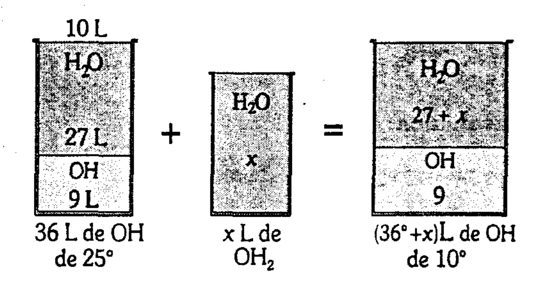
De este problema podemos concluir que si tenemos una mezcla alcohólica y le agregamos alcohol puro, entonces la pureza de la mezcla resultante será mayor que la mezcla inicial.

Ejemplo 4

¿Cuántos litros de agua debemos agregar a 36L de una mezcla alcohólica de 25° para obtener una nueva mezcla de 10°?

Resolución:

Debemos agregar x litros de agua.



Como la nueva mezcla es de 10° entonces el volumen de alcohol puro es el 10% del volumen total, es decir.

$$9 = 10\% \, (36 + x) \Rightarrow x = 54$$

∴ Debemos agregar $\boxed{54 \text{ L}}$ de agua

En el ejemplo 4, la mezcla inicial es de 25° y después de agregar agua, la mezcla resultante es de 10°.

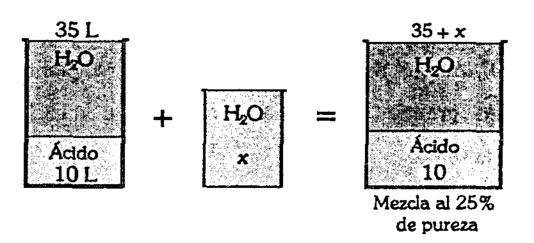
De este problema concluimos que si tenemos una mezcla alcohólica y le agregamos agua, entonces la pureza de la mezcla resultante será menor que la mezcla inicial.

Ejemplo 5

Una solución de 35 litros contiene 10 litros de ácido puro. ¿Cuántos litros de agua se debe agregar para obtener una solución al 25% de pureza?

Resolución:

Aquí la pureza ya no es del alcohol sino, del ácido.



En la solución final, el ácido es el 25% del volumen total, es decir:

$$10 = \frac{1}{4}(35 + x) \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

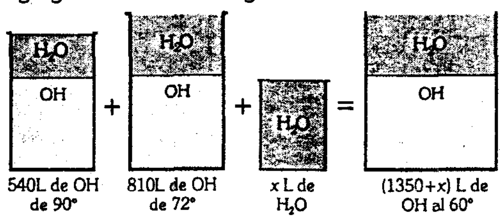
∴ Se debe agregar $\boxed{5 \text{ L}}$ de agua.

Ejemplo 6

Se tiene 540L de alcohol de 90° y se le mezcla con 810L de alcohol de 72°. ¿Qué cantidad de agua debe adicionarse para obtener una mezcla de 60°?

Resolución:

Agregamos x litros de agua.



Observa que el volumen de alcohol puro en la mezcla resultante es igual a la suma del alcohol puro de la primera mezcla y el alcohol puro de la segunda mezcla, es decir:

$$\frac{90}{100}(540)+\frac{72}{100}(810)=\frac{60}{100}(1350+x)$$

Resolviendo: $x = 432$

$\therefore$ Debe adicionarse $\boxed{432}$ litros de agua.

APLICACIÓN COMERCIAL DEL TANTO POR CIENTO

El tanto por ciento es muy utilizado en las operaciones comerciales, por ejemplo en el banco, en las tasas de interés activo y pasivo, cuando el banco otorga préstamos o cuando el banco recibe dinero en depósito.

También cuando se realiza compra y venta de artículos, se utiliza el tanto por ciento, por ejemplo para indicar el descuento, la ganancia o la pérdida.

> Lo que aquí vamos a ver es la aplicación del tanto por ciento para los casos de compra y venta.

Empezaremos con un ejemplo. Supongamos que un comerciante se dedica a la compra y venta de artículos electrodomésticos. Primero va a la fábrica y compra un artefacto en 500 soles, este precio representa el **precio de compra o precio de costo** para el comerciante. Luego, el comerciante, ya en su tienda, va a fijar un precio para ofrecerlo a sus clientes y le aplica un **aumento** al precio de costo, digamos que este aumento es de 100 soles, es decir que está fijando un precio para la venta que es de 600 soles, este precio se conoce como **precio fijado o precio de lista**. Entonces, cuando un cliente vaya a la tienda y le pregunte por el precio del artefacto, el comerciante le dirá que el precio es de 600 soles o sea le dará el precio fijado.

Puede ocurrir que el cliente pague dicho precio o que pida una rebaja. Veamos el caso en que pide rebaja, entonces el comerciante puede otorgarle una rebaja, digamos que le **rebaja** 20 soles y se realiza la venta del artefacto. En otras palabras, el comerciante vende el artefacto en 580 soles, éste es el **precio de venta**, ganando finalmente 80 soles.

Si graficamos todo esto tendremos:

precio fijado: S/600

aumento: S/100

precio de costo S/500	ganancia S/80	rebaja S/20

precio de venta: S/. 580

Se puede observar que:

$$P_{VENTA} = P_{COSTO} + \text{Ganancia}$$

Si hay **ganancia**, es porque el precio de venta es mayor que el precio de costo.

La ganancia de 80 soles es también conocida como **ganancia bruta**, porque, como es lógico, el comerciante, para realizar la compra-venta ha tenido que incurrir en **gastos**, digamos que estos gastos sean de 30 soles.

Entonces, de la ganancia bruta (80 soles), que gasta 30 soles, sólo le quedaría una **ganancia neta** de 50 soles.

Gráficamente:

ganancia bruta: S/. 80

ganancia neta S/50	gastos S/30

En otras palabras:

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{bruta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{neta}\end{pmatrix} + \text{gastos}$$

Pero no siempre se va a ganar en una compra-venta, también puede haber pérdida. Esto ocurre cuando el artefacto (para el ejemplo que estamos viendo) se vende a un precio menor del que ha costado.

Digamos que se vende en 460 soles, y como sabemos que costó 500 soles, se pierde 40 soles.

Gráficamente:

precio de costo: S/500

S/460	pierde S/40

precio de venta

Se observa que:

$$P_{VENTA} = P_{COSTO} - \text{pérdida}$$

- Si en una venta no hay descuento, entonces el **precio de lista** o **precio fijado** es igual al **precio de venta**.
- En una venta, si hay descuento, entonces el **precio de lista** es mayor que el **precio de venta**.
- Generalmente, el **descuento** o **rebaja** se expresa como un tanto por ciento del **precio fijado**. Es decir, cuando no se especifica de quién es el tanto por ciento de descuento, se asume que es del precio fijado.
- Cuando no se especifica de quién es el tanto por ciento de **ganancia** o de **pérdida**, se asume que es del **precio de costo**.

Ejemplo 1

Se compró un artículo en S/160. ¿Qué precio debe fijarse para su venta al público, y que al hacerse un descuento del 20 % todavía se esté ganando el 25 % del precio de costo?

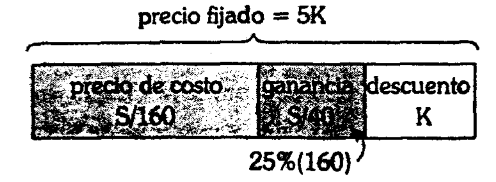
Resolución:

Según el enunciado, se hace un descuento del 20%.

Es decir: Descuento = $\frac{1}{5}$(P. fijado)

Sea: Precio fijado = 5K $\Rightarrow$ Descuento = K

Gráficamente tenemos:



Del gráfico: $200 + K = 5K \Rightarrow K = 50$

$\therefore$ Precio fijado = 5(50) = **S/250**

Ejemplo 2

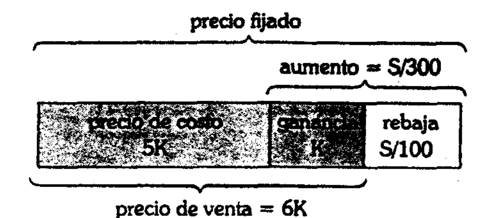
Para fijar el precio de un artículo se aumentó su costo en S/300; pero en el momento de realizar la venta se rebajó 100 soles y, así, se ganó el 20 % del costo. ¿Cuál es el precio de venta del artículo?

Resolución:

Según el dato, se ganó el 20% del costo.
Es decir: Ganancia $= \frac{1}{5}(P_{Costo})$

Sea: $P_{COSTO} = 5K \Rightarrow$ Ganancia $= K$

Entonces tenemos:



Del gráfico: $K + 100 = 300 \Rightarrow K = 200$

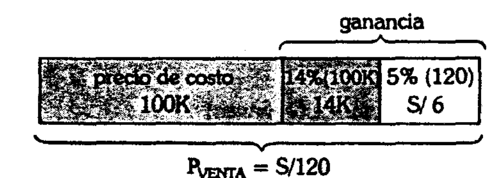
$\therefore$ Precio de Venta = 6(200) = **S/1 200**

Ejemplo 3

Se vendió un radio en S/120, ganando el 14 % del precio de compra más el 5 % del precio de venta. ¿Cuál es el costo del radio?

Resolución:

Sea el $P_{COSTO} = 100K$, entonces:



Del gráfico: $114K + 6 = 120 \Rightarrow K = 1$

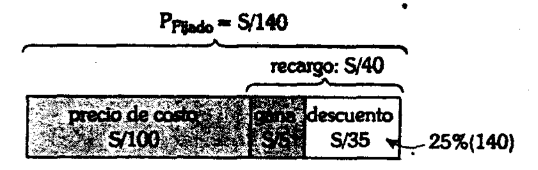
$\therefore P_{Costo} =$ **S/100**

Ejemplo 4

Un comerciante recarga el precio de un artículo en un 40 % de su costo. Si al vender hace un descuento del 25 %. ¿Cuál es el tanto por ciento de utilidad?

Resolución:

Como la pregunta se refiere a un tanto por ciento, entonces no depende exactamente de los valores, sino de la relación entre ellos. Además, en el problema no especifica precio alguno en soles. Entonces, empezaremos asumiendo que el precio de costo sea 100 soles. Así tendremos:



Nos pide el tanto por ciento de ganancia; y sabemos que es respecto al precio de costo.

$\therefore$ Se ganó 5 soles que es el **5%** del costo.

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

En una granja, el 30 % del número de patos es el 20 % del número de pavos. ¿Qué tanto por ciento del 80 % del total es el número de patos?

Resolución:

Del enunciado tenemos:

30% (# patos) = 20% (# pavos)

Simplificando:

3(# patos) = 2(# pavos)

$$\frac{\#patos}{\#pavos} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{matrix} \#patos = 2k \\ \#pavos = 3k \end{matrix}$$

Luego nos piden:

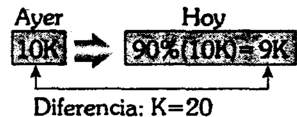
$$\frac{\#\text{ patos}}{80\%\text{ (total)}} \times 100\% = \frac{2k}{\frac{4}{5}(5k)} \times 100\% = \boxed{50\%}$$

PROBLEMA 2

Tengo el 90 % de lo que tenía ayer que era 20 soles más. ¿Qué tanto por ciento de lo que tuve ayer tendría mañana, si hoy perdiese 20 soles más que el 50 % de lo que tengo?

Resolución:

Sea lo que ayer tenía = 10K



Entonces, reemplazando:

Luego:

Si hoy perdiese : 50%(180)+20 = S/110

Mañana tendría: 180 - 110 = S/ 70

Nos piden:

$$\frac{70}{200} \times 100\% = \boxed{35\%}$$

PROBLEMA 3

Dos cilindros contienen un total de 800 galones. Se sacan el 25 % del contenido del primero y 40 % del segundo. Si después de sacar, quedan 60 galones más en el primero que en el segundo, ¿cuántos galones hay en cada cilindro ahora?

Resolución:

Sea:

	1er. Cilindro	2do. Cilindro	
Antes:	4a	5b	⇒ 4a+5b=800 ..... (1)
	↓ −25%	↓ −40%	↓
Ahora:	3a	3b	⇒ 3a−3b= 60 ..... (2)

Resolviendo (1) y (2):

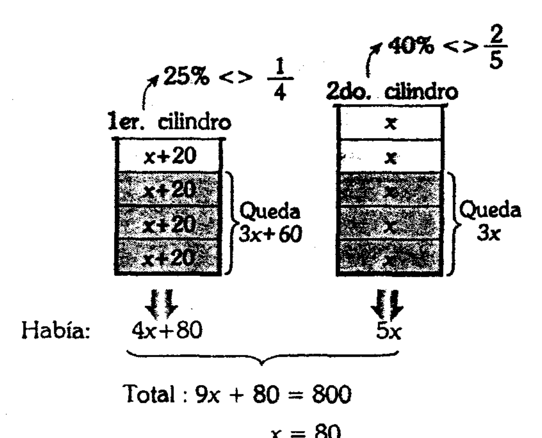
a=100 ; b=80

∴ Lo que ahora hay es:

En el 1er. cilindro = 3(100) = 300 galones

En el 2do. cilindro = 3(80) = 240 galones

Otra forma



Total : 9x + 80 = 800

x = 80

Luego, queda:

En el 1ro. = 3(80) + 60 = 300 galones

En el 2do. = 3(80) = 240 galones

PROBLEMA 4

Al preguntar un padre a su hijo cuánto había gastado de los 50 soles que le dio, el hijo le contestó que gastó el 25 % de lo que no gastó. ¿Qué cantidad gastó?

Resolución:

El hijo recibió: S/50

Luego:

$$\text{Gastó} = \frac{1}{4}\,(\text{No gastó}) \Rightarrow \begin{cases} \text{No gastó} = 4K \\ \text{Gastó} = K \end{cases}$$

Si sumamos: $4K + K = 50$

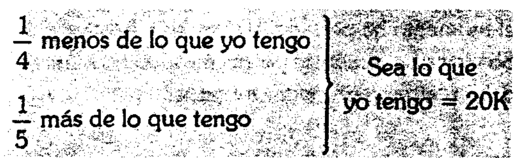
$K = 10$

$\therefore$ Gastó = **S/10**

PROBLEMA 5

Tú tienes 25 % menos de lo que yo tengo. Si yo tuviera 20 % más de lo que tengo y tú tuvieras 20 % menos de lo que tienes, lo que tú tendrías sería 12 soles menos de lo que yo tendría. ¿Cuánto tengo?

Resolución:



Yo tengo : **20K** —(−25%)→ tú tienes : **15K**

↓ +20% ↓ −20%

Yo tendría : **24K** tú tendrías : **12K**

Por dato: $24K - 12K = S/12$

$K = 1$

Por lo tanto, yo tengo: S/20

PROBLEMA 6

En una fiesta, en un determinado momento, los hombres sacaron a bailar a todas la mujeres y se quedaron sin bailar el 20 % de los hombres. ¿Qué tanto por ciento de los hombres deberá retirarse para que, al volver a bailar, se queden sin hacerlo el 10 % de las mujeres?

Resolución:

Como en el problema, sólo nos piden indicar un tanto por ciento, y además no nos dan ningún número específico de hombres o de mujeres, asumiremos por conveniencia que, en la fiesta hay 100 hombres.

De los 100 hombres, el 20% se quedó sin bailar, es decir, 20. Entonces el resto de hombres, es decir, 80, sí bailaron con todas las mujeres. De lo cual deducimos que hay 80 mujeres.

H	M
100	80

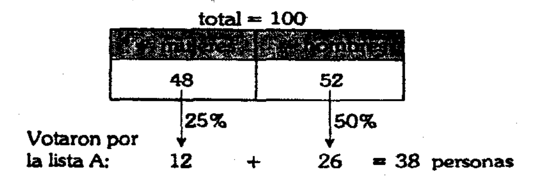
Ahora, queremos que al volver a bailar, el 10% de las mujeres no lo hagan, es decir 8 mujeres, y sólo deben bailar las 72 mujeres restantes. Entonces, de los 100 hombres, 72 bailarán y 28 deben retirarse, es decir el **28%**.

PROBLEMA 7

En la U.N.M.S.M. se han realizado las elecciones para el tercio estudiantil. El 48 % de los sufragantes eran mujeres y el 25 % de ellas votaron por la lista A que además obtuvo los votos del 50 % de los hombres. ¿Qué tanto por ciento de los sufragantes votaron por la lista A?

Resolución:

Como el 48 % de los sufragantes eran mujeres, asumiremos que el total de sufragantes es 100; entonces:



$\therefore$ Votaron por la lista A el 38% de los sufragantes.

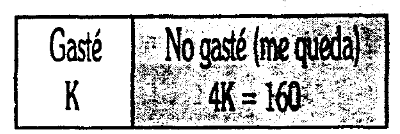
PROBLEMA 8

Gasté el 25 % de lo que no gasté y aún me quedan 160 soles. ¿Cuánto tenía inicialmente?

Resolución:

De la premisa: Gasté = $\frac{1}{4}$ (no gasté)

Ordenando los datos en el siguiente gráfico:



∴ Tenía: 40 + 160 = S/.200

PROBLEMA 9

Si gastara el 30 % del dinero que tengo y ganara el 28 % de lo que me quedaría, perdería 312 soles. ¿Cuánto tengo?

Resolución:

Sea lo que tengo = S/100K, veamos lo que ocurre. Gráficamente.

Tengo S/100K
Gastará=S/30K
Quedaría 70K | Ganará 19,6K | Perderá 10,4K
$\frac{28}{100}$(70K)

Según el dato, dice que perdería S/312

$$10{,}4K = 312 \Rightarrow K=30$$

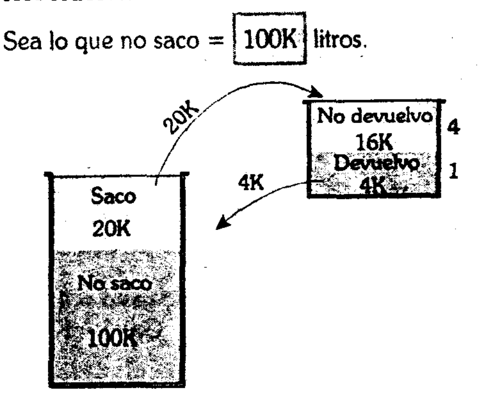
∴ Tengo = 100(30) = **S/3000**

PROBLEMA 10

Si de una lata saco el 20 % de lo que no saco y de lo que saco devuelvo el 25 % de lo que no devuelvo, resulta que ahora hay 208 litros en la lata. ¿Cuántos litros no devolví?

Resolución:

Sea lo que no saco = 100K litros.



Luego, ahora hay:

$$100K + 4K = 208$$
$$K = 2$$

∴ No devolví = 16(2) = **32ℓ**

PROBLEMA 11

Un boxeador decidirá retirarse cuando sus triunfos representen el 90 % del total de peleas. Si hasta el momento ha peleado 100 veces y ha obtenido 85 victorias, ¿cuántas peleas más, como mínimo, debe realizar para poder retirarse?

Resolución:

Hasta el momento de sus 100 peleas realizadas, 85 fueron ganadas y representan el 85 %; pero debe seguir peleando algunas más (x peleas) y conviene que todas las x peleas las gane, para completar el 90 % de triunfos y poder retirarse. Así tenemos:

$$\left(\begin{array}{c}\text{peleas}\\ \text{ganadas}\end{array}\right) = 90\%\left(\begin{array}{c}\text{nuevo total}\\ \text{de peleas}\end{array}\right)$$

$$85 + x = \frac{90}{100}(100 + x)$$

Resolviendo: $x = 50$

∴ Debe realizar 50 peleas más, como mínimo.

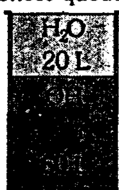
PROBLEMA 12

Se tiene un recipiente con alcohol al 60 %. Si se saca la mitad del agua que contiene, ¿cuál es el nuevo porcentaje de pureza?

Resolución:

Asumiremos que en el recipiente hay 100 litros de alcohol al 60%, así:

Luego se extrae la mitad del agua, es decir, 20ℓ, entonces queda así:



Según el problema, el porcentaje de pureza:

$$\frac{60}{80}\times 100\% = \boxed{75\%}$$

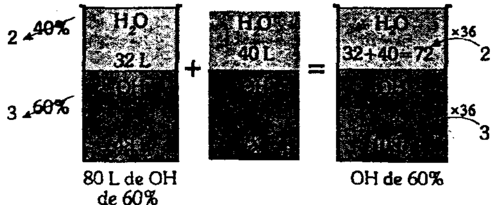
PROBLEMA 13

A 80 litros de alcohol de 60 % se le agrega 40 litros de agua. ¿Cuántos litros de alcohol puro se le debe agregar a esta mezcla para obtener la concentración inicial?

Resolución:

Se debe agregar x litros de OH. Entonces, en las mezclas, inicial y resultante, la relación de la cantidad de agua y alcohol están en relación de 2 a 3 (puesto que ambas están al 60%).

Luego:



Para el OH: $48 + x = 108$

$x = 60$

∴ Debe agregarse $\boxed{60\ell}$ de OH

PROBLEMA 14

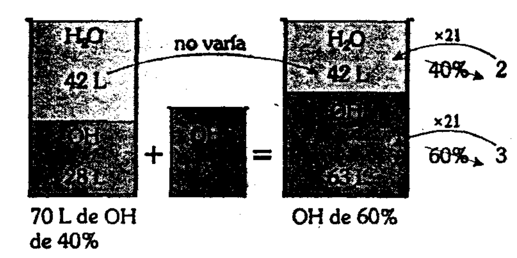
¿Cuántos litros de alcohol puro debemos agregar a 70L de una mezcla alcohólica al 40 % de pureza para convertirla en una mezcla de 60 % de pureza?

Resolución:

Se debe agregar x litros de OH.

Como la mezcla resultante está al 60%, la cantidad de agua y de alcohol están en relación de 2 a 3.

Luego:



Para el OH: $28+x = 63 \Rightarrow x = 35$

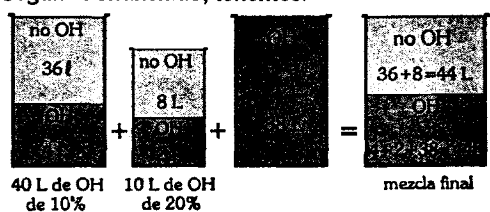
∴ Debemos agregar 35 litros de OH.

PROBLEMA 15

Se tiene un recipiente que contiene 40 ℓ de alcohol al 10 %. Posteriormente, este contenido se vierte a un segundo recipiente que tenía 10 ℓ de alcohol al 20 %. Si luego se agregó 38 ℓ de alcohol puro, ¿qué tanto por ciento de la mezcla final no es alcohol puro?

Resolución:

Según el enunciado, tenemos:

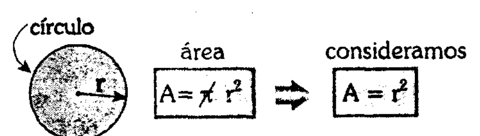


Luego, en la mezcla final se observa que no es OH, la mitad del total, es decir el 50%.

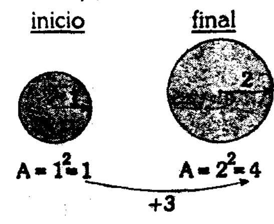
PROBLEMA 16

Si el radio de un círculo se aumenta en 100 %, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

Resolución:



Luego, el radio aumenta en 100%, es decir, si al inicio el radio es 1μ, entonces al final será 2μ.



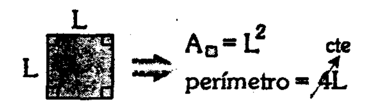
∴ El área aumenta de 1 a 4, es decir en 3 que equivale a un aumento de **300%**.

PROBLEMA 17

La medida de la superficie de un cuadrado aumenta en 189 % al variar cada uno de sus lados. Se puede afirmar que el perímetro de la figura original se incrementó en:

Resolución:

En un cuadrado:



Empezaremos asumiendo como lado del cuadrado original igual a 10μ de modo que el área mida $100\mu^2$ y el perímetro sea como 10μ.

	inicio		final
$A_{\square}$:	100	+189 % →	289
	↓		↓
perímetro :	10	→	17

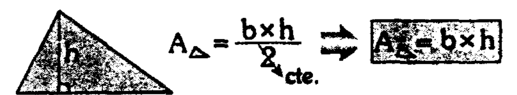
⇒ El perímetro aumenta en 7, es decir, en $\frac{7}{10} \times 100\% =$ **70%**

PROBLEMA 18

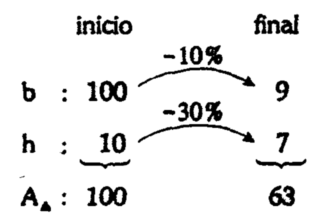
A un afiche triangular se le disminuye su base en 10 % y su altura en 30 %. ¿Qué tanto por ciento del área original es la nueva área?

Resolución:

En un triángulo:



Asumiremos que la base y la altura del triángulo, al inicio miden 10μ. Entonces:



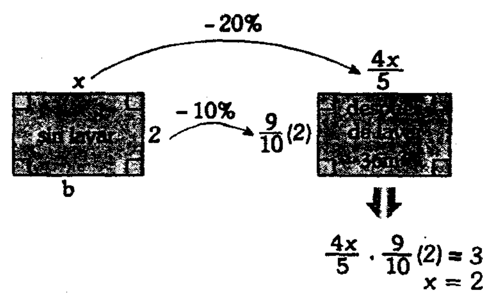
∴ La nueva área es el **63%** del área original.

PROBLEMA 19

Una tela al lavarse se encoge el 10 % de su ancho y el 20 % de su largo. Si la tela tiene 2 m de ancho y se necesita $36m^2$ de tela después de lavarla, ¿qué longitud debe comprarse?

Resolución:

Se debe comprar x metros.



$$\frac{4x}{5} \cdot \frac{9}{10}(2) = 36$$
$$x = 25$$

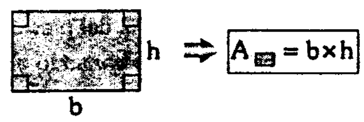
∴ Debe comprarse **25 metros** de tela.

PROBLEMA 20

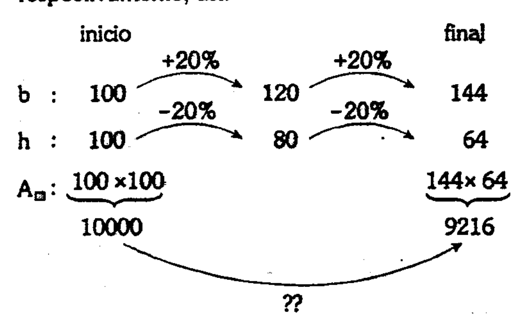
La base de un rectángulo aumenta sucesivamente en 20 % y 20 % y su altura disminuye en 20 % y 20 % sucesivamente. ¿En qué tanto por ciento varía el área?

Resolución:

En un rectángulo, sabemos que:



Para un rápido cálculo asumiremos la base y la altura del rectángulo inicial igual a 100, respectivamente, así:

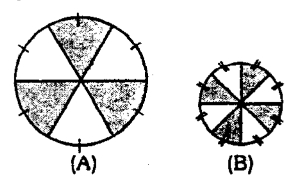


Se observa que el área disminuye en 10000–9216=784, que expresado en tanto por ciento es:

$$\frac{784}{10000}\times 100\% = \boxed{7{,}84\%}$$

PROBLEMA 21

En los dos círculos mostrados: el círculo A tiene área triple que el círculo B.

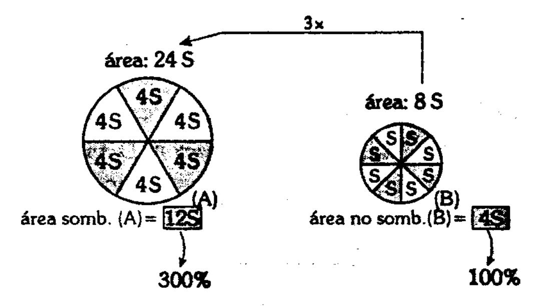


¿Qué tanto por ciento más es el área de la región sombreada de A respecto de la región no sombreada de B?

Resolución:

Empezamos por el círculo B: Si le asignamos al área de cada sector un valor S, entonces todo el círculo B tendrá un área de 8S.

Como el círculo A tiene triple área, su área será 24S.

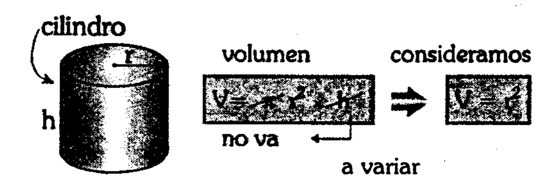


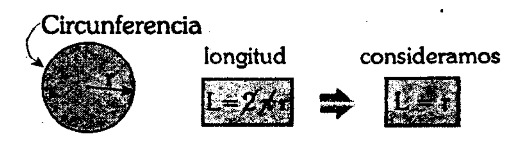
Se observa que 12S es el triple de 4S, es decir, es $\boxed{200\%\text{ más}}$.

PROBLEMA 22

Un depósito de forma cilíndrica se desea cambiar por otro de la misma forma pero aumentado en un 50 % la longitud de la circunferencia de la base. ¿En qué porcentaje se incrementará el volumen del nuevo cilindro, respecto al primero?

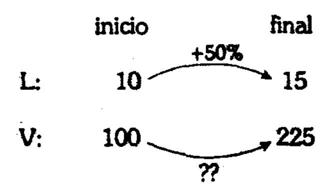
Resolución:





Recuerde que sólo interesa las magnitudes que varían, por eso π, 2 y h no los consideramos.

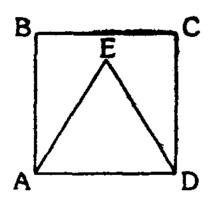
Asumimos que el radio inicial sea 10:



Observamos que el volumen V aumenta de 100 a 225 en 125; es decir, aumenta en **125%**.

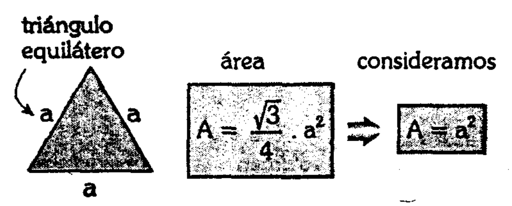
PROBLEMA 23

Si el área del triángulo equilátero AED aumenta 96 %, entonces el lado del cuadrado ABCD aumenta en:



Resolución:

Primero observe que el lado del cuadrado y el lado del triángulo son iguales en medida.



Sea el área inicial del triángulo igual a $100\mu^2$.

	inicio		final
		+96%	
A:	100	→	196
	↓		↓
a:	10	→	14
		??	

Observamos que el lado a aumenta de 10 a 14 en 4μ, que expresado en tanto por ciento es un aumento de:

$$\frac{4}{10} \times 100\% = \boxed{40\%}$$

PROBLEMA 24

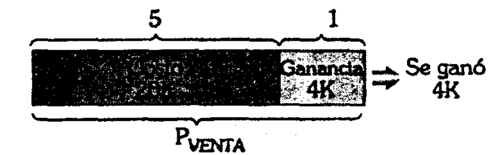
Se vendió un objeto ganando el 20 % del precio de costo, pero si se hubiera vendido ganando el 20 % del precio de venta, la ganancia habría sido S/12 más. ¿En cuánto se vendió el objeto?

Resolución:

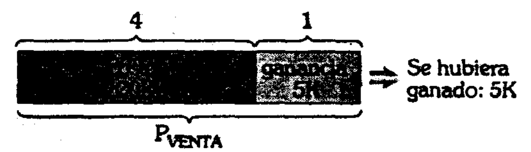
Recordemos primero que 20% < > 1/5.

En el problema hay dos casos que analizar el caso real y el caso supuesto.

Caso real: se vendió ganando el 20% del costo. Asumiremos que el costo es 20K; entonces:



Caso supuesto: si se hubiera vendido ganando el 20% del precio de venta. Asimismo, el precio de venta es también diferente, pero el precio de costo es el mismo, es decir, 20K.



Luego, comparando lo que se hubiera ganado (5K) con lo que se ganó (4K), vemos que la ganancia habría sido de S/K más. Pero según el dato es S/.12 más, entonces K=12.

$\therefore$ El objeto se vendió en 24K=14(12)= **S/288**

PROBLEMA 25

Si mi dinero es la cuarta parte de tu dinero y a la vez tu dinero es el 80 % del dinero de aquel, ¿en qué tanto por ciento debe aumentar mi dinero para que sea el 60 % del dinero de aquel?

Resolución:

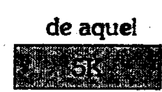
Según el enunciado:

$$(\text{Mi dinero})=\frac{1}{4}\ (\text{Tu dinero}) \Rightarrow \frac{\text{Mi dinero}}{\text{Tu dinero}}=\frac{1}{4}$$

$$(\text{Tu dinero})=\frac{80}{100}(\text{De aquel}) \Rightarrow \frac{\text{Tu dinero}}{\text{De aquel}}=\frac{4}{5}$$

Luego:

mi dinero   tu dinero   de aquel



∴ Para que mi dinero sea, 60%(5K)=3K se debe aumentar en 2K, que representa el doble de K, es decir el **200%**.

PROBLEMA 26

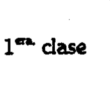
Se tiene la misma cantidad de limones de dos clases distintas que se vende 2 por S/10, los de primera y 3 por S/10, los de segunda. Si se juntan, todos los limones y se vende 5 por S/20, ¿qué tanto por ciento de lo recibido en la primera forma de venta se perdería?

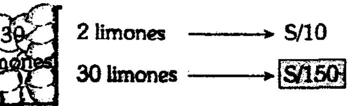
Resolución:

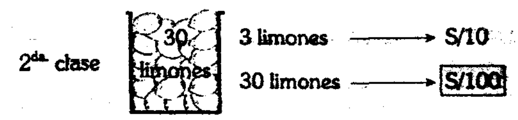
Sea la cantidad de limones de cada clase=30 (nos conviene asumir este número, pues se puede agrupar de 2 en 2, 3 en 3 y 5 en 5).

I. Si se vende por separado, se obtiene:

1^{era} clase



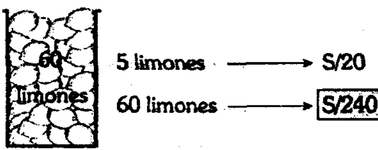




⇒ Por separado se obtiene:

$$S/150+S/100=\boxed{S/250}$$

II. Si se juntan todos los limones:



⇒ Si se vende todo junto se obtiene,

$$\boxed{S/240}$$

∴ Podemos observar que de S/250 a S/240 hay una pérdida de S/10, que expresado en tanto por ciento es una pérdida del:

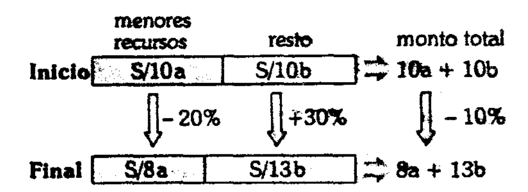
$$\frac{10}{250}\times 100\% = \boxed{4\%}$$

PROBLEMA 27

En una universidad particular, el departamento de servicio social rebaja las pensiones de enseñanza a los estudiantes de menores recursos económicos en un 20 % y aumenta un 30 % la del resto. Si el monto total de las pensiones queda disminuido en un 10 % con esta política, ¿qué tanto por ciento de la pensión total representaba la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

Resolución:

Asumiremos que las pensiones de los estudiantes de menores recursos sean en total S/10a y del resto sea un total de S/10b, lo que significa que al inicio el monto total de pensiones es de S/(10a+10b). Veamos:



El enunciado dice que el monto total queda disminuido en un 10%, o sea que:

$$8a + 13b = \frac{90}{100}(10a + 10b)$$

$$\Rightarrow a = 4b$$

Luego reemplazamos y tenemos que al inicio:

menores recursos	resto	total
S/40b	S/10b	⇒ S/50b

Respecto al total inicial, lo que pagaban los estudiantes de menores recursos representaba el:

$$\frac{40\not{b}}{50\not{b}} \times 100\% = \boxed{80\%}$$

PROBLEMA 28

Compré un televisor en 630 soles. ¿En cuánto debo aumentar este precio para que durante la venta realice una rebaja del 10 % y así gane el 40 % del precio de costo?

Resolución:

Como la rebaja es el 10% del precio fijado, es decir 1/10 del precio fijado, asumiremos P_{Fijado}=S/10K. Entonces la rebaja es de S/K, así:

P_{FIJADO} = S/10K

aumento = ??

compra S/630	ganancia S/252	rebaja S/K

S/ 9K $\frac{40}{100}(630)$

Entonces: 9K = 630 + 252

K = 98

∴ El costo se debe aumentar en:

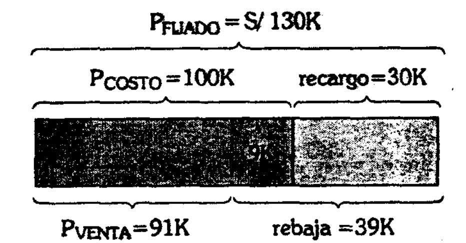
$$252 + 98 = \boxed{S/350}$$

PROBLEMA 29

Para vender un radio se le recargó al precio de costo en 30 %. Al momento de venderla, se hizo una rebaja del 30 % y se perdió 54 soles. ¿A qué precio se vendió?

Resolución:

Sea el precio de costo = S/100K



Como se rebaja 30% (130K) = S/39K

entonces, según el gráfico, se perdió S/9K

Pero, según el dato, 9K = S/54 ⇒ K=6

∴ La radio se vendió en 91(6)= $\boxed{S/546}$

PROBLEMA 30

Se vende un artículo en 150 soles con una ganancia del 25 % sobre el costo. Si se ganó tanto como se descontó, ¿cuál fue el precio fijado para la venta al público?

Resolución:

Como se gana 1/4 del precio de costo, asumiremos que, si el precio de costo es S/4K, entonces la ganancia es de S/K y el descuento, por condición del problema, también será de S/K.

precio fijado = S/ 6K

precio costo 4K	ganancia K	dcto. K

precio venta = S/ 5K

Pero, por dato: 5K = 150 ⇒ K = 30

∴ Precio fijado = 6(30) = $\boxed{S/180}$

PROBLEMA 31

El precio de venta de un objeto es S/897 y el comerciante ganó, en esta operación, el 15 %. Si el beneficio neto fue de S/97, calcule los gastos que produce la venta.

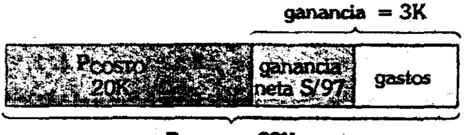
Resolución:

Del enunciado:

$$\text{Ganancia} = \frac{15}{100}P_{COSTO} \Rightarrow \text{Ganancia} = \frac{3}{20}P_{COSTO}$$

Sea: $P_{COSTO} = 20K \Rightarrow \text{Ganancia} = 3K$

Luego tenemos:



Por dato: $23K = S/897 \Rightarrow K = 39$

Luego: ganancia $= 3(39) = S/117$

Del gráfico:

Gastos $= 117 - 97$

Gastos $=$ **S/20**

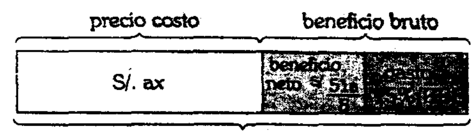
PROBLEMA 32

Un comerciante compró cierto número de objetos en S/a cada uno y los vendió con un beneficio neto de S/51a/8. La venta le ocasionó un gasto del 15 % del beneficio bruto. Si por toda la venta obtuvo S/95a/2, ¿cuántos objetos compró?

Resolución:

Sea x el número de objetos que compró.

$\Rightarrow$ Precio de costo total = S/ax



Del gráfico:

Beneficio Neto: $\frac{51a}{8} = 85\%(\text{B. Bruto})$

$\Rightarrow$ B. Bruto $= S/\frac{15}{2}a$

Además:

$P_{COSTO} + B_{BRUTO} = P_{VENTA}$

$$\cancel{a}.x + \frac{15}{2}.\cancel{a} = \frac{95}{2}.\cancel{a} \Rightarrow x = 40$$

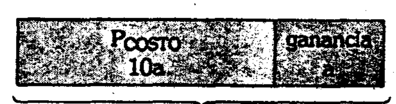
$\therefore$ Compró **40 objetos**

PROBLEMA 33

Una empresa vende dos artículos en 59 400 soles cada uno; en una de ellas gana 10% y en la otra pierde 10%. Averigüe cuánto gana o pierde en la venta total.

Resolución:

Para el 1er. artículo: Gana 10% < > $\frac{1}{10}$



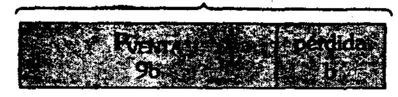
$P_{VENTA} = 11a$

Por dato: $11a = 59\,400 \Rightarrow a = 5\,400$.

En el 1er. artículo gana: S/5 400

Para el 2do. artículo: Pierde 10% < > $\frac{1}{10}$

$P_{COSTO} = 10b$



Por dato: $9b = 59\,400 \Rightarrow b = 6\,600$

En el 2do. artículo pierde: S/6 600

Finalmente:

En toda la venta se observa que pierde:

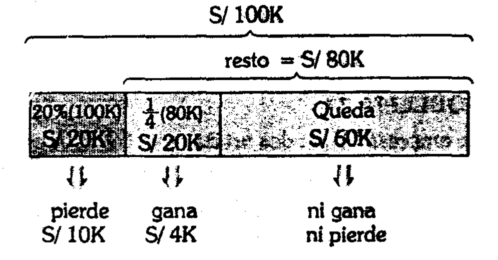
$6600 - 5\,400 =$ **1 200 soles**

PROBLEMA 34

En una tienda se vende una bolsa de caramelos de la siguiente manera: el 20 % se vendió perdiendo el 50 % de su costo, la cuarta parte del resto, ganando 20 % de su costo y en lo que queda no se ganó ni perdió. Si al final se resultó perdiendo 60 soles, ¿cuál es el costo de toda la bolsa de caramelos?

Resolución:

Sea el costo de toda la bolsa = S/100K



Al final pierde S/10K – S/4K = S/60

K = 10

∴ El costo de toda la bolsa es: 100(10) = **S/1000**

PROBLEMA 35

A encarga vender un objeto a B y éste a su vez se lo encarga a C quien hace la venta y se queda con un 2 %, B recibe el resto pero se queda con el 5 % y entrega el saldo de 2793 a A. ¿En cuánto se vendió el objeto?

Resolución:

Supongamos que C vendió el objeto en S/x y se queda con el 2%, entonces:

B recibe $\frac{98}{100}x$ y se queda con el 5%.

A recibe $\frac{95}{100}\left(\frac{98}{100}x\right) = 2793$

$\Rightarrow x = 3000$

∴ El objeto se vendió en **S/3 000**

PROBLEMA 36

Al escribir en una pizarra se consume el 80 % de cada tiza y con lo que queda se vuelve a fabricar tizas. En este proceso el 5 % de la materia prima. El número de tizas que se puede fabricar con los residuos de una caja de 13 000 tizas es:

Resolución:

Si del total de tizas (13 000) se consume 80 %, entonces queda de residuo, 20 % (13 000); y al volver a fabricar con este residuo, se pierde el 5 % de éste, produciéndose finalmente:

$$\frac{95}{100}\left(\frac{20}{100} \times 13\,000\right) = 2\,470$$

∴ Con los residuos se pueden fabricar 2 470 tizas.

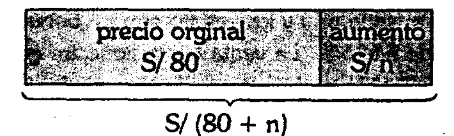
PROBLEMA 37

El precio de un artículo se aumenta un tanto por 80 y luego se rebaja el mismo tanto pero por 90 y se tiene así el precio original. Halle dicho tanto.

Resolución:

Sea el tanto igual a n, entonces el precio se aumenta en el n por 80 < > n/80.

Como no se conoce el precio, vamos a asumir que el precio es 80 soles.



Luego, al nuevo precio (80+n) soles se le rebaja el n por 90 y se obtiene el precio original, en otras palabras, que la rebaja debe ser n soles.

Es decir:

$$\text{Rebaja} = \frac{n}{90}(80+n) = n \Rightarrow n = 10$$

∴ El tanto es igual a **10**.

PROBLEMA 38

Si una cantidad es disminuida en su 20%, ¿en qué tanto por ciento se debe aumentar la nueva cantidad para volverlo a su valor inicial?

Resolución:

¡Cuidado! la respuesta no es 20 %, veamos:

Suponiendo que la cantidad inicial sea 100, entonces se disminuye en su 20 %, dicho de otra manera, en 20, con lo cual quedará 80. Ahora, para volverlo a su cantidad inicial, se debe aumentar a 80 en 20, por lo tanto la pregunta es ¿qué tanto por ciento es 20 de 80?

En otras palabras: $\frac{20}{80} \times 100\% = 25\%$

$\therefore$ Se le debe aumentar en $\boxed{25\%}$.

PROBLEMA 39

En una fiesta, se observa que si todos los hombres salen a bailar, 10 mujeres se quedan sin hacerlo, pero si el 60 % de las mujeres salen a bailar, la cuarta parte de los hombres no podrían hacerlo. ¿Cuántas personas hay en la fiesta?

Resolución:

De la primera parte del enunciado: "Si todos los hombres salen a bailar, 10 mujeres se quedan sin hacerlo". Se deduce que hay 10 mujeres más que hombres, entonces:

# hombres	# mujeres
x	$x + 10$

Luego, de lo que sigue del enunciado, se deduce que el 60% de las mujeres bailarían con los 3/4 de los hombres.

Entonces:

$$60\% \ (\# \text{ mujeres}) = \frac{3}{4}(\# \text{ hombres})$$

$$\frac{3}{5}(x + 10) = \frac{3}{4}(x) \Rightarrow x = 40$$

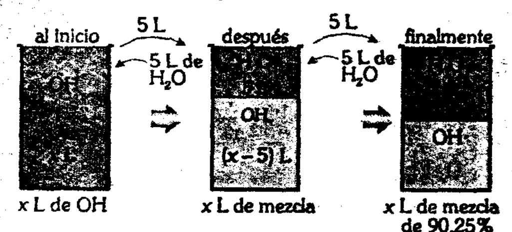
$\therefore$ Total de personas $= 2x + 10 = \boxed{90}$

PROBLEMA 40

¿Cuál es la capacidad de un depósito lleno de alcohol puro del cual se ha sacado dos veces 5 litros, reponiéndose en cada caso con idéntico volumen de agua, resultando alcohol de 90,25%?

Resolución:

La capacidad del depósito es x litros.



En la mezcla final, tenemos:

$$\begin{pmatrix}\text{lo que queda}\\ \text{del OH puro}\end{pmatrix} = 90{,}25\% \ (x) \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

La segunda vez que se saca 5 L estamos sacando una fracción del volumen total, que equivale a 5/x. Luego si se saca 5/x, queda en fracción x–5/x de cada componente de la mezcla.

Es decir, en la mezcla final:

$$\begin{pmatrix}\text{lo que queda}\\ \text{del OH puro}\end{pmatrix} = \left(\frac{x-5}{x}\right)(x-5) \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{(x-5)^2}{x} = \frac{90{,}25}{100}(x)$$

Resolviendo: $x = 100$

$\therefore$ La capacidad del depósito es $\boxed{100 \text{ L}}$

Problemas Propuestos

1. Si el $(x-1)\%$ de $(x+36)$ es $2x/5$, el valor de x es:

A) 2 B) 4 C) 12
D) 9 E) 15

2. El 40 % del 50 % de x es el 30 % de y.
¿Qué tanto por ciento de $(2x+7y)$ es $(x+y)$?

A) 20 % B) 40 % C) 25 %
D) 35 % E) 50 %

3. En una reunión, por cada 6 varones hay cinco mujeres; si se retiran la mitad de los varones y llegan tantas mujeres como habían, ¿qué tanto por ciento de los que quedan serán varones?

A) $23\frac{1}{13}\%$ B) $31\frac{2}{13}\%$ C) $24\frac{3}{13}\%$
D) 25% E) 24%

4. Si gastara el 30 % del dinero que tengo y ganara el 28 % de lo que me queda, perdería 156 soles. ¿Cuántos soles tengo?

A) 2 500 B) 1 500 C) 1 300
D) 3 000 E) 2 400

5. ¿Qué tanto por ciento representa el área de la región sombreada respecto del área de la región no sombreada?

A) 40 %
B) 60 %
C) 35 %
D) 60 %
E) 65 %

6. En una reunión se encuentran 16 varones y 24 damas. ¿Cuántas mujeres deberán retirarse para que el porcentaje de hombres sea un 24 % más que al inicio?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

7. Se sabe que 12 obreros hacen una obra en 28 días. Si 8 obreros aumentan su rendimiento en un 60 %, ¿qué tiempo emplearían en hacer la obra?

A) 40 días B) 30 días C) 20 días
D) 12 días E) 10 días

8. Se mezclan dos clases de avena en proporción de 3 a 2 y se vende ganando el 10 %; luego se mezclan en proporción de 2 a 3, para luego venderlo ganando el 15 %. Determinándose que los precios de venta en ambos casos son iguales, calcule la relación de precios de las dos clases de avena.

A) 5:4 B) 3:2 C) 5:3
D) 4:3 E) 4:1

9. En una mezcla de cemento y arena el 75 % es arena. Si se quita 48 kg de arena y queda una mezcla con $66,\widehat{6}\,\%$ de arena, ¿cuál era el peso de la mezcla original?

A) 192 kg B) 201 kg C) 181 kg
D) 162 kg E) 221 kg

10. Un boxeador ha peleado 34 veces, de las cuales en 18 ha ganado. Él dice que se retirará cuando el 60 % de sus peleas sean ganadas, pero en su intento pierde 2 peleas; por lo que ahora decide retirarse cuando el 80 % de sus peleas sean victorias. ¿Cuántas peleas debe realizar como mínimo para retirarse?

A) 36 B) 54 C) 56
D) 52 E) 32

11. El 50 % de lo que me queda de bebida en la botella es igual al $33,\widehat{3}$ % de lo que ya tomé. Si tomo el 25 % de lo que me queda, ¿qué tanto por ciento de toda mi bebida habré tomado?

A) 70 % B) 74 % C) 62 %
D) 48 % E) 68 %

12. En un colegio, el 40 % de los alumnos son mujeres. El número de mujeres aumentó en 30 % y el de los hombres disminuyó en 10 %. ¿En qué tanto por ciento ha variado el total de alumnos del colegio?

A) Aumenta 2%.
B) Disminuye 5%.
C) Disminuye 6%.
D) Aumenta 5%.
E) Aumenta 6%.

13. Una persona entra a un juego de 3 apuestas consecutivas perdiendo y ganando, alternadamente, 80 %, 10 % y 70 % siempre en relación a lo que tenían o quedaba. Si se retiró con S/66, ¿cuánto dinero perdió?

A) S/934 B) S/1 020 C) S/852
D) S/628 E) S/920

14. Una fábrica redujo en un 20 % el precio de venta de su artículos. ¿En qué porcentaje aumentaron sus ventas, si se sabe que sus ingresos aumentaron en un 20 %?

A) 20% B) 30% C) 50%
D) 30% E) 90%

15. A un contratista le cuesta S/90 el m^3 de piedra en bruto. Al ser triturada, se reduce a un tercio del volumen, pagando por ésta S/60 por m^3. Si ha ganado un 30 % en el contrato, ¿cuánto recibió por m^3 de piedra triturada?

A) S/140,1 B) S/101,6 C) S/171,6
D) S/429 E) S/191,4

16. Una señora lleva 3 000 manzanas al mercado, de las cuales el 30 por 1 000 estaban malogradas y sólo pudo vender el 20 por 30 de las buenas. ¿Cuántas manzanas se quedaron sin vender?

A) 960 B) 970 C) 281
D) 282 E) 1060

17. Halle la cantidad de onzas de agua que se necesita para rebajar al n % el contenido de alcohol de un frasco de loción de afeitar de 9 onzas que contiene m % de alcohol.

A) $\frac{9(m-n)}{n}$ B) $\frac{9m}{n}$ C) $\frac{9m+n}{n}$

D) $9(m-n)$ E) $\frac{m+n}{n}$

18. Si 30 litros de una solución alcohólica contienen 12 litros de alcohol, ¿cuántos litros de agua debemos agregar para obtener una solución al 25 %?

A) 10 B) 12 C) 28
D) 18 E) 20

19. Un tonel tiene una mezcla de 50 % de agua, 20 % de alcohol y el resto de vino. Del tonel se saca el 40 % de su contenido y en su lugar se agrega 15 litros de agua y 36 litros de vino, resultando de esta mezcla final la misma cantidad de agua y vino. ¿Cuántos litros de alcohol tenía la mezcla inicial?

A) 32 B) 35 C) 40
D) 28 E) 20

20. Un bidón está lleno de 100 litros de vino. Se consume el 10 % de vino y se sustituye por agua; luego se consume el 20 % de la mezcla y también se reemplaza por agua. Finalmente se consume el 25 % de la última mezcla y también se sustituye por agua. ¿Cuántos litros de vino puro quedan en el bidón, luego de la última operación?

A) 54 B) 28 C) 72
D) 36 E) 40

21. De un depósito de 100 litros de vino, se saca el 20 % y se reemplaza por agua. Si esta operación se repite por dos veces más, ¿cuántos litros de agua habrá al final?

A) 51,2 B) 48 C) 52
D) 48,8 E) 52,5

22. Al fundir oro y cobre hay una pérdida del 20 % en cada metal. ¿Cuántos gramos de oro puro se debe utilizar si se quiere obtener 48 gramos de oro de 18 kilates?

A) 42 B) 38 C) 45
D) 40 E) 50

23. Se tiene tres recipientes vacíos A, B y C cuyas capacidades son entre sí como 1, 2 y 3. Echamos vino a estos recipientes 45 %, 30 % y 20 % de su volumen respectivamente y las capacidades que faltan se completan con agua. Si luego los 3 volúmenes se vierten en un cuarto recipiente, determine la concentración de vino en el cuarto recipiente.

A) 24 % B) 32,5 % C) 27,5 %
D) 41,2 % E) 30 %

24. ¿En qué tanto por ciento aumenta el volumen de un cilindro cuando la altura se reduce en 25 % y la longitud del radio de la base aumenta en 20 %?

A) 8 % B) 4 % C) 12 %
D) 10 % E) 14 %

25. Si x disminuye en 19 % e y aumenta en 10 %, ¿en qué porcentaje varía la expresión?

$$E = \frac{4}{3}\pi R^3 y^2 . \sqrt{x}$$

A) Aumenta 8 %. B) Aumenta 6,2 %.
C) Aumenta 8,9 %.
D) Disminuye 8 %. E) Disminuye 8,9 %.

26. El 40 % del valor numérico del área de un círculo es el 60 % del valor numérico de la longitud de dicha circunferencia. Halle el diámetro de la circunferencia.

A) 6 μ B) 4 μ C) 5 μ
D) 10 μ E) 7 μ

27. Si la base de un rectángulo aumenta en el 20 %, ¿en qué tanto por ciento debe aumentar la altura para que el área aumente en un 68 %?

A) 32 % B) 40 % C) 51 %
D) 38 % E) 42 %

28. Si el lado de un cuadrado aumenta en 20 %, su área aumentaría en 33 m^2. ¿En cuánto disminuye el área del cuadrado, si su lado disminuye en 20 %?

A) 33m^2 B) 9m^2 C) 34m^2
D) 11m^2 E) 27m^2

29. Si el área de una esfera aumentó en 44 %, ¿en qué tanto por ciento varía su volumen?

A) 62,8 % B) 72,8 % C) 58 %
D) 66 % E) 80 %

30. Si el área de la superficie de una esfera disminuye en un 19 %, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

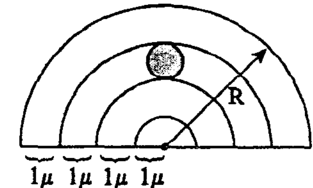
A) 38,3% B) 27,3% C) 28,1%
D) 37,1% E) 27,1%

31. ¿En qué tanto por ciento ha de variar la expresión yx^2, si y aumenta en un 20 % y x disminuye en un 40 %?

A) 50 % B) 58,6 % C) 52,6 %
D) 56,8 % E) 60 %

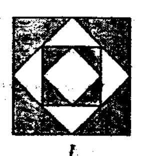
32. ¿En qué tanto por ciento aumenta la región sombreada, si R aumenta 20 %?

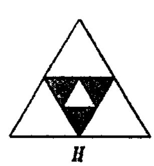
A) 42 %
B) 36 %
C) 28 %
D) 50 %
E) 44 %



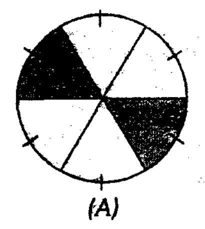
33. ¿Qué tanto por ciento del área de la región no sombreada de (I) es el área de la región sombreada de (II), si el área del cuadrado es los 3/5 del área del triángulo?

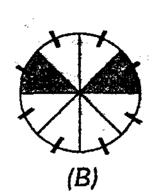
A) 50%
B) 30%
C) 40%
D) 20%
E) 10%


I


II

34. En los dos círculos mostrados, el círculo A tiene área triple que el círculo B.


(A)


(B)

¿Qué tanto por ciento más es el área de la región sombreada de A respecto de la no sombreada de B?

A) 30 %   B) 33 %   C) 42 %
D) $33,\widehat{3}$ %   E) $35,\widehat{2}$ %

35. Luis compró un lote de artículos cuyo precio de lista era S/3 000 con una rebaja del 25 % del precio de compra. Luego vendió todos los artículos de la siguiente forma: vendió el 20 % ganando 5 soles por artículo, vendió el 30 % perdiendo 2 soles por artículo y finalmente vendió lo restante ganando S/4 por artículo. Si como producto final de esta venta Luis ganó S/720, ¿a qué precio compró cada artículo?

A) S/8   B) S/10   C) S/3
D) S/20   E) S/25

36. Una persona compró dos televisores. El primero a 250 soles y el segundo a 350 soles. Si decidió venderlos a 280 y 290 soles respectivamente, calcule si ganó o perdió y en qué tanto por ciento.

A) Perdió 6%.   B) Perdió 5%.
C) Perdió 4%.
D) Ganó 3%.   E) Ganó 5%.

37. En la venta de un reloj, gané tanto como rebajé, que es el 20 % de lo que me costó. ¿Cuánto pensaba ganar sin rebajar, si me costó 60 soles más de lo que gané?

A) S/30   B) S/50   C) S/40
D) S/42   E) S/36

38. Juana tiene 210 limones los cuales piensa vender 7 por S/5; Florencia tiene la misma cantidad de limones los cuales piensa vender 3 por S/2. Un comisionista les propone que le den ambas todos sus limones para que los venda 3 por S/2,5 y le paguen a él, como comisión, el 20 % de la venta. Como ellas no dominan las matemáticas, aceptan. Ganan o pierden entre las dos y cuánto.

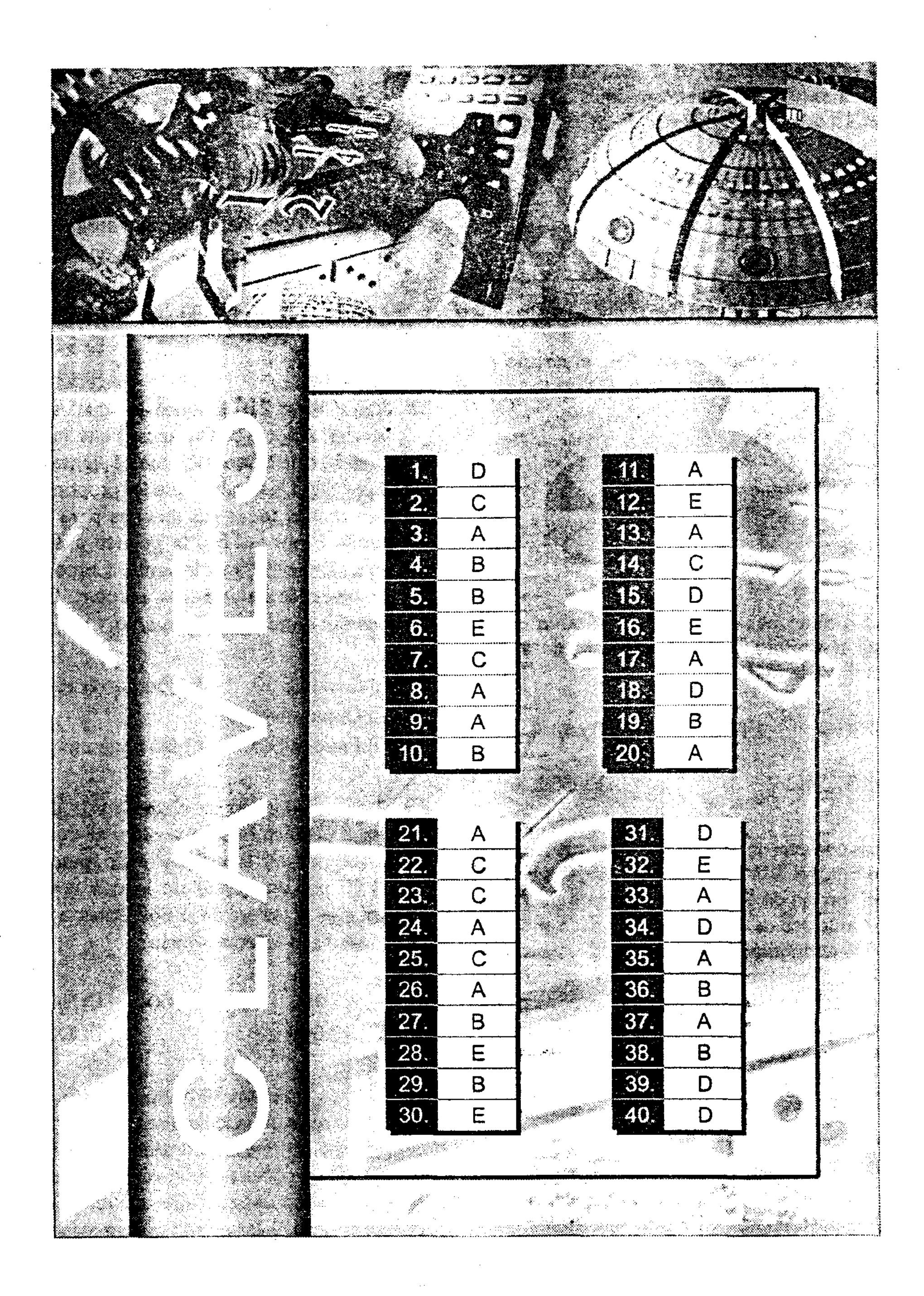
A) Ganan S/10.   B) Pierden S/10.
C) Ganan S/30.
D) Pierden S/30.   E) No ganan ni pierden.

39. A encarga vender un objeto a B y éste a su vez a C quien hace la venta y se queda con un 20 por mil; B recibe el resto, pero retiene el 10 por doscientos de lo que le dio C y entrega el saldo de 1 862 soles a A. ¿En cuánto se vendió el objeto?

A) S/1 900   B) S/2 200   C) S/1 980
D) S/2 000   E) S/2 020

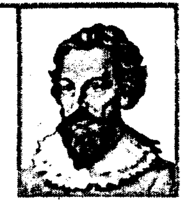
40. Se va a rifar un VHS cuyo costo ha sido 5 040 soles, para lo cual se va a imprimir 300 boletos, de los cuales se piensa vender sólo el 80 %. ¿A cómo se debe vender cada boleto, si se piensa obtener una ganancia que sea igual al 30 % del monto que se recaudaría?

A) S/20   B) S/25   C) S/28
D) S/30   E) S/32



CLAVES

1.	D	11.	A	21.	A	31.	D
2.	C	12.	E	22.	C	32.	E
3.	A	13.	A	23.	C	33.	A
4.	B	14.	C	24.	A	34.	D
5.	B	15.	D	25.	C	35.	A
6.	E	16.	E	26.	A	36.	B
7.	C	17.	A	27.	B	37.	A
8.	A	18.	D	28.	E	38.	B
9.	A	19.	B	29.	B	39.	D
10.	B	20.	A	30.	E	40.	D



Francois Vieta

El Arranque de la Matemática Moderna I

Matemático francés, nacido en Fontenay – Pe – Comte, Poitov, en 1540; y muerto en París el 13 de diciembre de 1603.

Quizá no sea mera casualidad que el padre de la matemática moderna, Francois Viete (Franciscus Vieta, en latín) fuera uno de los descifradores más famosos de su época. Fue el primer matemático que utilizó con completa libertad el ***cálculo literal****, es decir, el cálculo con letras que representan no sólo incógnitas, como se hacía desde mucho tiempo atrás, sino también datos. Los problemas más abstractos de la física matemática contemporánea son inseparables del lenguaje formal de las matemáticas, el lenguaje matemático simbólico cuyo origen está en las obras de Vieta,* ***inventor del álgebra simbólica****.*

Vieta se hizo famoso al descifrar una carta que el comendador Moreo enviaba en 1 589 al rey de España Felipe II, acérrimo enemigo de Enrique IV, rey de Francia y de Navarra. Así la costumbre de Vieta de cifrar y descifrar mensajes o codificar y descodificar textos pudo darle la idea del valor ***arbitrario*** *o, mejor dicho,* ***convencional*** *de los símbolos y particularmente de las letras. Esto le ayudaría a dar el paso en dirección de su* ***Arte Analítico****, hecho que algunos ven como el más importante en las ciencias exactas. En alguna traducción al francés - Vieta escribía en latín, desde luego - su obra se llamó Álgebra Nueva; para Vieta el vocablo* ***álgebra*** *era un barbarismo.*

Se puede afirmar también sin gran riesgo de error que todas las ciencias exactas tienen su origen en los problemas astronómicos. Éste es el origen muy particularmente de la trigonometría. Vieta fue un gran inventor en trigonometría, la disciplina que lo condujo a su ***Arte Analítico****.*

En efecto, en 1571 Vieta empieza a redactar su ***Canon mathemáticus*** *en cuya primera parte, con un radio de 100000 y calculados minuto a minuto, muestra los valores de las seis líneas trigonométricas. En la segunda parte, el* ***Libro de las Inspecciones Universales*** *contiene fórmulas, muy primitivas por supuesto, para la resolución de triángulos; fórmulas sincopadas que indican las operaciones que hay que efectuar para llegar al valor faltante, con lados o ángulos como datos. Este método constituía la primera manifestación de la necesidad de fórmulas generales en matemáticas y el punto de partida de Vieta hacia el principio del álgebra moderna: la* ***representación de incógnitas y datos*** *con letras del alfabeto ligadas por signos de operaciones para obtener la solución de casos particulares.*

Al sustituir en la trigonometría las reglas ***expresadas*** *en lenguaje ordinario por cuadros que de un vistazo permitían abarcar proporciones entre el elemento desconocido del triángulo y los tres datos representados en forma general mediante letras, Vieta estaba* ***introduciendo las fórmulas en matemáticas.*** *Tal vez, entonces, al leer o releer las álgebras de Cardano y Bombelli, observó que los ejemplos numéricos de ilustración donde las operaciones indicadas se ejecutaban* ***sin dejar huella,*** *serían ventajosamente sustituidos por fórmulas donde se hacían claras las incógnitas, los datos y, sobre todo, su disposición y relaciones en el proceso. Nacía* ***la práctica de sustituir en la fórmula, característica de la forma en que se almacena y utiliza la información en la ciencia moderna.***

En el libro ***Inspecciones Universales*** *se utiliza fracciones decimales, por primera vez se calcula el número* π *con once cifras y, lo más importante, se publica la fórmula para el coseno del ángulo múltiple, que conocemos con el nombre de fórmula de De Moivre.*

Vieta no había defraudado en la primera ocasión en que el rey había solicitado su ayuda para descifrar el lenguaje secreto del rey de España, y tampoco defraudó cuando en 1594 el embajador de Holanda visitaba uno de los castillos reales, y ante la enumeración de los notables de Francia, éste le hizo notar al rey que "en Francia no existen matemáticos". "Sí" -dijo el rey-, "tengo uno y excelente; que vayan a buscar al ***Sr. Vieta****". Cuando éste llegó, el embajador le mostró un libro de Adrián Van Roomen (en latín, Adrianus Romanus), que inicia con una lista de los matemáticos del mundo en la que Vieta no figura.*

Después del prefacio puso un problema y desafió la sagacidad de todos los matemáticos del mundo. El problema consistía en resolver una ecuación de grado 45: primero escribía un polinomio de 23 términos con las potencias impares desde 1 hasta 45 y después, a manera de ejemplos, daba ***tres números*** *a los que se igualaba el polinomio y* ***las tres soluciones;*** *para terminar daba el número propuesto sin la solución correspondiente.*

Leído el problema, Vieta tomó un lápiz y escribió inmediatamente una solución. Al día siguiente le envió al embajador veintidós soluciones más . Adrián Romano se sorprendió al recibir de un matemático desconocido más soluciones que las que pedía. Antes, un amigo de Romano, que había leído su libro, adivinó el enigma, pues, en efecto, se trataba de un ***enigma.*** *Resulta imposible imaginar siquiera que en ese tiempo alguien pudiese atacar una ecuación de grado 45. Hoy todavía un problema de ese grado pondría a prueba las capacidades de una computadora de velocidad vertiginosa y la teoría avanzada de Galois para contestar a la pregunta: ¿es posible resolver la ecuación con radicales?*

De las 45 soluciones del problema, Vieta dio 23, pues las soluciones negativas no existían para los matemáticos de la época.

COMPARACIÓN DE MAGNITUDES

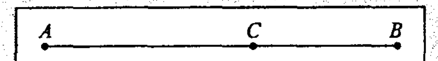
"No hay ciencia que hable de las armonías de la naturaleza con más claridad que la matemática".

Carus

Lectura 11

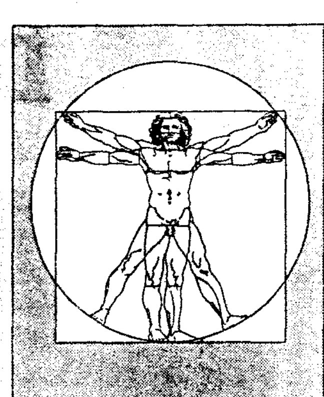
¿Qué es la razón áurea?

Se denomina así a una proporción de la Geometría que se obtiene al dividir un segmento en dos partes de manera que el cociente entre la longitud del segmento mayor y la longitud del segmento inicial es igual al cociente entre la longitud del segmento menor y la del segmento mayor. Observemos la siguiente figura:



El punto C crea una sección áurea en el segmento rectilíneo AB si $AC/AB = CB/AC$. Esta proporción tiene el valor numérico 0,618..., que se puede calcular de la siguiente manera: si $AB = 1$ y la longitud de $AC = x$, entonces $AC/AB = CB/AC$ se convierte en $x/1 = (1 - x)/x$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por x, se tiene que $x^2 = 1 - x$; y por tanto $x^2 + x - 1 = 0$. Esta ecuación de segundo grado se puede resolver utilizando la fórmula cuadrática, que da $x = (-1 + \sqrt{5})/2 = 0,6180339...$



Leonardo da Vinci (1 452 - 1 519) canon de las proporciones del cuerpo humano.

Ciertos historiadores afirman que las propiedades de las secciones áureas ayudaron a los discípulos del matemático y filósofo griego Pitágoras a descubrir las rectas inconmensurables, que son el equivalente geométrico de los números irracionales. Sin embargo, lo que sí es cierto es que desde la antigüedad, muchos filósofos, artistas y matemáticos se han interesado por la sección áurea, que los escritores del Renacimiento llamaron proporción divina.

Las proporciones del hombre:

El dibujo, que ilustra esta lectura, titulado "Las proporciones del hombre", procede de un cuaderno de apuntes de Leonardo da Vinci. Está basado en las teorías del arquitecto romano Marco Vitrubio sobre la aplicación de la sección áurea al ser humano: la proporción entre la distancia desde la cabeza hasta el ombligo y desde éste hasta los pies, debe ser la misma que la proporción entre la distancia desde el ombligo hasta los pies y desde la cabeza hasta los pies. El hecho de que este sistema de relaciones armónicas, también conocido como la proporción divina, pudiera trasladarse a la figura humana, tuvo una gran importancia durante el Renacimiento.

FUENTE : Internet

Objetivos

1. *Conocer los conceptos de magnitud y cantidad, ya que éstos son necesarios para comprender y explicar los cambios que ocurren en los fenómenos de la naturaleza.*
2. *Reconocer las magnitudes que nos rodean, relacionarlas y compararlas, determinando si son proporcionales o no.*
3. *Establecer la dependencia entre magnitudes, ya que generalmente la variación de los valores de una magnitud depende de la variación de los valores de otra u otras magnitudes.*
4. *Aprender a graficar el comportamiento de los valores que asumen dos magnitudes bajo ciertas condiciones.*
5. *Conocer los principios teóricos, aplicándolo así en diversas situaciones de la vida diaria.*

Introducción

Sabemos que, la materia está en continuo cambio y movimiento y ésta es objeto de estudio de muchas ciencias. El hombre a lo largo de su proceso de desarrollo descubre las características y propiedades de la materia, las cuales pueden ser cuantificados a partir de un patrón de medida. Por ejemplo, la temperatura, la velocidad, la masa, etc, son propiedades o cualidades y el hombre designa con estos, para poder diferenciarlas una de otras, utiliza estos nombres. Estas cualidades cuantificables reciben el nombre de ***magnitudes****.*

En este capítulo nos vamos a ocupar de las relaciones entre las magnitudes, de la comparación de los mismos y de los resultados que se obtienen producto de esa comparación.

En economía, por ejemplo, manteniendo todo lo demás constante, existe una clara relación entre el precio de mercado de un bien y la cantidad demandada del mismo. Cuando sube el precio de un bien los compradores tienden a comprar menos; cuando baja y todo lo demás se mantiene constante, la cantidad demandada aumenta. Este último se conoce como la ley de la demanda.

En Física, un auto con MRU que se desplaza de una ciudad A a otra ciudad B, notaremos que empleará un cierto tiempo. Pero si queremos que emplee menos tiempo en ese recorrido, debemos hacer que vaya más rápido y si hacemos que el auto viaje con menor rapidez entonces empleará más tiempo para recorrer la misma distancia. Es decir, manteniendo la distancia recorrida constante, la rapidez y el tiempo tienen una relación de dependencia de tipo inversa.

En estos casos se observa la dependencia entre magnitudes; es decir, cuando una magnitud varía, entonces varía también otra y otras. Y cuando existe dependencia entre magnitudes diremos que existe relación entre ellas.

NOCIONES GENERALES

MAGNITUD

Entendemos por magnitud, a la propiedad o cualidad común a un conjunto de seres, objetos o entes, cuya intensidad puede variar (aumentar o disminuir) y además puede ser medido, a partir de un patrón de medida.

CANTIDAD

Es el resultado de medir la intensidad de una magnitud. También se dice que la cantidad es el valor de un estado particular de la magnitud. Por lo tanto, la belleza, la sed, el afecto, etc. son cualidades comunes a un conjunto de seres, pero no es posible medirlas; en cambio la velocidad, el peso, el tiempo, etc., son cualidades comunes a seres o entes y es posible medir su variación. Por lo tanto estos últimos nos dan la idea de magnitud los cuales, serán motivo de estudio en el presente capítulo.

Ejemplo:

Magnitud	Cantidad
Longitud	35 m
Volumen	10 litros
Rapidez	50 km/h
Número de obreros	12 obreros
Precio	18 soles
Área	22 m^2
Presión	2 atmósferas
Temperatura	19°C
Masa	5 kg
Tiempo	3 horas
Eficiencia	20 %

COMPARACIÓN DE MAGNITUDES

Diremos que una magnitud esta relacionada con otra, si es que existe dependencia entre ellas; por ello, si variamos los valores de una magnitud, entonces también varían los valores que asume la otra magnitud. Cuando comparemos magnitudes, haremos entre aquellos que estén relacionados.

Ejemplo 1

Si analizamos para un campanario, el **número de campanadas** y el **tiempo** que se emplea en tocar dichas campanadas, observamos que, manteniendo constante el tiempo entre campanada y campanada, a mayor número de campanadas le corresponde mayor tiempo y a menor número de campanadas le corresponde menor tiempo. Si una depende de la otra, diremos que están relacionadas, en este caso, en forma **directa** (pero no son directamente proporcionales).

Ejemplo 2

Si analizamos el **número de artículos** que producen en un día un cierto **número de máquinas,** todas iguales. Observamos que, si aumentamos el número de máquinas, entonces el número de artículos producidos en un día también aumenta, y si disminuimos el número de máquinas, también disminuye el número de artículos producidos en un día. Entonces vemos que una magnitud depende de la otra, eso significa que están relacionadas, y en este caso son **directamente proporcionales**.

Ahora vemos que hay magnitudes relacionadas entre sí, las cuales pueden ser comparadas. Y como resultado de esa comparación (sólo se comparan dos magnitudes) podemos afirmar que las magnitudes son proporcionales o no. Así el número de campanadas y el tiempo (en el ejemplo 1) no son proporcionales.

El **número de artículos** y el **número de máquinas** (en el ejemplo 2), sí son proporcionales.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Se dice que dos magnitudes relacionadas, son proporcionales, cuando al variar uno de ellos, el otro también varía en la misma proporción. Es decir, si al variar el valor de una de ellas, multiplicando por un número cualquiera, el valor correspondiente del otro también varía, multiplicándose por el mismo númerc o por la inversa del mismo.

MAGNITUDES NO PROPORCIONALES

Dos magnitudes que tienen relación no son proporcionales cuando al variar uno de ellos entonc s el otro también varía, pero no en la misma proporción. Es decir, si el valor de una de ellas varía al, multiplicarlo por un número cualquiera, entonces el valor correspondiente de otro también variaría, pero no queda multiplicado por el mismo número ni por la inversa del mismo.

COMPARACIÓN SIMPLE

Se presenta comparación simple cuando de varias magnitudes relacionadas entre sí, sólo varían dos de ellas y las demás permanecen constantes. La comparación se da entre las dos magnitudes que varían.

> En este capítulo explicaremos, la comparación entre magnitudes proporcionales.
> Las magnitudes proporcionales, a su vez, pueden ser directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (D.P.)

Para empezar, veamos el caso del número de máquinas y el número de artículos producidos en un día. Digamos que 2 máquinas producen 4 artículos en un día. Por lo tanto, observaremos que si hay más máquinas, se producirá más artículos y si hay menos máquinas, se producirá menos artículos en un día (se asume que cada una de las máquinas produce lo mismo en un día).

Veamos:

	# máquinas	# artículos	
	2	4	
$\times\frac{3}{2}$	3	6	$\times\frac{3}{2}$
$\times 2$	4	8	$\times 2$
$\times\frac{5}{2}$	5	10	$\times\frac{5}{2}$
$\times\frac{1}{2}$	1	2	$\times\frac{1}{2}$

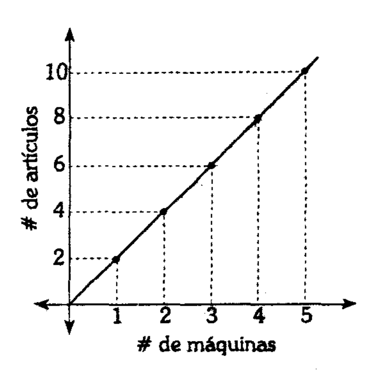
Según el cuadro, se observa que si el valor del **número de máquinas** se multiplica por un número, entonces el valor del **número de artículos** también quedará multiplicado por el mismo número. En otras palabras, si el valor de uno aumenta al doble, el otro también aumenta al doble o si uno disminuye a la mitad, el otro también disminuye a la mitad, y así sucesivamente. Esto significa que el número de máquinas y el número de artículos producidos en un día, varían en **proporción directa**. Si se cumple esto, entonces diremos que estas dos magnitudes son **directamente proporcionales** (D.P.).

También observamos que para cada pareja de valores correspondientes:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = 2 = \text{constante}$$

> El **cociente** de valores correspondientes del número de artículos y del número de máquinas es **constante**.
>
> $$\frac{\text{valor del \# de artículos}}{\text{valor del \# de máquinas}} = \text{constante}$$

Ahora, representemos gráficamente esta relación en el sistema de coordenadas rectangulares. Para esto, en el eje x colocaremos los valores del número de máquinas y en el eje y, los valores del número de artículos correspondientes.



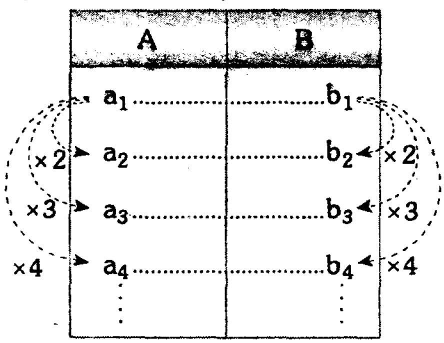
Cada punto graficado representa un valor del número de máquinas y su correspondiente valor del número de artículos.

También, observamos que la gráfica de la relación es un conjunto de puntos aislados, los cuales pertenecen a una misma línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

Definición

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales (D.P.), si varían en proporción directa. Es decir, si al multiplicar el valor de uno de ellos por un número, entonces el valor correspondiente de la otra magnitud también queda multiplicada por el mismo número.

Esto significa que, si duplicamos el valor de A, entonces también se duplica el correspondiente valor de B; o si triplicamos el valor de A, también se triplica el valor de B, y así sucesivamente.



A	B
a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_3
a_4	b_4
⋮	⋮

Si las magnitudes A y B son D.P, entonces se cumple que, el cociente de sus valores correspondientes es constante.

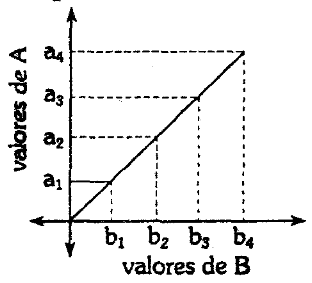
Esto se denotaría así:

$$\frac{\text{valor de A}}{\text{valor de B}} = k$$

Donde k es constante de proporcionalidad directa; es decir:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \ldots = k$$

Si graficamos esta relación en el sistema de coordenadas rectangulares, obtendremos un conjunto de puntos para los valores correspondientes a una misma línea recta, la cual pasa por el origen de coordenadas. Graficando:



Ejemplo 1

Para pintar una pared de 120 metros de largo se necesitó n obreros. Pero si la pared fuese 40 metros más larga, haría falta 5 obreros más. ¿Cuántos obreros se emplearon?

Resolución:

Aquí sólo varían el **número de obreros y la obra** (en metros), todo lo demás es constante.

Luego comparamos: si hay más obreros, se hará más obra; es decir, si duplicamos la cantidad de obreros, entonces se duplicará la cantidad de obra. Concluimos que el número de obreros y la obra son D.P.

# obreros	obra
n	 120
n + 5	 160

Como son D.P, se cumple que el cociente es constante para cada par de valores correspondientes.

$$\frac{\#\text{ de obreros:}}{\text{obra:}} \quad \frac{n}{120} = \frac{n+5}{160}$$

Resolviendo: $n = 15$

∴ Se empleó 15 obreros.

Ejemplo 2

Las magnitudes A^2 y B son D.P., cuando A vale 10, B es 7. ¿Qué valor toma B cuando A vale 20?

Resolución:

Sea x el valor de B cuando A vale 20.

A^2	B
$(10)^2$...	... 7
$(20)^2$...	... x

Como A^2 D.P. B, entonces:

$$\frac{\text{valor de B}}{\text{valor de } A^2} = \text{cte}$$

$$\frac{x}{20^2} = \frac{7}{10^2} \Rightarrow x = 28$$

∴ B toma el valor de 28.

Ejemplo 3

La presión (en atmósfera) de un gas, en un determinado recipiente, es proporcional a la temperatura (en grados Kelvin). Si un gas tiene una presión de 10 atm, con una temperatura de 200 K, ¿en cuánto varía la presión si la temperatura aumenta en 100 K?

Resolución:

En el enunciado dice: "la presión es **proporcional** a la temperatura". Esto implica que es **directamente proporcional**.

Sea x la presión (en atm) cuando la temperatura aumenta en 100 K, es decir es 300 K

Presión	Temperatura
10	 200
x	 300

Como son D.P., sabemos que el cociente es constante para sus valores correspondientes, es decir:

$$\frac{x}{300} = \frac{10}{200} \Rightarrow x = 15$$

∴ Observamos que la presión aumenta de 10 atm a 15 atm; es decir, 5 atm.

Nota:

Si A y B son magnitudes D.P., sabemos que la gráfica de esta relación es un conjunto de puntos que pertenecen a una misma recta que pasa por el origen de coordenadas (no toma al par (0;0)). Para esa línea recta corresponde a la gráfica de una función (que e este caso es una función lineal). Ahora, analicemos la relación entre A y B como función.

Como las magnitudes A y B son D.P., sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\boxed{\frac{\text{valor de A}}{\text{valor de B}} = k;} \quad \text{(k es constante)}$$

Sea: y el valor de A
x el valor de B

tenemos entonces:

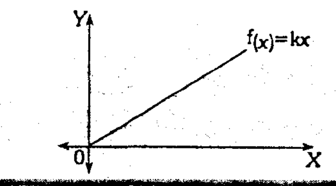
$$\boxed{\frac{y}{x} = k} \Rightarrow \boxed{y = k.x}$$

Lo que representa la **ecuación de una recta** que pasa por el origen de coordenadas (si toma al par (0;0)).

Además: $y = f(x)$

∴ $\boxed{f(x) = k \, . \, x}$

En donde a f(x) le llamaremos **función de proporcionalidad directa**.



Ejemplo 1

Si f(x) es una función de proporcionalidad directa, donde f(4) = 12, calcula f(7) + f(2).

Resolución:

Como f(x) es una función de proporcionalidad directa, sabemos que:

$$f(x) = K \, . \, x$$

Según el dato: f(4) = 12 ⇒ K . 4 = 12
K = 3

Luego: f(7) = 3 . 7 = 21
f(2) = 3 . 2 = 6

∴ f(7) + f(2) = 27

Ejemplo 2

Si f(x) es una función de proporcionalidad directa, calcula:

$$M = \frac{f(8).f(2)-[f(3)]^2}{f(7).f(1)}$$

Resolución:

Sabemos que: $f(x) = k.x$

Entonces en M.

$$M = \frac{(K.8)(K.2)-(K.3)^2}{(K.7)(K)}$$

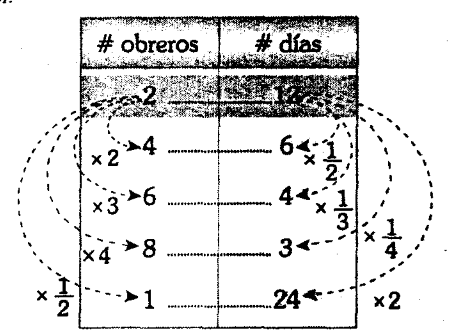
$$M = \frac{16K^2-9K^2}{7K^2} = \frac{7K^2}{7K^2} \quad \therefore \ M = 1$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (I.P.)

Veamos un ejemplo: 2 obreros pueden hacer una obra en 12 días.– Analicemos los valores correspondientes que pueden asumir las magnitudes número de obreros y número de días para realizar la obra.

Observamos que si hay más obreros, igual rendimiento, entonces la obra se hará en menos días; o si hay menos obreros, se empleará más días en hacer la misma obra.

Así:



Se observa que si el valor **del número de obreros** se multiplica por un número, entonces el valor del **número de días** también es multiplicado, pero por el inverso de dicho número.

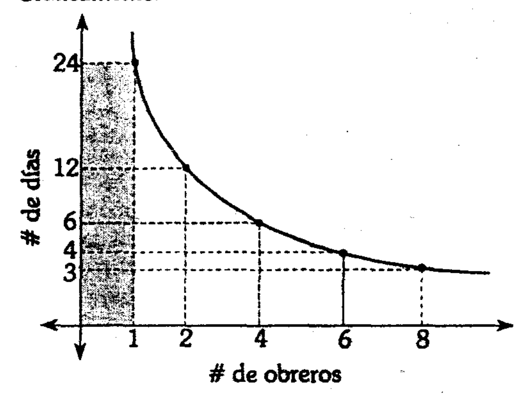
Es decir, si el valor del número de obreros aumenta al triple, el valor del otro disminuye a la tercera parte o si el valor del número de obreros disminuye a la mitad, el otro se duplica, y así sucesivamente. Esto significa que el número de obreros y el número de días varían en **proporción inversa**. Y si se cumple esto, diremos que estas dos magnitudes son **inversamente proporcionales** (I.P.).

También observamos a cada pareja de valores correspondientes:

$2 \times 12 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 8 \times 3 = 1 \times 24 = 24$

> El **producto** de los valores correspondientes del número de obreros y el número **de días es constante**
>
> $\begin{pmatrix} \text{valor de} \\ \text{\# obreros} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{valor de} \\ \text{\# días} \end{pmatrix} = \text{constante}$

Gráficamente:



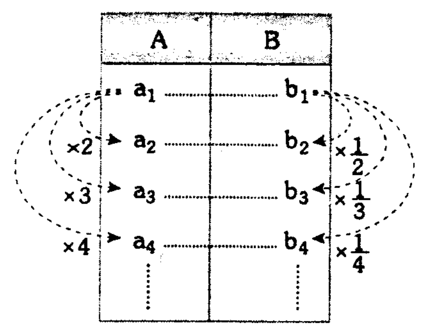
Cada punto graficado representa un valor del número de obreros y su correspondiente valor del número de días. Además, para cada punto, se forma un rectángulo con los ejes de coordenadas. Las áreas de las regiones rectangulares (como muestra en el gráfico) son iguales.

También observamos que la gráfica es un conjunto de puntos, los cuales pertenecen a una misma curva que se conoce como hipérbola equilátera.

Definición

Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales (I.P.)cuando varían en proporción inversa; es decir, si al multiplicar el valor de uno de ellos por un número, entonces el valor correspondiente de la otra magnitud también queda multiplicado pero por el inverso de dicho número.

Esto significa que si duplicamos el valor de A, entonces el correspondiente valor de B se reduce a la mitad, o si triplicamos el valor de A, entonces el valor de B se reduce a su tercera parte, y así sucesivamente.



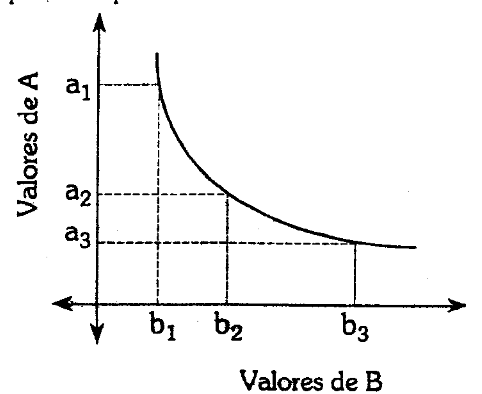
Si las magnitudes A y B son I.P., entonces se cumple que **el producto** de sus valores correspondientes es **constante**, lo que significa:

$$\begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{de A}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{de B}\end{pmatrix} = K$$

Donde k es constante de proporcionalidad inversa; es decir que:

$$a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = a_3 \times b_3 = \ldots = k$$

Graficando, obtenemos un conjunto de puntos para los valores correspondientes, de modo que todos ellos pertenecen a una misma hipérbola equilátera. Así



Ejemplo 1

Si A es I.P. a $\sqrt[3]{B}$, sabiendo que A vale 35, B, 27, ¿cuánto vale A cuando B vale 216?

Resolución:

Sea x el valor de A cuando B vale 216.

A	$\sqrt[3]{B}$
35	$\sqrt[3]{27}$
x	$\sqrt[3]{216}$

Por dato, si A es I.P. $\sqrt[3]{B}$, entonces se cumple que el producto es constante para cada par de valores correspondientes.

$$(x)\,.\,(6) = (35)\,(3) \;\Rightarrow\; x = 17{,}5$$

∴ Cuando B vale 216, A vale 17,5

Ejemplo 2

La presión de un gas es I.P. al volumen del recipiente que lo contiene. ¿A qué presión está sometido un gas, si al disminuir esta presión en 8 atmósferas el volumen de dicho gas se triplica?

Resolución:

Si la presión del gas es x atmósfera con un volumen V, entonces:

Presión	Volumen
x	V
$x-8$	3V

Por el dato, si la presión y el volumen son I.P. , entonces se cumple que:

$$(x)\;(\cancel{V}) = (x-8)\,(3\cancel{V})$$

$$x = 3x - 24$$

$$x = 12$$

∴ La presión del gas es 12 atm

Ejemplo 3

La rapidez de Juan es el doble que la de Luis y éste es 50 % más rápido que Carlos. Si Carlos hace un trabajo en 12 horas, ¿en qué tiempo lo haría Juan ?

Resolución:

Primero veamos la rapidez de cada uno. Si la rapidez de Carlos es como 2, entonces la de Luis es 50 % más, es decir, 3 y la de Juan será como 6.

Ahora, si comparamos la rapidez con el tiempo en horas, encontramos que son I.P.

	Rapidez	Tiempo
Carlos	2	. . 12
Juan	6	. . . x

Operando: $6x = 2 \times 12 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ Juan haría el trabajo en 4 horas.

Nota:

Si A y B son magnitudes I.P. sabemos que se cumple:

$$\begin{pmatrix}\text{Valor}\\ \text{de A}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{de B}\end{pmatrix} = k \quad \text{(k es constante)}$$

Si: y el valor de A y
x el valor de B ,

Entonces: $y \cdot x = k \Rightarrow y = \dfrac{k}{x}$

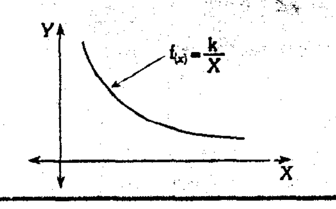
Lo que representa la **ecuación de una hipérbola equilátera**.

Además: $y = f(x)$

$$\therefore \; f(x) = \frac{k}{x}$$

En donde a f(x) le llamaremos **función de proporcionalidad inversa.**

Así :



Ejemplo:

Si f(x) es una función de proporcionalidad inversa, halle:

$$E = \frac{f(10) \times f(15)}{f(20)}, \text{ si } f(5) = 6$$

Resolución:

Como f(x) es una función de proporcionalidad inversa: $F(x) = \dfrac{k}{x}$

Además: $\underbrace{f(5)} = 6$

$$\frac{k}{5} = 6 \Rightarrow k = 30$$

Luego, nos piden calcular:

$$E = \frac{\frac{30}{10} \times \frac{30}{15}}{\frac{30}{20}} = \frac{\cancel{3} \times 2}{\frac{\cancel{3}}{2}} = 4$$

Ejemplo:

Sabiendo que f(x) es una función de proporcionalidad inversa. Calcule el valor de:

$$A = \frac{f(2a) + f(3a)}{f(a) - f(4a)}$$

Resolución:

Por dato del problema: $f(x) = \dfrac{k}{x}$

Entonces:

$$A = \frac{\frac{k}{2a} + \frac{k}{3a}}{\frac{k}{a} - \frac{k}{4a}}$$

$$A = \frac{\frac{\cancel{k}}{\cancel{a}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{\frac{\cancel{k}}{\cancel{a}}\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{18}$$

$$\therefore \; A = \frac{10}{9}$$

A continuación presentamos algunos casos de magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Magnitud	(Vs)	Magnitud
# obreros	D.P.	obra
# obreros	I.P.	tiempo
# obreros	D.P.	dificultad
# obreros	I.P.	eficiencia
obra	D.P.	tiempo
obra	I.P.	dificultad
obra	D.P.	eficiencia

Magnitud	(Vs)	Magnitud
tiempo	D.P.	dificultad
tiempo	I.P.	eficiencia
dificultad	D.P.	eficiencia
velocidad	D.P.	recorrido
velocidad	I.P.	tiempo
tiempo	D.P.	recorrido

COMPARACIÓN MÚLTIPLE

Se presenta una comparación múltiple cuando; entre varias magnitudes relacionadas entre sí, varían dos o más de ellas. La comparación se hace de la siguiente manera.

1° Sólo se comparan las magnitudes que varían.

2° Se elige una magnitud cualquiera de ellas y se compara con cada una de las demás. La comparación se hace de dos en dos.

3° Al momento de comparar dos magnitudes, las demás se deben considerar constantes.

4° Cuando dos magnitudes son D.P., se cumple que el cociente de sus valores correspondientes es constante y cuando son I.P., el producto es constante.

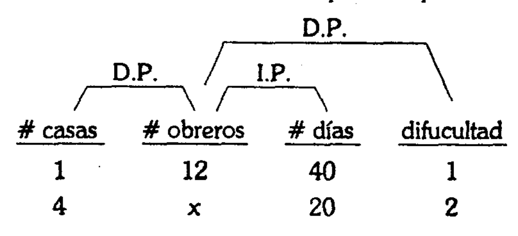
5° Se aplica las propiedades de las magnitudes proporcionales, principalmente la propiedad (5).

Ejemplo:

Si una casa puede ser construida por 12 obreros en 40 días, ¿cuántos obreros se requieren para construir 4 casas en 20 días en un terreno doblemente difícil que el anterior?

Resolución:

Sea x el número de obreros que se requiere.



- Elegimos una magnitud arbitrariamente (número de obreros en este caso), para compararla con cada una de las demás.
- Al comparar, cada vez, dos magnitudes, nos centramos en éstas, asumiendo las demás como constantes, al momento de determinar la relación D.P. o I.P.

Luego de comparar, tenemos:

$$\frac{(\#\text{ obreros})\ (\#\text{ días})}{(\#\text{ casas})\ (\text{dificultad})} = \text{constante}$$

$$\frac{x \times 20}{4 \times 2} = \frac{12 \times 40}{1 \times 1} \Rightarrow x = 192$$

∴ Se requiere 192 obreros.

PROBLEMA 1

Sabemos que A varía D.P. a B (siendo C constante) y que B varía I.P. a C (siendo A constante). Además, si A = 6 ; B = 2 y C = 12, ¿cuánto será el valor de B, cuando A = 16 y C = 2?

Resolución:

Sea el valor de B igual a x.

Ordenando los datos:

A —D.P.— B —I.P.— C

A	B	C
6	2	12
16	x	2

Observa que ya se han comparado la magnitud B con las otras.

Recordemos que cuando dos magnitudes son D.P., el cociente de sus respectivos valores es constante, y cuando son I.P. el producto, es constante.

Planteando:

$$\frac{x \cdot 2}{16} = \frac{2 \times 12}{6}$$

$$x = 32$$

∴ El valor de B será 32.

PROBLEMA 2

Julio pensó hacer un trabajo en 20 días, pero tardó 20 días más por trabajar 3 horas menos cada día. ¿Cuántas horas diarias trabajó?

Resolución:

Hay un caso real y otro caso supuesto para lo que pensó.

Si pensó trabajar x horas diarias, entonces:

I.P.

	# días	h/d
pensó: →	20	x
caso real: →	40	x-3

Como son I.P. sabemos que el producto de cada pareja de valores es constante.

Así:

$$20 \cdot x = 40(x-3)$$

$$x = 6$$

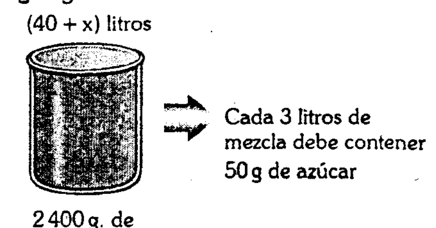
∴ Trabajó: 6 – 3 = 3 h/d.

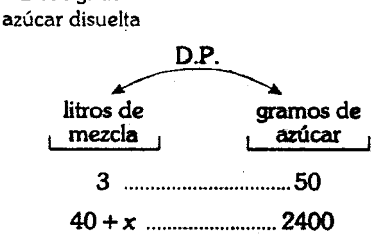
PROBLEMA 3

Se ha disuelto 2 400 g de azúcar en 40 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua hay que agregar para que cada 3 litros de mezcla contenga 50 gramos de azúcar?

Resolución:

Se agrega x litros de agua. Como había 40 litros, ahora tendremos 40 + x litros, y la cantidad de azúcar disuelta será la misma, ya que sólo se agrega agua.





Como son D.P., el cociente es constante:

$$\frac{40+x}{2400} = \frac{3}{50} \rightarrow x = 104$$

∴ Hay que agregar 104 litros de agua.

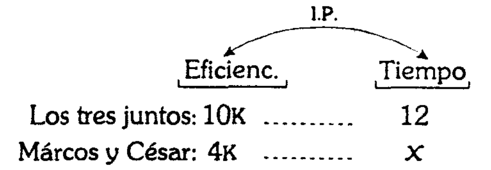
PROBLEMA 4

Pedro es el doble de eficiente que Marcos y a su vez éste es el triple de eficiente que César. Si entre los tres pueden terminar una obra en 12 días, ¿en cuántos días Marcos junto a César harían la misma obra?

Resolución:
Sea la eficiencia de César igual a k.
Veamos primero las eficiencias:

Pedro	Marcos	César
6K	3K	K

Ahora comparamos la eficiencia con el número de días:



Luego:
$4K . x = 10K . 12$
$x = 30$

$\therefore$ Marcos y César harían la obra en 30 días.

PROBLEMA 5
El sueldo de un obrero es proporcional al cuadrado de su edad. Si un obrero que actualmente tiene 20 años ha proyectado ganar S/1 200 dentro de 5 años, ¿cuánto gana actualmente (en soles)?

Resolución:
Del enunciado:

D.P.

	Sueldo	(Edad)^2
Actual:	x	$(20)^2$
Dentro 5 años:	1200	$(25)^2$

> Cuando en un enunciado sólo se diga proporcional y no especifiquen que tipo de proporción es, se sobreentiende que se trata de directamente proporcional (D.P.).

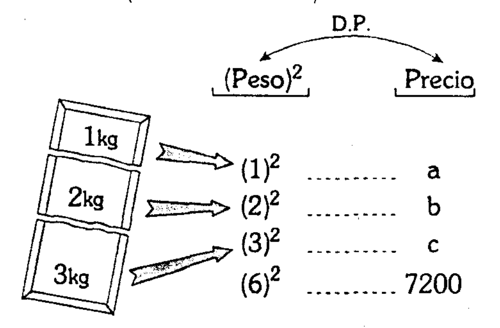
Como son D.P. obtenemos:

$$\frac{x}{20^2} = \frac{1200}{(25)^2} \Rightarrow x = 768$$

$\therefore$ Actualmente su sueldo es 768 soles.

PROBLEMA 6
El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante se rompe en 3 pedazos cuyos pesos son proporcionales a 1, 2 y 3, calcule la pérdida sufrida por el diamante, si dicha joya entera tiene un precio de S/ 7 200.

Resolución:
Sean a, b, y c soles los precios de los pedazos de diamante (visto desde arriba).



> Hemos asumido como peso total del diamante 6 kg para facilitar la distribución en sus partes como 1, 2, y 3.

Luego:

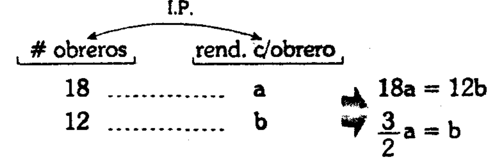
$$\frac{a}{1^2} = \frac{b}{2^2} = \frac{c}{3^2} = \frac{7200}{6^2} \Rightarrow \begin{array}{r} a = 200 \\ b = 800 \\ c = 1800 \\ \hline \text{Total} = 2800 \end{array}$$

Se observa que el diamante entero tenía más valor, que en pedazos.

$\therefore$ Pérdida sufrida: 7 200 – 2 800 = 4 400 soles.

PROBLEMA 7
Se sabe que 24 obreros de un mismo rendimiento se comprometen en hacer una obra en 28 días; pero cuando han hecho los 4/7 de la obra, 18 de ellos abandonan el trabajo. ¿Qué rendimiento han de tener 12 nuevos obreros que han de contratarse (con respecto a los que se fueron) para terminar la obra en el plazo establecido?

Resolución:
Lo que dejan de hacer los 18 obreros que se retiran es realizado por los 12 nuevos obreros **en el mismo tiempo**. Por lo tanto, debemos comparar el número de obreros y el rendimiento de cada obrero. El número de días no se compara, ya que no varía.
Luego comparamos:



∴ El rendimiento de cada uno de los 12 obreros es 3/2 respecto de los 18 anteriores.

PROBLEMA 8
Se sabe que 5 artesanos tejen 12 chompas en 15 días. Si desean tejer 60 chompas en 25 días, ¿cuántos artesanos doblemente eficientes se deben contratar adicionalmente?

Resolución:
Se contratan x artesanos, pero como éstos son doblemente eficientes, equivalen a 2K artesanos de los primeros.

I.P. / D.P.

# artesanos	# chompas	# días
5	12	15
5+2x	60	25

Luego:

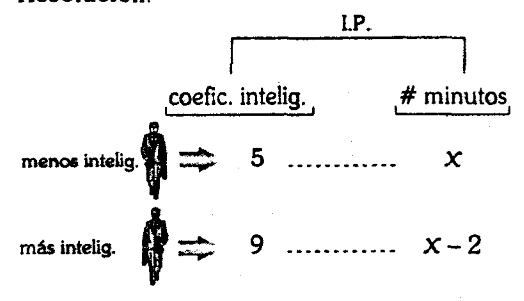
$$\frac{5\ .\ 15}{12} = \frac{(5+2x)\ .\ 25}{60}$$

Despejando: x = 5 artesanos

∴ Se requiere 5 artesanos doblemente eficientes.

PROBLEMA 9
Los coeficientes de inteligencia de 2 personas están en la relación de 5 a 9. Si el más inteligente realiza un problema en 2 minutos menos que el otro, halle en qué tiempo lo realiza este último?

Resolución:



Luego:

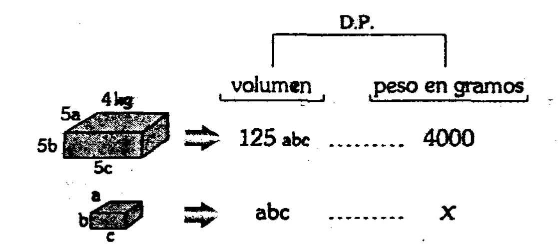
$$5(x) = 9(x-2)$$

Resolviendo: x = 4,5 minutos

∴ El menos inteligente lo realiza en 4,5 minutos.

PROBLEMA 10
Un ladrillo usado en construcción pesa 4 Kg. ¿Cuánto pesará en gramos un ladrillo de juguete hecho del mismo material y cuyas dimensiones son la quinta parte del inicial?

Resolución:
Sabemos que 1 kg tiene 1 000 gramos. Entonces:



Luego:

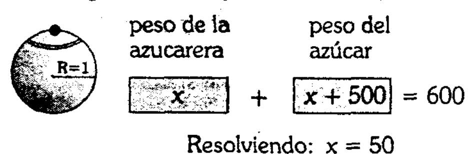
$$\frac{4000}{125\,a\not{b}c} = \frac{x}{a\not{b}c} \Rightarrow x = 32$$

∴ El peso de un ladrillo de juguete es 32 gramos.

PROBLEMA 11
Una azucarera esférica llena de azúcar pesa 600 g. Si la cantidad de esta azúcar pesa 500 g más que la azucarera, ¿cuánto pesará la azucarera llena de azúcar si tuviera el doble de radio?

Resolución:

Tenemos una azucarera (de radio R = 1) llena de azúcar que pesa 600 gramos, además el azúcar pesa 500 gramos más que la azucarera, entonces:

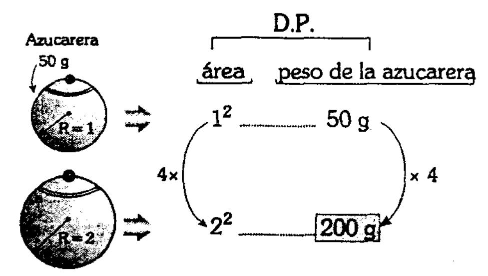


Resolviendo: x = 50

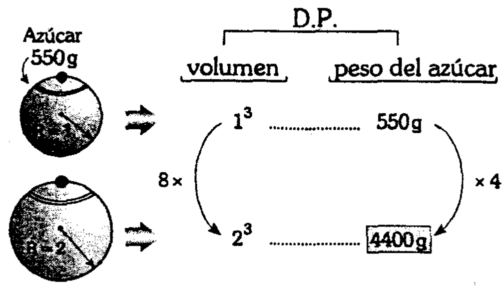
Ahora, queremos saber cuánto pesará otra azucarera llena de azúcar de doble radio (R = 2)

$$\begin{pmatrix}\text{Peso}\\ \text{Total}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Peso de la}\\ \text{Azucarera}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Peso del}\\ \text{Azúcar}\end{pmatrix} \ldots\ldots (\alpha)$$

I. Para calcular el **peso de la azucarera**, comparamos peso de la azucarera con el área de la superficie esférica (el cual depende de R^2).



II. Para calcular **el peso del azúcar**, comparamos éste con el volumen de la azucarera esférica (el cual depende de R^3



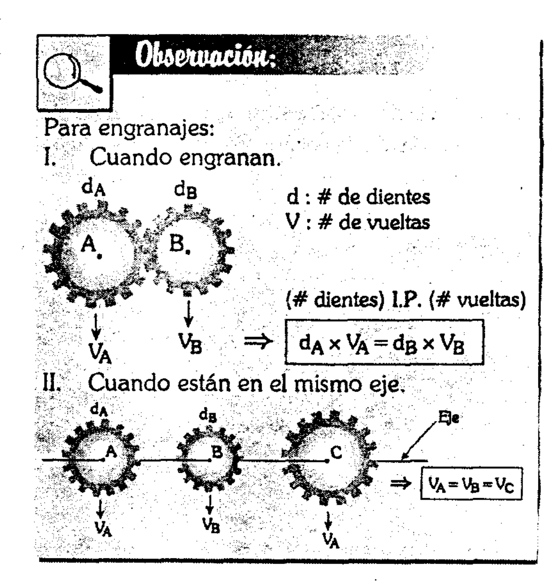
∴ Reemplazando en (α) tenemos:

Peso total = 200 + 4 400 = 4 600 g

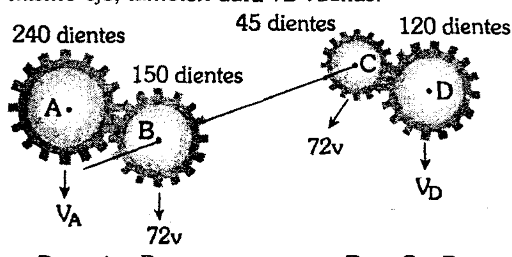
PROBLEMA 12

Una rueda A de 240 dientes engrana con otra rueda B de 150 dientes. Fija al eje de B existe otra rueda C de 45 dientes que engrana con otra rueda D de 120 dientes. ¿Cuántas vueltas menos dará D respecto de A, cuando B ha dado 72 vueltas?

Resolución:



Si B da 72 vueltas, entonces C, que está en el mismo eje, también dará 72 vueltas.



Para A y B:

$$\therefore\ 240\,V_A = 150\,.\,72$$
$$V_A = 45$$

Para C y D:

$$45\,.\,72 = 120\,.\,V_D$$
$$V_D = 27$$

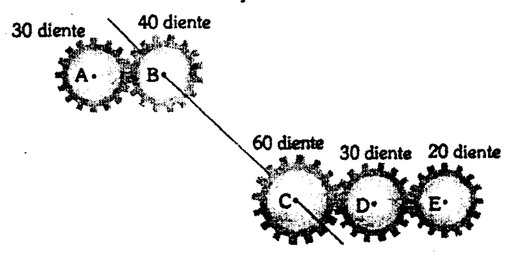
Luego:

$$V_A - V_D = 18$$

∴ D dará 18 vueltas menos que A.

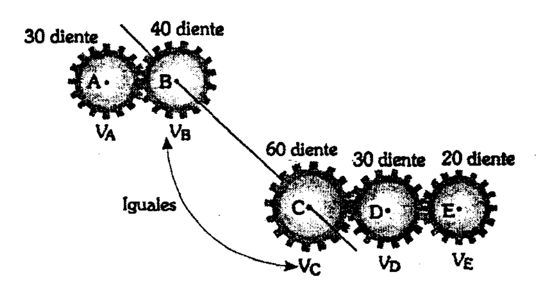
PROBLEMA 13

La figura muestra un sistema de engranajes y el número de dientes respectivamente.



¿En qué relación estará el número de vueltas que dará la rueda A con el número de vueltas que dé la rueda E?

Resolución:



Para A y B:

$$30 \cdot V_A = 40 \cdot V_B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{4}{3} \; \ldots\ldots (1)$$

Para B y C:

$V_B = V_C \ldots\ldots (2)$

Para C y E:

$$60 \cdot V_C = 20 \cdot V_E \Rightarrow \frac{V_C}{V_E} = \frac{1}{3} \; \ldots\ldots (3)$$

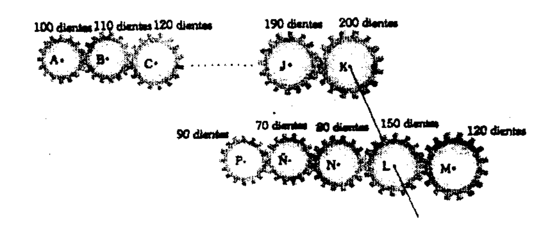
Multiplicando (1) × (3); y usando (2):

$$\frac{V_A}{\not{V}_B} \cdot \frac{\not{V}_C}{V_E} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{V_A}{V_E} = \frac{4}{9}$$

∴ La relación del número de vueltas de A con E es de 4 a 9.

PROBLEMA 14

En el siguiente sistema de engranajes:



Si la rueda A da 12 vueltas en 1/2 minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda P en 2 minutos?

Resolución:

Si sabemos que la rueda A da 12 vueltas en 1/2 minuto, entonces en 2 minutos dará 48 vueltas.

Luego, en 2 minutos:

Para A y K:

$100 \cdot 48 = 200 \times V_K \Rightarrow V_K = 24$

Para K y L: $V_K = V_L = 24$

Para P y L: $90 \times V_P = 150 \times 24 \Rightarrow V_P = 40$

∴ P en 2 minutos dará 40 vueltas.

PROBLEMA 15

En 10 días se terminó un trabajo. Al comienzo 7 obreros hicieron 350 m, luego con la ayuda de 5 obreros más hicieron los 400 m restantes. ¿Cuántos días trabajaron los 7 obreros?

Resolución:

Comparamos el número de días con el número de obreros y con la obra:

I.P. (# Obreros – # Días) D.P. (# Días – Obra)

	# Obreros	# Días	Obra (m)
Al inicio:	7	x	350
Finalmente:	12	(10 − x)	400

Luego:

$$\frac{(x)(7)}{350} = \frac{(10-x)(12)}{400} \rightarrow x = 6$$

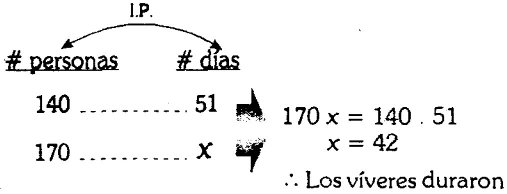
∴ Los 7 obreros trabajaron 6 días.

PROBLEMA 16

Un buque lleva víveres para una travesía de 100 días y una tripulación de 140 hombres; después del día 49, el capitán recibe 30 náufragos de otro buque. ¿Para cuántos días más duraron los víveres sabiendo que cada persona recibe una misma ración diaria?

Resolución:

Después del día 49, si no llegaban los náufragos, eran 140 personas y tenían víveres para 51 días, pero llegaron 30 personas más, ahora los víveres que quedan les dura sólo x días. Entonces comparamos el número de personas con el número de días y planteamos así:



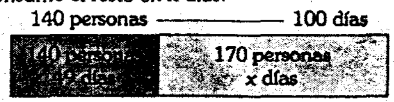
$$170x = 140 \cdot 51$$
$$x = 42$$

∴ Los víveres duraron para 42 días más.

Ahora veamos otra forma de cómo se puede plantear la solución de este problema.

Para esto, digamos que el total de víveres sea representada por una región rectangular.

Todo se iba a consumir en 100 días, pero primero se consume una parte en 49 días, y al llegar los náufragos se consume el resto en x días.



Como sabemos que el número de personas es I.P. al número de días, entonces debe ser producto constante para cada pareja de valores.

Es preciso aclarar que cada constante que se obtenga al multiplicar (#personas) . (# días) representa la cantidad de víveres que ellos consumen. Por ejemplo, **140 . 49** nos representa los víveres consumidos en los primeros 49 días, **170 . x** nos representa el resto de víveres consumidos; y **140 .100** representa el total de víveres. Entonces, podemos plantear.

$$\begin{pmatrix}\text{La primera}\\ \text{parte de los}\\ \text{víveres}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Resto de}\\ \text{víveres}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Total de}\\ \text{víveres}\end{pmatrix}$$

$$140 \cdot 49 + 170 \cdot x = 140 \cdot 100$$
$$x = 42$$

∴ Los víveres duran 42 días más.

PROBLEMA 17

Veinte obreros han hecho parte de una obra en 18 días, a razón de 6 horas diarias. Para acabar la obra dentro de 6 días se han contratado 5 obreros más doblemente hábiles y trabajaron 2 horas más por día. ¿Qué parte de la obra hicieron en los 18 primeros días?

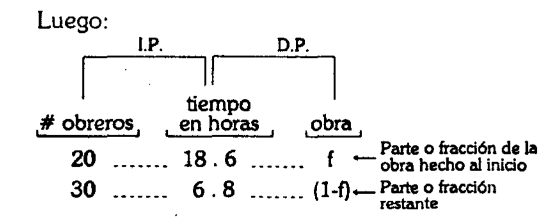
Resolución:

Tengamos presente que:

| Tiempo en horas = (# días) (# h/d) |

Cuando se contratan 5 obreros doblemente hábiles, significa que estos 5 equivalente a 10 obreros de los primeros.

Luego:



$$\Rightarrow \frac{(18 \cdot 6) \cdot 20}{f} = \frac{(6 \cdot 8) \cdot 30}{1-f}$$

Simplificando:

$$\frac{3}{f} = \frac{2}{1-f} \Rightarrow f = \frac{3}{5}$$

∴ En los primeros 18 días hicieron $\frac{3}{5}$ de la obra.

PROBLEMA 18

Un grupo de obreros debían entregar una obra en un determinado plazo. Luego de algunos días de trabajo se accidentaron 12 obreros y no pudieron ser reemplazados hasta dentro de 8 días y para ello se contrataron 28 obreros adicionales y entonces se acabó la obra en la fecha prevista. ¿Cuántos días trabajaron los últimos obreros?

Resolución:

Digamos que faltando x días para acabar la obra, se accidentaron los 12 obreros. El resto de obreros sigue trabajando normal. Entonces la parte de la obra que dejaron de hacer los 12 obreros accidentados, va a ser realizado ahora por los 28 obreros contratados, pero como ya pasaron 8días, sólo disponen de $(x - 8)$ días.

I.P.

# obreros	# días
12	x
28	$x-8$

$$12x = 28(x-8)$$
$$x = 14$$

∴ Los últimos 28 obreros trabajaron durante $14-8=6$ días.

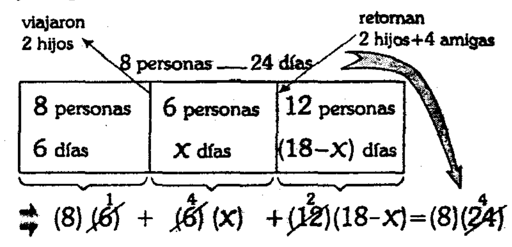
PROBLEMA 19

Una familia de 8 miembros tienen víveres para 24 días. Luego de 6 días, 2 de los hijos salieron de viaje y volvieron luego de algunos días, cada uno con 2 amigas. Si los víveres alcanzaron para el período proyectado, ¿cuántos días estuvieron de viaje los 2 hijos?

Resolución:

Recordemos que: # personas (I.P.) # días
⇒ (# personas) (# días) = constante

Digamos que los hijos estuvieron x días de viaje. Luego, sumamos las partes de víveres consumidos y lo igualamos al total de víveres:



$$\Rightarrow (8)(6) + (6)(x) + (12)(18-x) = (8)(24)$$

Resolviendo: $8 + x + 2(18-x) = 32 \rightarrow x = 12$

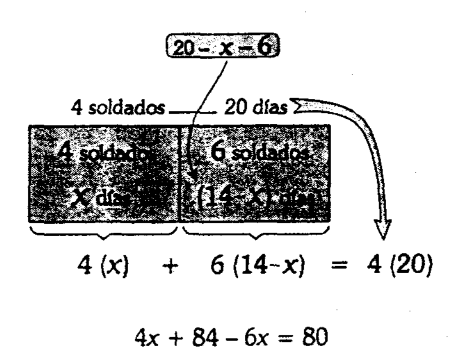
∴ Los hijos estuvieron de viaje durante 12 días

PROBLEMA 20

Cuatro soldados tienen víveres para 20 días, pero luego de cierto tiempo, aumentaron dos soldados más, terminándose los víveres 6 días antes. ¿A los cuántos días llegaron los 2 soldados?

Resolución:

El número de soldados es I.P. al número de días.



$$4(x) + 6(14-x) = 4(20)$$

$$4x + 84 - 6x = 80$$
$$x = 2$$

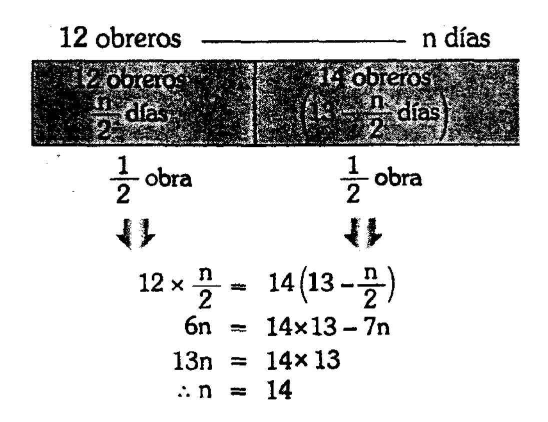
∴ Los 2 soldados llegaron a los 2 días.

PROBLEMA 21

Doce obreros pueden realizar una obra en n días. Si después de haber realizado la mitad de la obra, 8 de los obreros aumentan su rendimiento en un 25% con lo cual el tiempo total de trabajo fue de 13 días. Calcule "n".

Resolución:

Después de hacer la mitad de la obra, ya han transcurrido n/2 días. Si de los 12 obreros, 8 incrementan su rendimiento en 25 %, entonces calculamos 25 %(8) = 2. Esto significa que ese incremento en el rendimiento equivale a 2 nuevos obreros, es decir, que ahora serán 12 + 2 = 14 obreros.



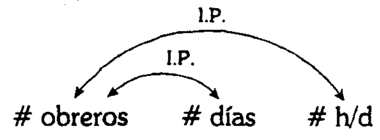
$$12 \times \frac{n}{2} = 14\left(13 - \frac{n}{2}\right)$$
$$6n = 14 \times 13 - 7n$$
$$13n = 14 \times 13$$
$$\therefore n = 14$$

PROBLEMA 22

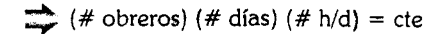
Una cuadrilla de 12 obreros puede terminar una obra en 16 días trabajando 8 h/d. Al cabo de 8 días de labor, se enferman 4 de los obreros y no podrán ser reemplazados hasta 2 días después, por lo que aumentan en 2 horas el trabajo diario. ¿Cuántos obreros adicionales se tendrá que contratar luego para terminar el trabajo 2 días antes del plazo establecido y trabajando diariamente como al principio?

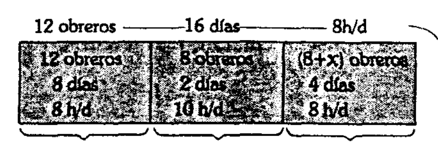
Resolución:

Primero comparamos.



Luego de 10 días, se contrata a "x" obreros adicionales, entonces:


(# obreros) (# días) (# h/d) = cte



$12\times 8\times 8 + 8\times 2\times 10 + (8+x)\times 4\times 8 = 12\times 16\times 8$

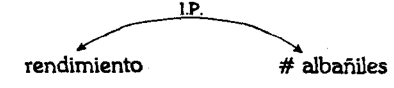
Resolviendo: $x = 11$

∴ Se tendrá que contratar 11 obreros.

PROBLEMA 23

Se sabe que 10 albañiles pueden construir un puente en 12 días. Luego de 4 días de trabajo fueron despedidos 8 de ellos, duplicando entonces su rendimiento los albañiles restantes y manteniéndolos así hasta el final. Y 2 días más tarde se contratan adicionalmente 16 albañiles. ¿Qué rendimiento deben tener estos últimos para terminar el puente en el plazo establecido?

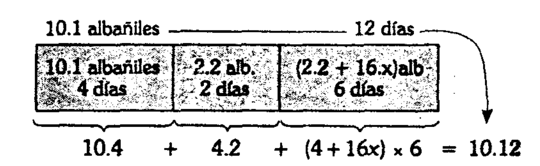
Resolución:



(rend.) (# albañiles) = cte

Vamos a asumir que el rendimiento normal de cada uno de los 10 albañiles es 1. Luego de 4 días se despide 8 albañiles. Por lo tanto el rendimiento de cada uno de los 2 albañiles que quedan es 2. Ahora x es el rendimiento de cada uno de los 16 albañiles que se contratan.

Luego:



Resolviendo: $x = 1/2$

∴ Los albañiles que se contratan deben tener la mitad del rendimiento normal.

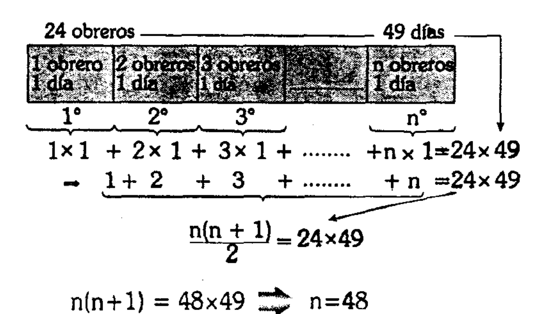
PROBLEMA 24

Si 24 obreros pueden hacer una obra en 49 días, ¿cuántos obreros trabajan el último día? Se sabe que el primer día se empieza el trabajo con 1 obrero; el segundo, con 2; el tercero, con 3 y así sucesivamente hasta que se concluyó la obra?

Resolución:

Si n días es el tiempo en que se concluyó la obra, entonces, según el enunciado, podemos decir que el enésimo día trabajaron n obreros.

Ahora, planteamos que la suma de los trabajos diarios es igual al trabajo total.



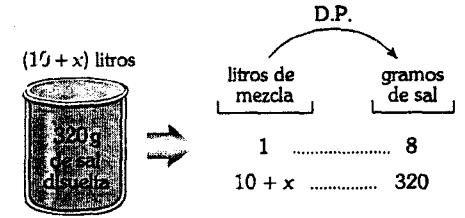
∴ El último día trabajan 48 obreros

PROBLEMA 25

Un recipiente contiene 10 litros de agua con 320 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua pura deben añadirse para que cada litro de agua tenga una concentración de 8 gramos de sal?

Resolución:

Se añaden x litros de agua pura. Como había 10 litros, ahora tenemos $10 + x$ litros y la cantidad de sal disuelta será la misma, ya que sólo se agrega agua pura.



Entonces:

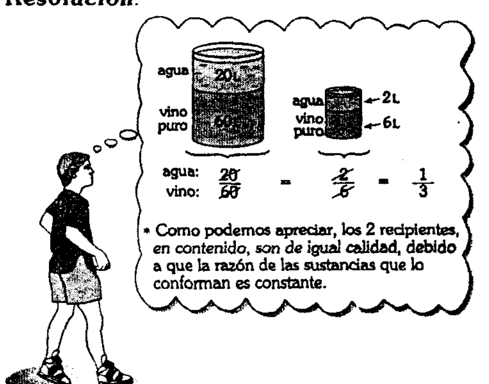
$$\frac{10+x}{320} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 30$$

∴ Debe añadirse 30 litros de agua pura.

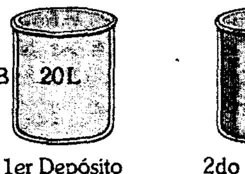
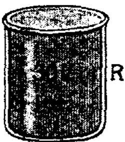
PROBLEMA 26

Se tiene 2 depósitos de vino, pero de diferentes precios. El primero contiene 20 litros y el segundo, 30 litros. Se saca de cada uno la misma cantidad y se vierte en el primero lo que se sacó del segundo y viceversa. ¿Qué cantidad ha pasado de un depósito a otro, si el contenido de los dos depósitos resultó de igual calidad?

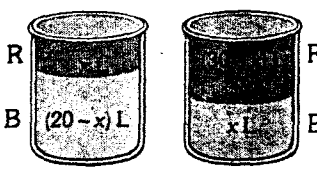
Resolución:



En el problema, digamos que en el primer depósito tenemos 20 litros de vino blanco (B) y en el segundo, 30 litros de vino rojo (R). Así:

Ahora, sacamos al mismo tiempo x litros de cada depósito y lo intercambiamos, entonces tendremos mezclas de vinos rojo (R) y blanco(B). Así:



Como son de la misma calidad, planteamos:

$$\begin{matrix} R: \\ B: \end{matrix} \frac{x}{20-x} = \frac{30-x}{x} \Rightarrow x = 12$$

∴ De cada depósito, se pasó 12 litros al otro.

PROBLEMA 27

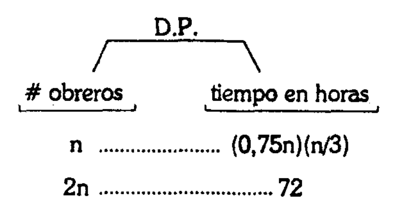
Si n es el número de obreros que pueden hacer una obra en $0{,}75n$ días trabajando $n/3$ horas diarias, ¿cuál es el número n de obreros, si al duplicarse dicho número hacen la misma obra en un total de 72 horas?

Resolución:

El tiempo, en horas, se calcula multiplicando el número de días por el número de horas diarias. Así:

tiempo en horas = (#días) (#h/d)

Ahora, comparemos el número de obreros con el tiempo en horas



n .... (0,75n)(n/3)

2n 72

$$\Rightarrow (\not{n}) \cdot \left(0{,}75n \times \frac{n}{3}\right) = (2\not{n})(72)$$

$$\frac{\not{3}}{4} n \cdot \frac{n}{\not{3}} = 2 \times 72$$

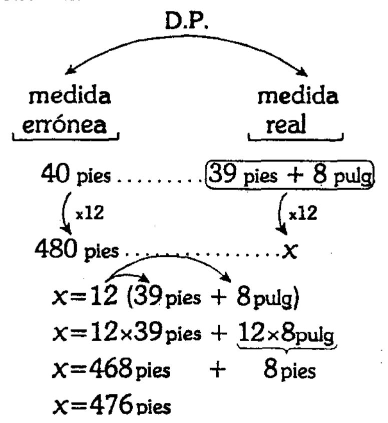
$$n = 24$$

∴ Son 24 obreros

PROBLEMA 28

Una cinta metálica está graduada erróneamente con 40 pies, donde en realidad hay 39 pies, 8 pulgadas. ¿Cuál es la verdadera longitud de una distancia que medido con esta cinta dio 480 pies? (Obs: 1 pie < > 12 pulg.)

Resolución:



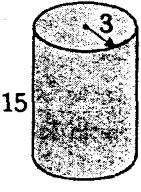
∴ La verdadera longitud es 476 pies.

PROBLEMA 29

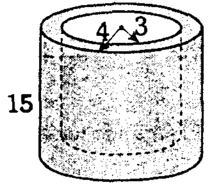
Un pozo de 6 m de diámetro y 15 m de profundidad fue cavado por 18 hombres en 25 días. Se quiere aumentar el radio a 4 m, habiéndose despedido a 4 obreros. ¿Cuánto tiempo demoraron los restantes en dicho objetivo?

Resolución:

Primero, se abre este pozo en 25 días.



Luego, se amplía el pozo en x días.



$V = \pi(3)^2 \times 15 = 135\pi$

$V = \pi(4)^2 \times 15 - 135\pi = 105\pi$

(D.P.) (I.P.)

obra (Volum)	# obreros	# días
135π	18	25
105π	14	x

$$\frac{(25) \cdot 18}{135\,\pi} = \frac{(x) \cdot 14}{105\,\pi} \Rightarrow x = 25$$

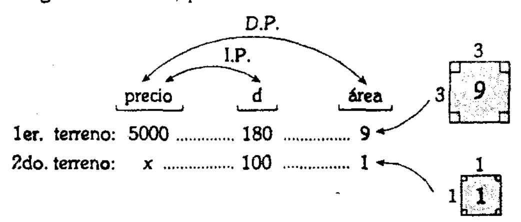
∴ Los restantes ampliaron el pozo en 25 días.

PROBLEMA 30

Suponiendo que el precio de los terrenos varía D.P. a su área e I.P. a la distancia que lo separa de una ciudad A. En estas condiciones un terreno de forma cuadrada que se encuentra a 180 km al sur de esta ciudad está valorizada en S/5 000. ¿Qué precio tendría un terreno de forma cuadrada cuyo lado sea la tercera parte del anterior y se encuentra a 100 km de esta ciudad?.

Resolución:

Según los datos, planteamos:



Luego:

$$\frac{x \cdot 100}{1} = \frac{5000 \cdot 180}{9} \Rightarrow x = 1000$$

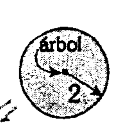
∴ El segundo terreno tendría un precio de 1 000 soles.

PROBLEMA 31

En un pastizal una vaca atada a un árbol con una cuerda de 2 metros, comiendo la misma cantidad de pasto diario, consumió todo lo que estaba a su alcance en 3 días. Si luego se aumenta 2 metros más de cuerda, ¿cuántos días más se demorará?

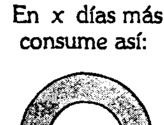
Resolución:

En 3 días *consumió así:*



Área $= \pi(2)^2 = 4\pi$

En x días más consume así:



Área $= \pi(4)^2 - \pi(2)^2 = 12\pi$

Comparamos el número de días con el área.

D.P.

# días	área
3	4π
x	12π

$$\Rightarrow \frac{x}{12\pi} = \frac{3}{4\pi}$$

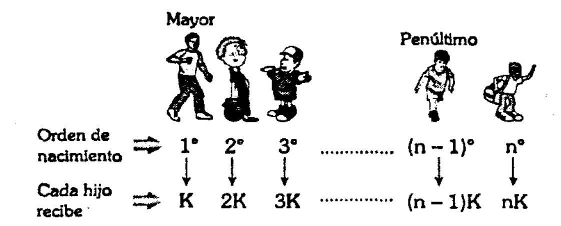
$$x = 9$$

∴ Demorará 9 días más.

PROBLEMA 32

Un hombre decide repartir una herencia a sus hijos en forma proporcional al orden en que nacieron. La herencia total es S/ 420 000, sabiendo que el penúltimo hijo recibe S/140 000. ¿Cuál es el mayor número de hijos que tiene?

Resolución:



Orden de nacimiento ⇒	1°	2°	3°	....	(n – 1)°	n°
Cada hijo recibe ⇒	K	2K	3K	....	(n – 1)K	nK

Si sumamos lo que reciben todos los hijos, obtendremos la herencia total así:

$$K + 2K + 3K + \ldots + nK = 420\,000$$

$$\Rightarrow K \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 420\,000 \ \ldots\ (1)$$

Además, por dato, para el penúltimo hijo:

$$(n-1)K = 140\,000$$

$$K = \frac{140\,000}{n-1} \ \ldots\ (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{\overset{1}{\cancel{14000}}}{n-1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \overset{3}{\cancel{42000}}$$

$$n(n+1) = 6(n-1)$$

$$n^2 - 5n + 6 = 0$$

n ⟶ –3 ⇒ n = 3

n ⟶ –2 ⇒ n = 2

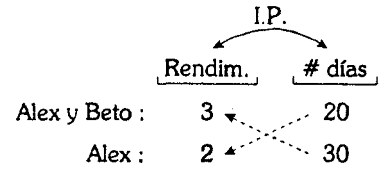
Como nos piden el mayor número de hijos tomamos n = 3

∴ Tiene 3 hijos.

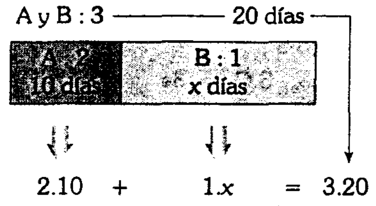
PROBLEMA 33

Álex y Beto pueden hacer juntos una obra en 20 días. Álex lo haría solo en 30 días. Si Álex solo realiza parte de la obra durante 10 días y luego se retira cuando Beto comienza a trabajar, ¿cuántos días tardará Beto en acabar la obra?

Resolución:



Como en I.P., si la relación de días es de 2 a 3, entonces los rendimientos serán de 3 a 2.
En otras palabras, el rendimiento de Álex es como 2 y el rendimiento de Beto es como 1.
Luego, supongamos que la obra es una pared rectangular. Alex trabaja 10 días y Beto hace el resto en x días, entonces.



$$2.10 \quad + \quad 1.x \quad = \quad 3.20$$

Resolviendo: $x = 40$

$\therefore$ Beto acabará la obra en 40días.

PROBLEMA 34

Un hombre, una mujer y 3 niños pueden hacer un trabajo en 65 días. Si se hubiera empezado con 2 mujeres y 2 niños más, ¿cuánto tiempo se habría ahorrado en terminar dicho trabajo, sabiendo que la eficiencia de una mujer es la eficiencia del hombre como 7 es a 10 y la eficiencia de la mujer es a la de un niño como 5 es a 3?

Resolución:

Sean las eficiencias de un hombre, una mujer y un niño, **H**, M, y N **respectivamente**.
Según el enunciado:

$$\frac{M}{H} = \frac{7 \times 5}{10 \times 5} \qquad \frac{M}{N} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7}$$

$$\Rightarrow M = 35 \qquad H = 50 \quad N = 21$$

Sea x días, el tiempo que se hubiera ahorrado.

	I.P. eficiencia	# días
$H + M + 3N \Rightarrow$	$\mathbf{50 + 35 + 3(21)}$	65
$H + 3M + 5N \Rightarrow$	$\mathbf{50 + 3(35) + 5(21)}$	$65 - x$

Como son I.P. el producto es constante:

$$\mathbf{148} \times 65 = \mathbf{260} \times (65 - x)$$
$$x = 28$$

$\therefore$ Se habría ahorrado 28 días.

PROBLEMA 35

Si 300 pantalones de doble costura pueden ser cocidos por 24 hombres ó 32 mujeres en 20 días trabajando 9 h/d, ¿cuántas mujeres deben reforzar a 21 hombres que van a coser 200 pantalones de triple costura en 18 días trabajando 8 h/d?

Resolución:

Sea H: rendimiento de un hombre.
M: rendimiento de una mujer.
Según el enunciado:

$$24H = 32M \Rightarrow \frac{H}{M} = \frac{4}{3}$$

Deben reforzar x mujeres:

D.P. (# pantalones, rendim.); I.P. (rendim., # días); I.P. (rendim., # h/d)

# pantalones	rendim.	# días	# h/d
2.300	4.24	20	9
3.200	4.21 + 3.x	18	8

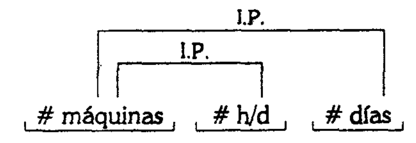
$$\frac{(84 + 3x)\,18 \times 8}{600} = \frac{96 \times 20 \times 9}{600} \Rightarrow x = 12$$

$\therefore$ Los 21 hombres se deben reforzar con **12** mujeres.

PROBLEMA 36

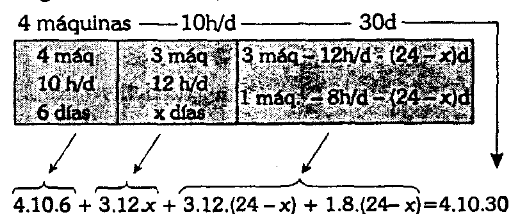
Un tramo de carretera es asfaltada con 4 máquinas que trabajan 10 h/d en 30 días. Al final del sexto día una de ellas se malogra durante x días. Halle el valor de x si desde el séptimo día las otras 3 máquinas trabajan a 12 h/d y cuando se repara la malograda, esta sólo puede trabajar 8 h/d acabándose la obra en el plazo establecido.

Resolución:



⇒ (# máquinas)(# h/d)(# días) = cte.

Según el enunciado, decimos:



Resolviendo: $x = 12$.

PROBLEMA 37

A y B son dos magnitudes I.P. Si A disminuye en 3/5 de su valor, entonces ¿cómo varía B en su valor?

Resolución:

Sea A = a y B = b.

Según el enunciado, A y B son I.P.; ahora, como A disminuye, entonces B debe aumentar. Vamos a averiguar en cuánto aumenta B:

	A	B
Al inicio:	a	b
Después:	$\frac{2a}{5}$	x

I.P.

$$\Rightarrow \frac{2a}{5}\cdot x = ab$$

$$x = \frac{5b}{2}$$

Se observa que B aumenta de **b** a $\frac{5b}{2}$,

en $\frac{5b}{2} - b = \frac{3}{2}b$

$\therefore$ B aumenta en $\frac{3}{2}$ de su valor.

PROBLEMA 38

Un sapo hambriento sigue a un grillo que le lleva 90 saltos de ventaja. Se sabe que el sapo da siete saltos mientras que el grillo da seis, y que cuatro saltos del grillo equivalen a tres del sapo. ¿Cuántos saltos habrá dado el sapo para alcanzar al grillo?

Resolución:

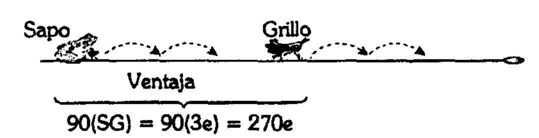
Primero nos damos cuenta que el salto del sapo (S.S.) y el salto del grillo (S.G.) son de diferente longitud. Nos dicen que cuatro saltos del grillo equivalen a tres del sapo, es decir:

4(S.G.) = 3(S.S.)

$$\frac{S.G}{S.S} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} S.G. = 3e \\ S.S. = 4e \end{array}$$

Esto nos indica a cuánto equivale cada salto.

Ahora, grafiquemos la ventaja que le lleva el grillo al sapo.



Para que el sapo dé alcance al grillo, debe ir acercándose de modo que la ventaja de $270e$ vaya disminuyendo hasta que la ventaja sea cero. Cuando ocurra esto, diremos que el sapo alcanzó al grillo.

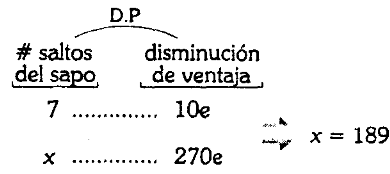
Veamos lo avanzado por cada uno, en el mismo tiempo:

El sapo da: 7(S.S.) = 7(4e) = $28e$ –

El grillo da: 6(S.G.) = 6(3e) = $18e$

$10e$

Se observa que el sapo disminuye la ventaja en 10e, es decir, cuando el sapo da 7 saltos y el grillo da 6 saltos, el primero se acerca al segundo en 10e. Digamos que cuando el sapo da x saltos, alcanza al grillo. Planteamos:



$\therefore$ Para alcanzar al grillo, el sapo habrá dado 189 saltos.

PROBLEMA 39

15 obreros se comprometen realizar una obra en 18 días, pero al cabo de 12 días sólo han hecho 3/5 de la obra. ¿Con cuántos obreros deberán ser reforzados estos 15 obreros para terminar la obra a tiempo?

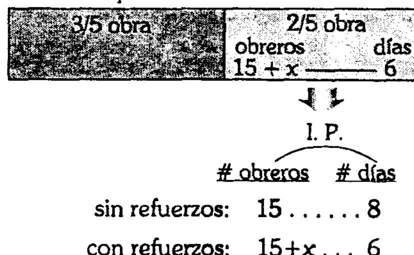
Resolución:

Según el enunciado si los 15 obreros, en 12 días, sólo han hecho 3/5 de la obra, entonces lo faltante, que es 2/5 la obra, lo harían en 8 días.

3/5 obra		2/5 obra	
obreros	días	obreros	días
15	12	15	8

Por lo tanto, se haría toda la obra en 12 + 8 = 20 días. Pero esto no puede ser porque se han comprometido para acabar en 18 días.

Entonces, deben ser reforzados con x obreros para hacer lo que falta en 6 días.



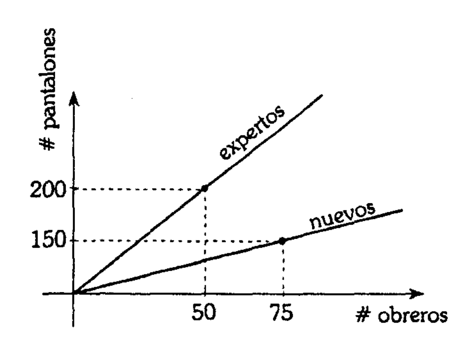
$(15 + x) \cdot 6 = 15 \cdot 8 \Rightarrow x = 5$

Resolviendo: $x = 5$

$\therefore$ Se debe reforzar con 5 obreros.

PROBLEMA 40

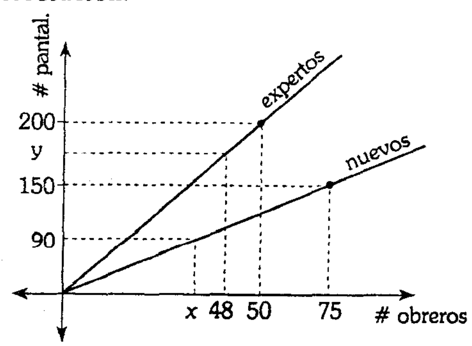
A continuación, se muestra los gráficos de producción de pantalones para dos tipos de obreros: expertos y nuevos.



a. ¿Cuántos obreros nuevos harán 90 pantalones?

b. ¿Cuántos pantalones harán 48 obreros expertos?

Resolución:



Sabemos que: (# pantalones) D.P. (# obreros) y que el cociente para cada par de valores correspondientes es constante.

a. Para los obreros nuevos:

$$\frac{x}{90} = \frac{75}{150} \Rightarrow x = 45$$

$\therefore$ Harán falta 45 obreros.

b. Para los obreros expertos:

$$\frac{y}{48} = \frac{200}{50} \Rightarrow x = 192$$

$\therefore$ Hará 192 pantalones.

Problemas Propuestos

1. A una fiesta acudieron 518 personas, se sabe que por cada 6 hombres hay 8 mujeres. ¿Cuántas mujeres habían en total en dicha fiesta?

A) 320 B) 252 C) 296
D) 410 E) 224

2. Una máquina A puede terminar una obra en 30 horas, mientras otra máquina B lo haría en 35 horas. Si A trabaja solo 18 h y se malogra, debiendo culminar B el resto de la obra, ¿cuántas horas necesitará B?

A) 14 h B) 12 h C) 16 h
D) 22 h E) 10 h

3. Para pintar las caras de un cubo de 60 cm de arista se ha empleado 12 tarros de pintura. ¿Cuántos tarros de pintura se necesitará para pintar las caras de un cubo de 90 cm de arista?

A) 18 B) 32 C) 27
D) 25 E) 30

4. Un buey atado al extremo de una cuerda de 4 m de longitud tarda 12 días en comer todo el pasto alrededor suyo. ¿Cuántos días tardará en comer todo el pasto a su alrededor, si la cuerda es aumentada en 2 m?

A) 23 días B) 18 días C) 25 días
D) 27 días E) 30 días

5. Con 5 Kg de arena se pueden construir 8 cubos de 8 cm de arista. ¿Cuántos cubos de 4 cm de arista se podrían construir con 10 Kg de arena?

A) 145 B) 128 C) 90
D) 144 E) 80

6. Cuatro amigos pueden terminar una obra en 18 días. Si después de tres días llega un amigo más, ¿cuántos días antes terminarán la obra?

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 1

7. Una persona, para pintar las caras de un cubo, tarda 30 minutos. ¿Cuánto tardará otra persona, cuya rapidez es el triple de la anterior, en pintar otro cubo cuyo volumen es 8 veces el volumen del cubo anterior?

A) 24 min B) 32 min C) 42 min
D) 40 min E) 52 min

8. Se disuelve 210 gramos de azúcar en 60 litros de agua. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a esta mezcla para que por cada 2 litros de la mezcla resultante tenga 5 gramos de azúcar?

A) 48 litros B) 38 litros C) 24 litros
D) 18 litros E) 32 litros

9. Si 40 litros de agua salada tienen 3 1/2 Kg de sal, ¿qué cantidad de agua debe dejarse evaporar para que 24 litros de la nueva mezcla contenga 3 Kg de sal?

A) 12 litros B) 10 litros C) 13 litros
D) 8 litros E) 6 litros

10. Un lechero ha comprado 48 litros de leche a S/ 2 el litro. Si desea ganar S/ 48 vendiendo a S/ 2,4 el litro, ¿cuántos litros de agua debe adicionar a la leche?

A) 10 litros B) 11 litros C) 16 litros
D) 12 litros E) 8 litros

11. El sueldo de un obrero es proporcional al cuadrado de la edad que tiene. Si actualmente tiene 18 años, ¿dentro de cuántos años cuadruplicará su sueldo?

A) 10 años B) 12 años C) 20 años
D) 18 años E) 22 años

12. Se sabe que:
A es D.P. a B (cuando C es constante)
B es I.P. a C (cuando A es constante)
Cuando A = 3, B = 6 y C = 7. ¿Cuánto vale B, si A = 8 y C = 1?

A) 10 B) 112 C) 6
D) 98 E) 150

13. En un edificio el volumen de agua que se lleva a un cierto piso es I.P. a T^n, donde T es el tiempo que demora en llegar el agua al piso n. Si cuando se lleva 80 litros al segundo piso la demora es de 4 minutos, ¿qué tiempo demorará en llegar 5 litros al octavo piso?

A) 4 min B) 3 min C) 5 min
D) 2,5 min E) 2 min

14. Los goles que marca un equipo en un partido de fútbol es de una cantidad directamente proporcional al número de goles que marcó en el partido anterior más uno. Si en el primer partido marcó 1 gol y en el segundo 2 goles, determine cuántos marcó hasta el quinto partido (inclusive).

A) 15 B) 18 C) 20
D) 13 E) 12

15. El precio de un sólido varía en forma directamente proporcional a su superficie. Un cubo de S/90 es seccionado por un plano paralelo a una cara en 2 volúmenes que son entre sí como 2 es a 1. ¿Cómo varía su precio?

A) Aumenta en S/ 30
B) Aumenta en S/ 20
C) Disminuye en S/ 30
D) Disminuye en S/ 20
E) Aumenta en S/ 25

16. La rapidez de Juan es el doble de la de Julio, pero a la vez es la tercera parte de la de Miguel. Si Julio y Miguel hacen una obra en 27 días, ¿en cuántos días harán la misma obra los 3 juntos?

A) 20 B) 18 C) 16
D) 21 E) 23

17. Luis siembra nabos con mayor rapidez que José y sus rendimientos están en la proporción de 4 a 3. Cuando José siembra n nabos en una hora, Luis siembra (n+2) nabos. ¿Cuántos nabos siembra Luis en 5 horas?

A) 60 B) 45 C) 38
D) 50 E) 40

18. Antonio y Jorge son dos carpinteros que deben hacer un escritorio cada uno. Antonio dice que él puede terminar su trabajo en 18 horas, mientras que Jorge lo haría en 21 horas. Si después de 12 horas de trabajo, Antonio cae gravemente enfermo y debe dejar de trabajar, ¿cuántas horas adicionales deberá trabajar Jorge para terminar los 2 escritorios?

A) 7 h B) 6,5 h C) 8 h
D) 12 h E) 9 h

19. Paola e Irma han hecho un trabajo juntas. Trabajando solas se habrían demorado 2 y 8 horas más respectivamente de lo que se demoraron juntas. ¿Cuánto duró el trabajo?

A) 5 h B) 2 h C) 3 h
D) 2,5 h E) 4 h

20. Un hombre y dos mujeres pueden hacer un trabajo en 10 horas. Dos hombres y una mujer pueden hacer el mismo trabajo en 8 horas. ¿Cuántos hombres deberán trabajar juntos a 4 mujeres para realizar el mismo trabajo en 4 horas?

A) 5 B) 6 C) 3
D) 4 e) 2

21. 15 hombres y 10 mujeres pueden cosechar 20 hectáreas de trigo en 40 días, después de 10 días de trabajo se retiran 5 hombres y 5 mujeres. ¿Con cuántos días de retraso se terminará la cosecha, si en un mismo tiempo un hombre realiza el doble de lo que realiza una mujer?

A) 26 B) 16 C) 18
D) 12 E) 28

22. El precio de un ladrillo es proporcional a su peso e I.P. a su volumen. Un ladrillo de densidad 1,5 g/cm^3 cuesta S/ 300. ¿Cuánto costará un ladrillo de 400 cm^3 que pesa 1,6 Kg?

A) S/ 600 B) S/ 850 C) S/ 700
D) S/ 720 E) S/ 800

23. Se desea pintar una superficie de la forma que se muestra en la figura; empezando por la parte superior, avanzando paralelamente a la horizontal. Se sabe que 10 hombres durante 6 días trabajando 5 h/d logran pintar la totalidad de la superficie. Halle la distancia h, siendo ésta el límite de la zona que pudieron pintar 12 hombres durante 4 días a razón de 6 h/d.

A) 20 m
B) 22 m
C) 24 m
D) 26 m
E) 28 m

24. El trabajo que hace un operario en 7 días lo hace un segundo operario en 6 días. El que hace este en 9 días, lo hace un tercero en 8 días y lo que hace éste en 12 días lo hace un cuarto en 14 días. Si el primer operario tarda 36 días en hacer una obra, ¿cuánto tardará el cuarto operario?

A) 40 días B) 52 días C) 32 días
D) 46 días E) 38 días

25. Una rueda A de 80 dientes engrana con otra rueda B de 50 dientes. Fijo al eje de la rueda B, hay otra rueda C de 15 dientes que engrana con una rueda D de 25 dientes. Si la rueda A da 125 vueltas por minuto, calcule la diferencia de vueltas de la rueda B y D, luego de 30 segundos.

A) 35 B) 42 C) 52
D) 38 E) 40

26. Dos engranajes de 24 y 45 dientes están unidos por una cadena (tipo faja). Cuando funcionan 4 minutos, uno ha dado 70 vueltas más que el otro. ¿Cuál es la rapidez del engranaje pequeño en R.P.M.?

A) 37,5 RPM
B) 42 RPM
C) 28 RPM
D) 32,5 RPM
E) 34 RPM

27. Dos ruedas de 60 y 40 dientes están engranadas; si en 4 minutos una de las ruedas da 20 vueltas más que la otra, ¿cuántas vueltas dará la rueda más grande en 10 minutos?

A) 180 B) 120 C) 92
D) 85 E) 100

28. Cuatro ruedas A, B, C y D de 60, 30, 40 y 80 dientes (respectivamente), se disponen de la siguiente manera: A engrana con B, B está unida por un eje con C y ésta engrana con D. Si la rueda D dio 75 vueltas en 3 minutos, ¿cuántas vueltas tuvo que dar la rueda A en 1 minuto?

A) 25 B) 30 C) 28
D) 42 E) 18

29. Una polea de 18 cm de diámetro que gira a 200 RPM debe conectarse a otra polea de otro eje que debe girar a 600 RPM. ¿Qué diámetro debe tener esta segunda polea?

A) 3 cm B) 6 cm C) 4 cm
D) 2 cm E) 5 cm

30. Un ciclista da 40 pedaleadas en cinco minutos. Calcule la velocidad angular del piñón, si el diámetro de la catalina con el diámetro del piñón están en la relación de 7 a 1. (Observación: asumir una pedaleada equivalente a media vuelta).

A) 30 R.P.M.
B) 28 R.P.M.
C) 35 R.P.M.
D) 48 R.P.M.
E) 32 R.P.M.

31. Un jardinero pensó sembrar 100 semillas en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar cada día 2,5 horas menos de lo que pensó. ¿Cuántas horas diarias trabajó?

A) 8 h/d B) 10 h/d C) 5 h/d
D) 9 h/d E) 12 h/d

32. Quince obreros pueden terminar una obra trabajando 8 horas diarias en 26 días. Al cabo de 10 días se despiden a 5 obreros, pasados 6 días más se contratan nuevos obreros. ¿Cuántos obreros se contrataron si se terminó la obra en el tiempo fijado?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 6 E) 12

33. Ocho obreros pueden hacer una obra en 10 días. Inician el trabajo y al final del quinto día se retiran 2 obreros. Los restantes trabajan juntos durante x días al final de los cuales se retiran 4 obreros más. Halle x si se sabe que los obreros que quedaron terminaron la obra, y la entregaron con un atraso de 7 días.

A) 5 B) 8 C) 4
D) 6 E) 10

34. Diez obreros terminan una obra en 10 días. Si después de 5 días de trabajo se retiran la mitad de los obreros, ¿en qué tiempo terminarán la obra si cada uno de los que quedan duplican su eficiencia?

A) 8 B) 12 C) 14
D) 7 E) 5

35. Si con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días, con 10 obreros 4 veces más rápidos que los anteriores, ¿en cuántos días harán una obra cuya dificultad es 10 veces la anterior?

A) 40 B) 52 C) 34
D) 32 E) 39

36. Si x hombres pueden hacer un trabajo en 8 días, ¿cuántos hombres de triple rendimiento habrá que aumentar para realizar la mitad de la obra en 2 días trabajando la mitad de horas diarias que el anterior?

A) $x/2$ hombres
B) $\frac{2x}{5}$ hombres
C) $x/3$ hombres
D) x hombres
E) $\frac{2x}{3}$ hombres

37. Para ejecutar una obra, se cuenta con 2 cuadrillas: la primera tiene 40 hombres y puede concluir la obra en 30 días; la segunda, 60 hombres y puede terminar en 40 días. Si tomamos solamente 3/4 de la primera y los 2/3 de la segunda cuadrilla, ¿en cuántos días terminarán la obra?

A) 24 B) 32 C) 48
D) 18 E) 28

38. Diez obreros pueden hacer una obra en 12 días trabajando 6h/d. Después de iniciado el trabajo, se quiere terminar a los 8 días de empezado, disminuyendo 1/6 de la obra y aumentando 2 horas por día. ¿Cuántos días se trabajó 8 h/d?

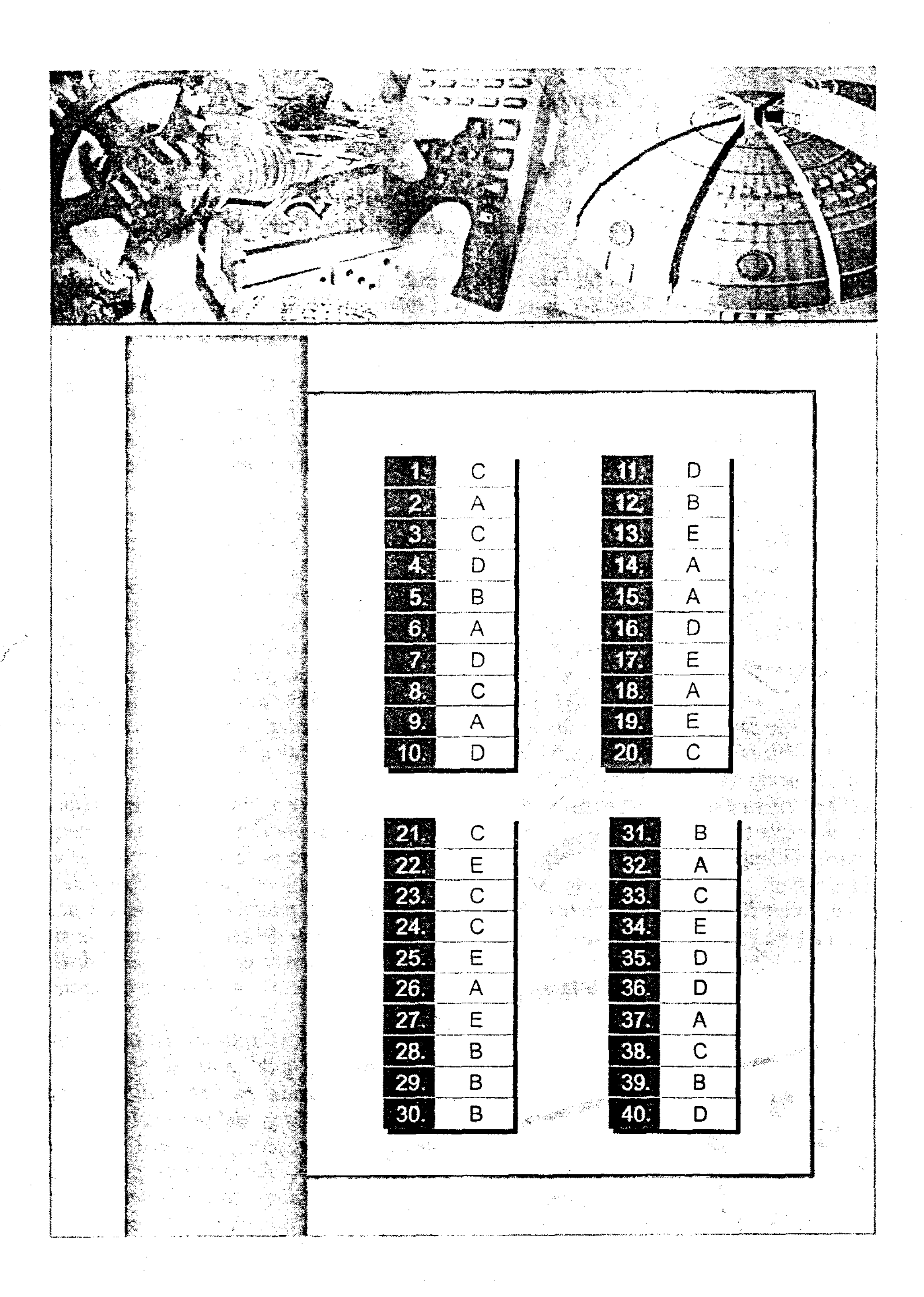
A) 3,5 días B) 7,5 días C) 6 días
D) 8,5 días E) 8 días

39. Dos personas tienen concedidas pensiones en razón directa a la raíz cuadrada del número de años de servicio. El servicio de la primera excede al de la segunda en 4 1/4 años y las pensiones están en la relación de 9 a 8. ¿Cuánto tiempo ha servido la segunda?

A) 8 años B) 16 años C) 24 años
D) 12 años E) 18 años

40. Tres pintores para pintar un globo aerostático de 2 m de radio emplearon 2 días trabajando 6 horas diarias. Si 4 pintores emplearon 5 días trabajando 8 horas diarias para pintar otro globo de 4 m de radio, porque habían empezado a pintarlo de rojo en vez de comenzar a pintarlo de azul, que era lo pactado, determine durante cuántos días lo estuvieron pintando de rojo.

A) 2 días B) 5 días C) 1 día
D) $\frac{1}{2}$ día E) 4 días



1.	C	11.	D	21.	C	31.	B
2.	A	12.	B	22.	E	32.	A
3.	C	13.	E	23.	C	33.	C
4.	D	14.	A	24.	C	34.	E
5.	B	15.	A	25.	E	35.	D
6.	A	16.	D	26.	A	36.	D
7.	D	17.	E	27.	E	37.	A
8.	C	18.	A	28.	B	38.	C
9.	A	19.	E	29.	B	39.	B
10.	D	20.	C	30.	B	40.	D

Kepler, Johannes

Nació en 1 571 en Well, Alemania. Uno de los mejores astrónomos de su tiempo, especialmente recordado por sus tres leyes del movimiento de los astros, murió en 1 630, a la edad de 58 años.

Johannes Kepler era hijo de un soldado. Era un niño débil al que un ataque de viruela dejó corto de vista. Su primera intención era ser ministro de la Iglesia Luterana y por eso estudió Teología en la universidad. Pero resultó que tenía un don para las matemáticas y poco a poco creció su interés por la Astrología.

En 1 594 se hizo profesor de matemática en Graz, donde se instaló y se casó. Cuatro años más tarde la familia tuvo que huir a causa de persecuciones religiosas y Kepler empezó a trabajar como ayudante del astrónomo danés Tycho Brahe. Cuando Brahe murió en 1 601, Kepler ocupó su puesto; también heredó una cantidad considerable de observaciones astronómicas que al final fueron publicadas.

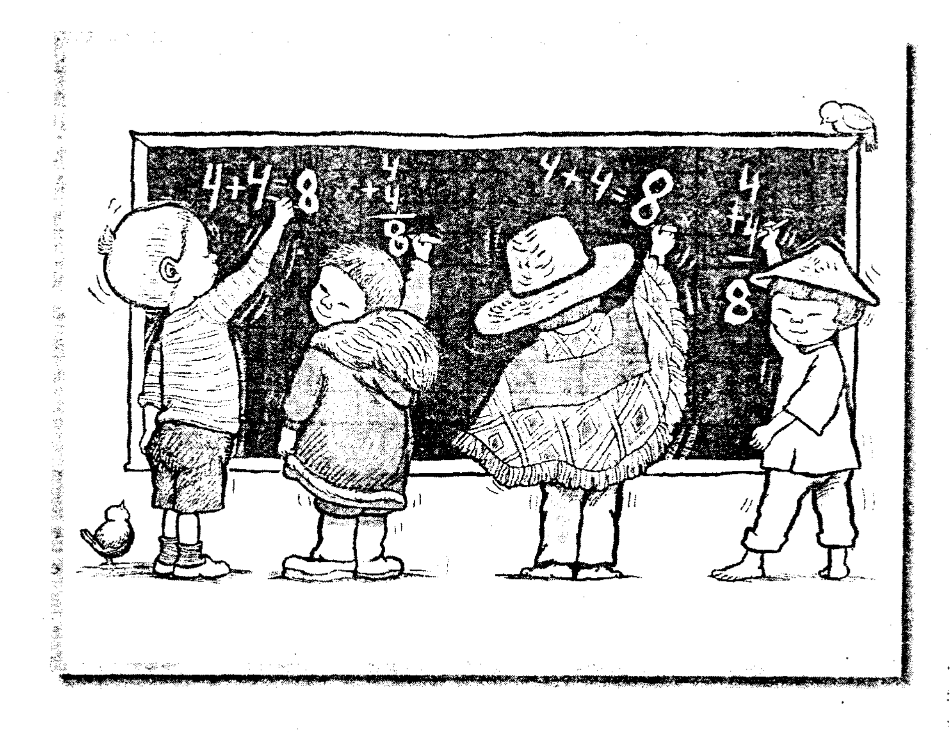
Utilizando las observaciones que Brahe había realizado, Kepler demostró que los planetas giran alrededor del Sol en una órbita ovalada y no circular. Más tarde descubrió otras dos leyes importantes sobre el movimiento de los planetas.

Toda la vida de Kepler se vio afligida por la mala suerte, la guerra, las persecuciones religiosas y por una salud enfermiza. Sin embargo se le recuerda como uno de los mejores astrónomos de su época. Dedicó su existencia casi exclusivamente a la observación y a la investigación científica. Su aceptación de las ideas copérnicanas le ocasionó problemas a la hora de publicar sus obras. Sus únicas compensaciones fueron los momentos de entusiasmo derivados de haber alcanzado un nuevo resultado matemático. Fue seguidor de las teorías pitagóricas, según las cuales el mundo físico es una red de relaciones numéricas existentes en el mundo real, de este modo llegó a descubrir muchos principios sobre el movimiento de los planetas.

La elipse, curva que estudió por primera vez Apolonio, se parece a una circunferencia aplastada. Una circunferencia tiene un diámetro fijo, pero el diámetro de la elipse (línea recta que contenga a un centro) varía de longitud según la posición. El diámetro más largo pertenece al eje mayor y el más corto al eje menor. Mientras más plana sea la elipse mayor es la diferencia proporcional de sus ejes y mayor su excentricidad. (La excentricidad de un círculo es nula, pues no está nada achatado). A lo largo del eje mayor, hay dos puntos llamados focos, equidistantes del centro, y tienen la siguiente propiedad: si dibujamos desde ambos focos líneas rectas que se corten en un mismo punto de la elipse, la suma de estas distancias es igual a la longitud del eje mayor. Esto es aplicable a cualquier punto de la curva.

Kepler descubrió que las órbitas de los otros planetas también se ajustaban a una elipse con el Sol en uno de sus focos. Anunció su descubrimiento en un libro que publicó en 1 609 y hoy se conoce como la primera ley de Kepler. Este libro también contenía su segunda ley: "Un radio vector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales a lo largo del paso del planeta por su órbita". Esto quiere decir que mientra más cerca se encuentra el planeta del Sol, más velocidad alcanzará en una proporción fija y calculable. Las elipses de Kepler pusieron punto final a la astronomía griega, destruyendo el sagrado movimiento circular y acabó con las esferas celestes que Eudoxio había colocado en el cielo dos mil años antes y que incluso Cópernico había sostenido. Desde entonces los sabios han seguido el esquema de Kepler del sistema solar con modificaciones triviales (Kepler se restringió al sistema solar pensando que las estrellas estaban todas en una capa fina de unos tres kilómetros bastante alejadas del sistema solar). En este punto le aventajó bastante Giordano Bruno.

OPERACIONES MATEMÁTICAS



El ser humano aprendió primero a contar, para más tarde, dar una representación gráfica a los números que así obtuvo. En un niño de primeros grados escolares se resume, sin lugar a dudas, este proceso.

Lectura 12

¡Contemos hasta 10!

Si hablas español, empezarás a contar: "Uno, dos, tres,...". Si hablas inglés, dirás: "One, two, three...". Si hablas ashanti, un idioma africano, contarás: "Eko, eno, esa ...". Hay nombres especiales para los primeros diez números, en casi todos los idiomas. Junto al nombre escrito de cada número, puedes ver cómo se pronuncia:

	ESPAÑOL	QUECHUA	JAPONÉS CHINO	CHINO	JAPONÉS	HINDI (India)	
	se escribe	se lee	se escribe	se lee	se lee	se escribe	se lee
1	uno	juq	一	(i)	(i chi)	एक	(eik)
2	dos	iskay	二	(a)	(ni)	दो	(do)
3	tres	kimsa	三	(san)	(san)	तीन	(tin)
4	cuatro	tawa	四	(su)	(shi)	चार	(char)
5	cinco	pishqa	五	(wu)	(go)	पाँच	(panch)
6	seis	soqta	六	(liu)	(ro ku)	छे	(chey)
7	siete	qanchis	七	(chi)	(shi chi)	सात	(sat)
8	ocho	pusaj	八	(ba)	(ha chi)	आठ	(at)
9	nueve	isqon	九	(ju)	(kiu)	नौ	(no)
10	diez	chunka	十	(shia)	(ju)	दस	(zas)

	ITALIANO	FRANCÉS		INGLÉS		ASHANTI (África)	
	se lee	se escribe	se lee	se escribe	se lee	se escribe	se lee
1	uno	un	(an)	one	(uan)	eko	(ekó)
2	due	deux	(de)	two	(tu)	eno	(enó)
3	tre	trois	(truá)	three	(zri)	esa	(esá)
4	quattro	quatre	(cart)	four	(foor)	enae	(inay)
5	cinque	cinq	(senc)	five	(faif)	innum	(innum)
6	sei	six	(sis)	six	(six)	insia	(insía)
7	sette	sept	(set)	seven	(seven)	nso	(ensó)
8	otto	huit	(uit)	eight	(eit)	inwotwie	(inwotwi)
9	nove	neuf	(nef)	nine	(nain)	enkoro	(enkró)
10	dieci	dix	(dis)	ten	(ten)	edu	(edú)

FUENTE : El mundo de los niños Tomo X

OPERACIONES MATEMÁTICAS

Objetivos

1. *Conocer, en todas sus variantes, el concepto de operación matemática.*
2. *Conocer las diferentes formas de definición de una operación matemática.*
3. *Comprender las propiedades de las operaciones matemáticas.*
4. *Potenciar la aptitud de reconocimiento y manejo adecuado de nuevas estructuras simbólicas relacionadas con las operaciones matemáticas.*
5. *Conocer la definición de ley de composición interna, y sentar las bases para su estudio a nivel superior.*

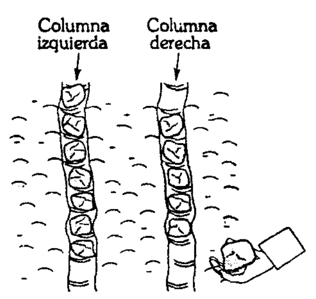
Introducción

Los matemáticos del siglo XX llevan una actividad intelectual muy sofisticada que no resulta fácil de definir, pero una gran parte de lo que hoy se conoce como matemática es el resultado de un pensamiento que originalmente se centró en los conceptos de número, magnitud y forma. Las nociones primitivas relacionadas con estos conceptos se remontan a los primeros días de la raza humana, e incluso pueden encontrarse ya indicios de conceptos matemáticos en formas de vida que, probablemente, han precedido en muchos millones de años al género humano. Charles Darwin en el libro titulado El origen del hombre (1 871), hace notar que algunos de los animales superiores tienen facultades tales como memoria e imaginación; y actualmente resulta más claro que la capacidad para distinguir número, tamaño, orden y forma, no son propiedad exclusiva del género humano. Está totalmente claro, no obstante, que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre, y como es válido el principio biológico de la "supervivencia de los más aptos", entonces la supervivencia de la raza humana no deja de estar relacionada con el desarrollo de conceptos matemáticos realizado por el hombre[1]. En un principio, las nociones primitivas debieron estar relacionadas más bien con diferencias y contrastes que con semejanzas, tales como son la diferencia entre un lobo y muchos, la desigualdad en tamaño entre un pececillo y una ballena, el contraste entre la redondez de la luna y la forma lineal de una palmera. Después, y de manera gradual, debe haber surgido, a partir de la confusión de un gran número de experiencias desordenadas, la constatación de que hay ciertas igualdades o semejanzas; y de esta conciencia de las semejanzas, tanto en número como en la forma, nacieron la matemática y la ciencia en general. Las diferencias mismas parecen estar apuntando ya a las semejanzas, puesto que el contraste que se observa entre un lobo y una manada de lobos, entre una oveja y un rebaño, entre un árbol y un bosque, viene a sugerir que un lobo, una oveja y un árbol tiene algo en común: su unidad. De la misma manera puede uno llegar a darse cuenta de que algunos otros grupos como son los pares, pueden ponerse en correspondencia biunívoca: las manos pueden emparejarse con los pies, con los ojos, con las orejas o con los agujeros de la nariz. Este reconocimiento de una propiedad abstracta que tiene en común ciertos grupos, y a la que nosotros llamamos número, representa ya una importante etapa en el camino de entender la belleza y majestuosidad de la matemática.

---

[1] *Los estudiosos de los orígenes de la matemática nos refieren que sus inicios datan de tiempos en los cuales el hombre primitivo pasó a utilizar instrumentos para obtener el medio de subsistencia.*

Así pues la idea de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar. Inicialmente se contaba con la ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras, conos de abetos, etc. Prueba de esto lo constituye, por ejemplo, el origen de la palabra cálculo pues "calculus", en su traducción del latín, significa "cuenta con piedras"[2]. Posteriormente se desarrolla el intercambio de los productos del trabajo y surge el hecho de agregar o disminuir objetos en cada transacción, lo que da un origen incipiente a las operaciones matemáticas:



La columna de la derecha vale por uno y la columna de la izquierda vale por diez. De acuerdo a esto, en el gráfico estaríamos representando el número 85 si colocamos la piedra que tenemos en la mano en la columna de la izquierda; pero si la colocamos en la columna de la derecha, el número representado será 76. Esto muestra el remoto origen del ábaco con el cual los niños aprenden a realizar operaciones matemáticas.

La reserva de números era, al principio, muy limitada; la reunión de los números naturales conocidos y utilizados era finita y se fue extendiendo sólo gradualmente, en forma lenta. Por este motivo la conciencia de la prolongación ilimitada de la sucesión natural constituye un síntoma de haber alcanzado un alto nivel de conocimiento y cultura, así la conciencia de número se hizo al fin lo suficientemente extendida y clara como para que se llegase a sentir la necesidad de expresar esta propiedad de alguna manera, al principio con lenguajes simbólicos (los dedos de la mano) y más adelante con símbolos que pudieran expresar ideas numéricas. Y el relacionar estas ideas numéricas a través de la comparación, agrupación y cuantificación daría origen, en su forma más primitiva, a las operaciones matemáticas, pero es la acumulación de conocimiento en base a la experiencia, tanto de carácter cuantitativo (numérico–aritmético) como de forma (geométrico), la que genera las premisas para la formación de esquemas matemático–estructurados.

Ahora, cuando el hombre comienza a utilizar los números tuvo que buscar una forma de representarlos. El modo más rudimentario consistió en trazar rayitas o signos en un tronco de árbol; en la arena del piso o en una tablilla de arcilla. Inicialmente cada marca representaba la unidad mientras que el conjunto de signos daba la cantidad total de elementos que estaban siendo contados. De seguro fue así como el pastor de la antigüedad controlaba, al anochecer, cuando regresaba del pastoreo, que no se le hubiera extraviado ninguna oveja. Para asegurarse de que todas las ovejas estaban en el redil, hacía corresponder una marca o signo a cada cabeza del ganado: al final había pues tantos animales como signos marcados. Este fue el primer paso dado hacia el nacimiento de la representación simbólica de los números para llegar a la representación actual. Nacía también, así, la matemática, siendo, probablemente, la ciencia más antigua. En realidad nuestra vida diaria está marcada por los números y mediante su aplicación damos funcionamiento a todos los aparatos y las máquinas que utilizamos a lo largo del día, tales como computadoras, calculadoras, televisores, reproductores de cintas de videos, etc.

[2] En cualquiera de estos casos, la idea es la misma: una correspondencia biunívoca entre los objetos a ser contados (cantidad) y un conjunto de referencia (representación de la cantidad). Es así como surgen las primeras representaciones de números, sus símbolos, y luego los sistemas de numeración.

NOCIONES PREVIAS

Éste es un capítulo que basa su importancia en la gran aplicación que tiene sobre los procesos condicionados y reglamentados, que permite medir la capacidad para captar relaciones u operaciones nuevas, a las que se supone estamos poco acostumbrados. Permite también analizar nuevas operaciones matemáticas (definidas a partir de las ya conocidas), su definición y el modo de aplicarlas bajo las condiciones o restricciones en las cuales ha sido definida. Para tal efecto, debemos entender lo que es una operación matemática y lo que es un operador matemático. Veamos:

Imaginemos que tenemos una máquina procesadora de algodón, tal como se muestra en la figura:

Esta máquina recibe la materia prima que es el algodón y la transforma en un producto terminado, después de un determinado proceso, dependiendo del botón que se haya escogido.

Igual ocurre con una operación matemática (representada por la máquina), ya que ella se encarga de obtener resultados, después de un conjunto de procesos que se efectúan sobre determinadas cantidades; estos procesos son diferenciados por el operador que se emplee (representado por los botones).

¿QUÉ ES UNA OPERACIÓN MATEMÁTICA?

Es un proceso que consiste en la transformación de una o más cantidades en una cantidad llamada resultado, bajo ciertas reglas o condiciones en la cual se define la operación. Toda operación matemática presenta una regla de definición y un símbolo que la identifica llamado operador matemático. Como ejemplos de operaciones matemáticas tenemos: la adición, la sustracción, la multiplicación, etc.

¿QUÉ ES UN OPERADOR MATEMÁTICO?

Es aquel símbolo que representa a una operación matemática. Nos permite reconocer la operación matemática a emplear con su respectiva regla de definición. Como ejemplos de operadores matemáticos tenemos :

$$a * b = \underbrace{2a + 3b^2}_{\text{Regla de definición}}$$

$*$ → **Operador matemático**

$$\sum_{i=1}^{n} i = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n}_{\text{Regla de definición}}$$

$\sum$ → **Operador matemático**

En el siguiente cuadro mencionamos algunas operaciones matemáticas y los símbolos que las representan.

Ejemplo:

Operación	Operador matemático
Adición	+
Sustracción	–
Multiplicación	×
División	÷
Radicación	√
Valor absoluto	| |
Máximo entero	[ ]
Integración	∫
Productoria	π
Sumatoria	Σ
⋮	⋮

Observación:

- Las operaciones matemáticas y sus respectivos operadores, mostrados en el cuadro de arriba, son universalmente conocidas; lo que haremos ahora será establecer otras operaciones matemáticas, con sus respectivas reglas de definición, basándonos en las operaciones matemáticas ya conocidas.

  Estas nuevas operaciones matemáticas a definir tendrán una regla de definición arbitraria en donde se hará uso de otros operadores matemáticos para representarlas, como por ejemplo:

*	∇	T	⊥	#	...
asterisco	nabla	truc	antitruc	grilla	...

- En el año 2 000 a de J.C., lo babilonios utilizaban métodos algebraicos para la resolución de problemas. Sin embargo no utilizaban símbolos matemáticos, a excepción de numerales primitivos.

  Los signos más, +, y menos, –, aparecieron por primera vez en el año 1 489 d. de J.C. y se empezaron a emplear con regularidad en el año 1 544 d. de J.C. El signo de igualdad, =, fue utilizado por primera vez por Robert Recorde en 1 557, en Inglaterra. El punto escrito un poco elevado, • y la yuxtaposición se emplearon para la multiplicación alrededor del 1 600 y el símbolo × alrededor del 1 620. Encontramos que el símbolo de la división, ÷, aparece en 1 659 en el libro Teutsche Álgebra de Rahn.

  Si alguna persona puede acreditársele el desarrollo de la representación matemática simbólica, es el matemático francés Vieta (alrededor del 1 600). En su libro *In Artem*, emplea vocales para representar las cantidades desconocidas y consonantes para las conocidas. Unos años más tarde, Descartes utilizó **x** e **y** para variables y, también, la notación exponencial.

A continuación veamos algunos ejemplos para ilustrar la definición de operación matemática y la aplicación de su regla de definición :

Ejemplo 1

Definimos en $\mathbb{R}$ una operación matemática representada por $*$ de la siguiente manera:

$$a*b = a^2 + 2b + 5$$

En base a la definición dada, calculemos:

a) $2 * 3$ b) $6 * -1$

c) $a^3 * b^2$ d) $b * a$

Resolución:

Para llevar a cabo la resolución primero debemos aclarar lo siguiente: si escribimos: $a*b$ y solicitamos calcular $2*3$ debemos poner especial cuidado en identificar cada elemento con el valor que le corresponde. Así al primer elemento (a) le corresponde el valor 2 (a=2) y al segundo elemento (b) le corresponde 3 (b=3)

Como:

$$\mathbf{a*b = a^2 + 2b + 5}$$

$\downarrow \ \downarrow$

Entonces : $2*3 = 2^2 + 2(3) + 5 = 15$

Procedemos de manera análoga para los demás casos.

Entonces :

- $6*(-1) = 6^2 + 2(-1) + 5 = 39$
- $a^3*b^2 = (a^3)^2 + 2(b^2) + 5 = a^6 + 2b^2 + 5$
- $b*a = b^2 + 2a + 5$

Nótese aquí que : $a*b \neq b*a$

Ejemplo 2

Definimos en $\mathbb{N}$:

operador matemático → $\triangle x = \overbrace{\dfrac{x(x+1)}{2}}^{\text{regla de definición}}$

Luego, calculemos:

$\triangle 2 = \dfrac{2(3)}{2} = 3$

$\triangle 7 = \dfrac{7(8)}{2} = 28$

$\triangle -5 =$ **¡No se puede! pues $5 \notin \mathbb{N}$ y decimos que la operación no está definida para este valor.**

$\triangle 1/3 =$ **¡No se puede! pues $1/3 \notin \mathbb{N}$**

$\triangle \sqrt[3]{27} = \triangle 3 = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Ejemplo 3

Se define en $\mathbb{N}$ la siguiente operación :

$$ⓐ = \begin{cases} \dfrac{a+3}{2} & ; \text{ si "a" es impar} \\ \dfrac{a+4}{2} & ; \text{ si "a" es par} \end{cases}$$

Calcule :

I) ⑧ II) ⑦ III) ⑬

IV) (2n) V) (2n + 3)

Notamos que, de acuerdo a la definición dada, hay dos reglas a emplear; entonces, previamente, se debe discernir si el elemento a operar es par o impar para elegir la regla adecuada.

Luego, calculemos :

⑧ $= \dfrac{8+4}{2} = 6$; puesto que 8 es par

$ⓐ$

$\textcircled{7} = \dfrac{7+3}{2} = 5$; puesto que 7 es impar

y procediendo análogamente tenemos:

$\textcircled{13} = \dfrac{13+3}{2} = 8$

$\textcircled{2n} = \dfrac{2n+4}{2} = n+2$

$\textcircled{2n+3} = \dfrac{2n+3+3}{2} = n+3$; puesto que 2n+3 es impar

Conclusión:

Hemos podido apreciar, hasta ahora, que podemos representar la regla de definición de una operación matemática mediante una fórmula; en cuyo caso, tal como se ha hecho, bastará solamente con reconocer adecuadamente los elementos y relacionarlos con sus respectivos valores para así poder reemplazarlos en la regla de definición dada para obtener el resultado. El reemplazo del valor numérico en la fórmula puede ser un reemplazo directo, como el que hemos realizado en los 2 primeros ejemplos. Si la operación presenta múltiples reglas de definición, entonces primero hay que discernir qué regla emplear antes de efectuar el reemplazo, como en el ejemplo 3; y en ocasiones se presentan ejercicios en los cuales hay que darle forma a los valores numéricos dados para poder reconocer el elemento o a los elementos que intervienen en la operación para así reemplazarlos en la regla de definición de manera adecuada, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4

Definimos en $\mathbb{R}$ la siguiente operación:

$$a^3 \square b^2 = 3b - 2a$$

Calcule : $27 \square 16$

Resolución:

Observamos que para identificar los valores que corresponde a "a"y "b", debemos previamente darle forma a 27 y 16 de acuerdo a la definición, luego:

$$\underline{\underline{a}}^3 \square \underset{\sim}{b}^2 = 3b - 2a$$

entonces:

$$\underbrace{27} \square \underbrace{16} = ?$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{3}}^3 \square \underset{\sim}{4}^2 = 3(\underset{\sim}{4}) - 2(\underline{\underline{3}}) = 6$$

$$\therefore\ 27 \square 16 = 6$$

Al acomodar adecuadamente obtenemos a=3, b=4, valores que reemplazamos en la regla de definición.

Ejemplo 5

Definimos en $\mathbb{N}$:

$x^y \triangle y^x = 18y - 11x$

Calcule : $A = (1\triangle 2)\triangle (8\triangle 9)$

Resolución:

Dándole forma a los datos numéricos obtenemos:

$1\triangle 2 = 1^2\triangle 2^1 = 18(2) - 11(1) = 25$

$8\triangle 9 = 2^3\triangle 3^2 = 18(3) - 11(2) = 32$

Reemplazando en A tendríamos:

$A = (1\triangle 2) \triangle (8\triangle 9)$

$A = 25 \triangle 32$

$A = 5^2 \triangle 2^5 = 18(2) - 11(5) = -19$

$$\therefore\ A = -19$$

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON REGLA DE DEFINICIÓN IMPLÍCITA

Hasta ahora hemos estudiado ejercicios en los cuales la regla de definición se daba directamente, pues era fácil distinguirla en uno de los lados de la igualdad del ejercicio planteado; pero esto no siempre ocurre así. Veremos ejercicios cuya regla de definición está dada implícitamente.

A. FORMAS DIVERSAS

Supongamos que tenemos definida, en ℝ, una operación matemática de la siguiente forma:

$$m*n = m(n*m)^2 \; ; \; m*n \neq 0$$

Calculemos : $8 * 1$

Al reemplazar se obtiene:

$8*1 = 8(1*8)^2$ .... (I)

Como puedes apreciar, debemos calcular $1*8$ para reemplazarlo en la expresión (I); entonces:

$1*8 = 1(8*1)^2$ .... (II)

pero, para calcular $1*8$ tendremos que calcular, previamente, $8*1$; dato que no poseemos y que era nuestro primer objetivo a calcular.

¡Que contrariedad!, si queremos $8*1$, debemos calcular $1*8$ y si calculamos $1*8$ éste depende de $8*1$. Estamos, pues, frente a un círculo vicioso. Pero este círculo vicioso es aparente, pues en realidad podemos salir de él fácilmente.

Veamos:

Ejemplo 1

Se define la siguiente operación en el conjunto

ℝ : $m*n = m(n*m)^2$; $(m*n) \neq 0$

Calcule : $8*1$

Resolución:

Como en este ejemplo la operación no ha sido definida de manera explícita, tenemos que encontrar la regla de definición y para esto procederemos de la siguiente manera:

$m*n = m(n*m)^2$ ⇉ Expresión original

(n*m) → Expresión que falta determinar

de acuerdo a la definición, $n*m = n(m*n)^2$

Luego, reemplazando lo obtenido en la expresión original, obtenemos :

$$m*n = m[n(m*n)^2]^2$$

Luego, despejamos $m*n$: $m*n = mn^2(m*n)^4$

$$\frac{1}{mn^2} = (m*n)^3$$

$$\therefore \; m*n = \underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{mn^2}}}_{\text{regla de definición}}$$

Como se puede apreciar, hemos obtenido ya la regla de definición en forma explícita y podemos reemplazar los valores dados. Así, tendremos entonces:

$$8*1 = \sqrt[3]{\frac{1}{8(1)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore \; 8*1 = \frac{1}{2}$$

No es muy difícil, ¿cierto?; realicemos entonces un ejemplo más.

Ejemplo 2

Se define, en ℝ, la operación:

$a*b = \dfrac{(b*a)^2}{4}$ .... (I)

Calcule : $3*5$

Resolución:

Procedemos de manera análoga al ejemplo anterior; así:

$$b*a = \frac{(a*b)^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Reemplazando (II) en (I) y operando tendremos:

$$a*b = \frac{\left(\frac{(a*b)^2}{4}\right)^2}{4}$$

$$a*b = \frac{(a*b)^4}{64}$$

$$\Rightarrow 64 = (a*b)^3$$

Luego : $\boxed{a*b = 4}$

Esta última expresión nos señala que el resultado de operar dos números reales cualesquiera, a y b, será siempre 4; y por lo tanto, calculando lo que nos piden:

$$\therefore\ 3*5 = 4$$

Ejemplo 3

Dado: 23∗42 = 16

35∗16 = 23

64∗71 = 34

Calcule: A = 59∗86

Resolución:

La regla de definición no aparece como dato ni explícita, ni implícitamente; sólo tenemos los resultados de operar dos números dados. En este caso tendremos que hacer uso de mucha creatividad e ingenio, pues el resultado se puede obtener de muy diversas maneras, veamos algunos de ellos:

- Sumar los números dados
- Restar los números dados
- Promediar los números dados.
- Multiplicar los números dados.
- Dividir los números dados.
- Realizar operaciones entre los dígitos que componen cada número y luego operar ambos resultados.
- Realizar una operación entre el dígito de un número y un dígito del otro; operar, luego, el dígito sobrante de uno de los números con el dígito sobrante del otro y operar, finalmente, ambos resultados.

En resumen, realizar la mayor cantidad posible de operaciones con los datos dados hasta obtener una regla adecuada que se cumpla para todos los casos dados como información. Dicha regla no debe fallar en ningún caso.

En fin, la lista de posibilidades puede ser muy amplia y tan solo la práctica constante nos permitirá "visualizar", en forma rápida, la regla de definición de la operación matemática utilizada.

En el ejemplo, observamos que el resultado depende del producto de la cifra que componen a cada par de números operados :

$$23*42 = 2\times 2 + 3\times 4 = 16$$

$$35*16 = 3\times 6 + 5\times 1 = 23$$

$$64*71 = 6\times 1 + 4\times 7 = 34$$

Luego :

$$\overline{ab} * \overline{cd} = \underbrace{a.d + b.c}_{\text{regla de definición}}$$

$$\therefore\ A = 59 * 86 = 5\times 6 + 9\times 8 = 102$$

Ejemplo 4

Se tiene : $72\triangle 10 = 56$

$48\triangle 15 = 54$

$100\triangle 1 = 52$

Calcule : $A = 12\triangle 40$

Resolución:

Observemos, atentamente lo que ocurre con los números operados, así :

$$72\triangle 10 = \frac{1}{2}(72) + 2(10) = 56$$

$$48\triangle 15 = \frac{1}{2}(48) + 2(15) = 54$$

$$100\triangle 1 = \frac{1}{2}(100) + 2(1) = 52$$

En este caso no trabajamos con los dígitos componentes de cada número; sino con todo el número. Entonces :

$$\boxed{m\triangle n = \frac{1}{2}m + 2n}$$

$$\therefore A = 12\triangle 40 = \frac{1}{2}(12) + 2(40) = 86$$

B. DEFINICIÓN MEDIANTE TABLAS DE DOBLE ENTRADA

Dado un conjunto podemos definir una operación matemática en dicho conjunto, mediante una tabla; es decir, podemos plantear un ejercicio de operaciones matemáticas en la cual no aparezca la regla de definición en forma explícita, sino de manera implícita, mediante una **tabla de doble entrada**. Pero .... ¿qué es una tabla de doble entrada y cómo se define en ella una operación binaria?.

Veamos:

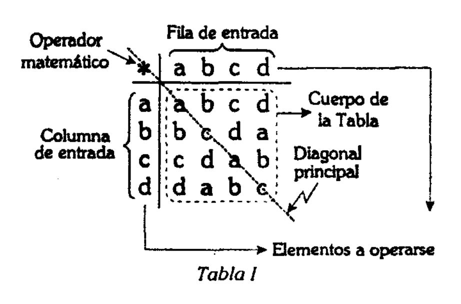


Tabla I

Los elementos a, b, c, d que aparecen en la fila y en la columna de entrada de la tabla dada pertenecen a un conjunto no vacío en el cual se ha definido una operación matemática simbolizada por "∗". Los resultados obtenidos que se muestran en el cuerpo de la tabla se han determinado gracias a una regla de definición que como observamos "no aparece" pero que dio origen a la tabla.

Ejemplo 1

En el conjunto A = {1,2,3,4} se define la operación (∗) mediante la siguiente tabla:

∗	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	1	3	2
3	1	3	2	4
4	3	2	4	1

Tabla I

Calcule : 3∗2

Resolución:

En primer lugar ubicamos al primer elemento (3), en la columna de entrada, y al segundo elemento (2), en la fila de entrada; el resultado de la operación lo encontramos en el cuerpo, en la intersección de la fila y la columna correspondientes al primero y al segundo elemento, respectivamente.

Veamos:

2° elemento de la pregunta

*	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	1	3	2
3	1	3	2	4
4	3	2	4	1

1° elemento de la pregunta

∴ 3*2 = 3

Ejemplo 2

Considerando la operación binaria definida en la tabla I, calcule:

b*c

Resolución:

Análogamente al ejemplo 1, planteamos:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

El resultado de b*c aparece en la *intersección* de la fila correspondiente al elemento b, ubicado en la columna de entrada, con la columna correspondiente al elemento c, ubicado en la fila de entrada.

∴ b*c = d

Ejemplo 3

En el conjunto: A = {1, 2, 3, 4} se define:

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Calcule: $E = \dfrac{(1*2)*(2*4)}{(3*3)*(4*1)}$

Resolución:

En base a los ejemplos anteriores podemos fácilmente calcular en la tabla:

1*2=3 ; 2*4=2 ; 3*3=2 ; 4*1=1

Luego, reemplazando :

$$E=\frac{(1*2)*(2*4)}{(3*3)*(4*1)}=\frac{3*2}{2*1}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 4

Consideremos el conjunto P = {a; b; c} y definamos, en este conjunto, una operación representada por el operador Δ, cuyos resultados mostramos mediante la siguiente tabla:

Δ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Calcule $R=\dfrac{(c\Delta a)\ \Delta\, b}{(a\Delta b)\ \Delta\, c}$

Resolución:

De los ejemplos anteriores deducimos :

$$R=\frac{(c\Delta a)\Delta b}{(a\Delta b)\Delta c}=\frac{a\Delta b}{c\Delta c}\Rightarrow R=\frac{a\Delta b}{c\Delta c}=\frac{c}{c}=1$$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS

En un conjunto $A \neq \phi$, definimos una operación matemática simbolizada por (∗), entonces estudiaremos las siguientes propiedades :

1. CLAUSURA O CERRADURA

Si al realizar la operación ∗ con 2 elementos cualesquiera del conjunto A, el resultado de dicha operación es un elemento del conjunto A; entonces diremos que la operación cumple con la propiedad de clausura o cerradura, y, por consiguiente, se dice que la operación es cerrada en el conjunto A.

$$\forall\, a \wedge b \in A \Rightarrow a*b \in A$$

Si en al menos un caso el resultado de la operación no pertenece al conjunto A, diremos que la operación ∗ no cumple la propiedad de clausura o cerradura; es decir, la operación ∗ no es cerrada en A.

Ejemplo 1

Se define en **N** : $a*b = 2a^2 + b$

¿La operación es cerrada en **N**?

Análisis : a y b son **N**

Entonces :

$$\mathbf{N}*\mathbf{N} = \underbrace{2(\mathbf{N})^2 + \mathbf{N}}_{\mathbf{N}}$$

Se observa que para todo número natural, el resultado es un número natural.

Por lo tanto, la operación ∗ es cerrada en **N**.

Ejemplo 2

Se define en **Z** : $m\Delta n = \dfrac{m^2}{n}$

¿La operación definida es cerrada en **Z**?

Resolución:

Calculemos: $1\Delta 2 = \dfrac{1^2}{2} = \dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$

Hemos tomado dos elementos en **Z** y al realizar la operación encontramos que el resultado no es u . número entero; por lo tanto, la operación no es cerrada en **Z**.

En tablas :

En A = {1,2,3,4} se define la operación △, mediante la siguiente tabla:

△	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

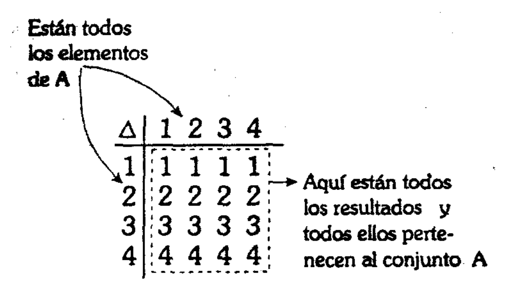
¿La operación es cerrada en A?

Resolución:

Para determinar si una operación definida en un conjunto, y expresada en una tabla, es cerrada o no, haremos lo siguiente:

1. Verificar que todos los elementos del conjunto donde se ha definido la operación deben estar presentes tanto en la columna como en la fila de entrada.
2. Verificar que todos los elementos presentes en el cuerpo de la tabla (los elementos del cuerpo de la tabla son los resultados de las operaciones) pertenezcan al conjunto donde se ha definido la operación.
3. Si todos los elementos del cuerpo de la tabla pertenecen al conjunto donde se ha definido la operación, entonces la operación es cerrada. Si existiese al menos un elemento del cuerpo de la tabla que no pertenece al conjunto donde se ha definido la operación, entonces la operación no es cerrada.

Veamos el ejemplo: A = {1,2,3,4}

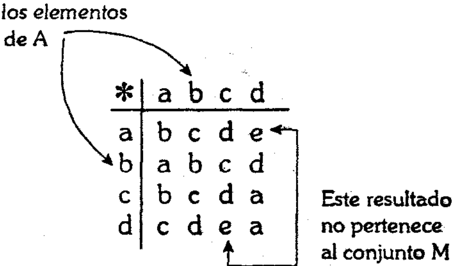


∴ La operación Δ es cerrada en A.

Ejemplo:

En M = {a,b,c,d}

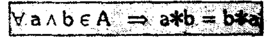
Se define :



∴ La operación * no es cerrada en M.

2. CONMUTATIVIDAD

Para todo par de elementos del conjunto A, si el orden de dichos elementos en la operación * no altera el resultado de la misma; entonces diremos que la operación * es conmutativa en A.



Ejemplo 1

Se define en Q :

a*b = a + b − ab

Para saber si cumple o no con la conmutatividad calculamos: b*a.

b * a = b + a − ba

Comparemos los segundos miembros:

a+b−ab y b+a−ba

Son iguales, en otras palabras, el resultado es el mismo. Por lo tanto, la operación * es conmutativa.

Ejemplo 2

Se define en Z :

$m\#n = m^2 + 2nm$

Si calculamos n#m tendremos:

$n\#m = n^2 + 2mn$

Luego : comparamos los resultados

m^2+2nm y n^2+2mn

De la comparación nos damos cuenta que los resultados son diferentes, por tanto la operación # no es conmutativa.

En tablas :

En el conjunto: A = {a , b , c , d} se define la operación representada por * mediante la siguiente tabla :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

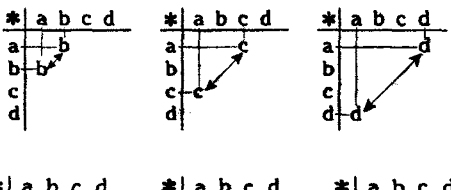
¿La operación, así definida, será conmutativa?

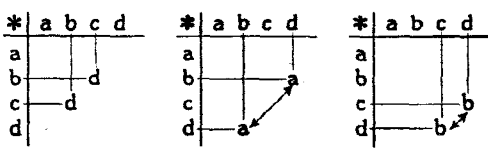
La respuesta es afirmativa y para probarlo, efectuamos cada uno de los siguientes casos:

a*b = b*a b*c = c*b

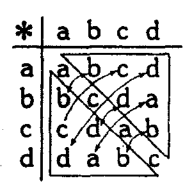
a*c = c*a b*d = d*b

a*d =d*a c*d = d*c





Como podrás observar, proceder así es demasiado tedioso y largo; pero este hecho nos da una información muy interesante o, mejor dicho, una característica muy importante para reconocer cuando una operación en una tabla dada es conmutativa o no. Observa atenta y detenidamente todos y cada uno de los esquemas mostrados; ¿notas alguna característica común en todos ellos? ¡Claro que sí! Bastará con que reunamos las 6 gráficas en una sola para que lo notes:

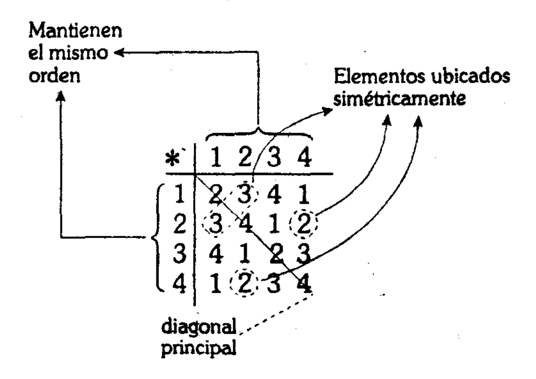


*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Hay elementos que son iguales y ubicados simétricamente a ambos lados, respecto de la diagonal principal que parte del vértice del operador y que establece una simetría entre las dos "figuras" triangulares (ver figura). Llamaremos criterio de la diagonal a esta forma práctica.

Criterio de la diagonal:

1. Se ordena la fila y la columna de entrada y a partir del vértice del operador, en el mismo orden, y teniendo cuidado de mover, adecuadamente, los elementos correspondientes en el cuerpo de la tabla.
2. Se traza una diagonal desde el vértice del operador (diagonal principal)
3. Se verifica que a ambos lados de la diagonal y en forma simétrica, queden elementos iguales.
4. Si en todos los casos los elementos son iguales, la operación es conmutativa.
5. Si en al menos un caso uno de los elementos es diferente, la operación no es conmutativa.

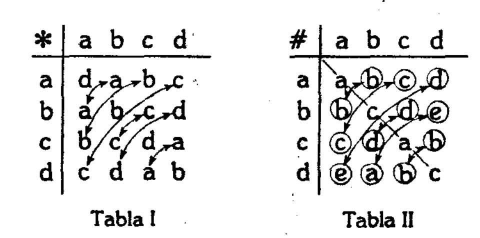


*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

En todos los casos, los elementos que están colocados simétricamente respecto a la diagonal principal son iguales; por lo tanto, la operación (*) es conmutativa.

Ejemplo 2

En el conjunto A = {a , b , c , d} se definen las operaciones * y # mediante las tablas:



*	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Tabla I

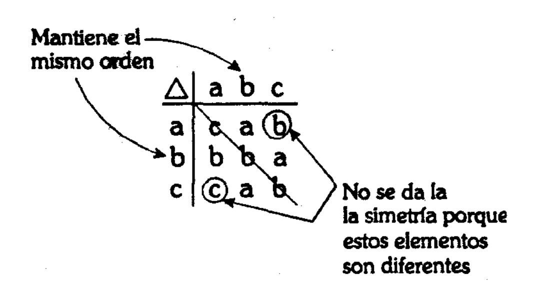
#	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	e
c	c	d	a	b
d	e	a	b	c

Tabla II

Notamos por simple inspección –gracias a la regla dada– que la operación (*) es conmutativa, mas no así la operación #, pues como puede verse en la tabla II, además de aparecer un elemento extraño al conjunto dado ("e" no es un elemento de A), no se cumple la igualdad de elementos; es decir, no hay simetría.

En conclusión, dada una tabla, la operación, definida mediante la misma será conmutativa cuando los elementos en el cuerpo de la tabla son simétricos respecto a la diagonal principal (no hace falta que los elementos de la diagonal principal sean iguales).

Ejemplo:
Verificaremos si es conmutativa o no la operación definida en la tabla dada.



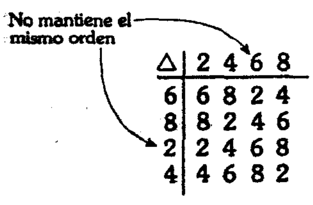
△	a	b	c
a	c	a	b
b	b	b	a
c	c	a	b

Por lo tanto, la operación △ no es conmutativa.

Ejemplo 3
¿La operación △ mostrada en la siguiente tabla es conmutativa?

△	2	4	6	8
6	6	8	2	4
8	8	2	4	6
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2

Resolución:
Verifiquemos el orden en la tabla:



△	2	4	6	8
6	6	8	2	4
8	8	2	4	6
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2

Primero homogenicemos el orden en la columna y fila de entrada; tomemos como referencia el orden de la fila de entrada, así pues, la columna de entrada deberá ordenarse de esa misma forma; es decir, que primero debe estar el "2", por lo tanto lo subimos al igual que toda la fila que lo acompaña (2,4,6,8); segundo debe estar el "4", igualmente lo subimos, pero con toda la fila que lo acompaña; (4,6,8,2) y así con el resto de elementos.

Al ordenar la tabla obtendremos :

△	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2
6	6	8	2	4
8	8	2	4	6

Trazamos la diagonal y verificamos la simetría:

△	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2
6	6	8	2	4
8	8	2	4	6

Se observa la simetría

Por lo tanto, la operación △ es conmutativa.

3. ELEMENTO NEUTRO (e)

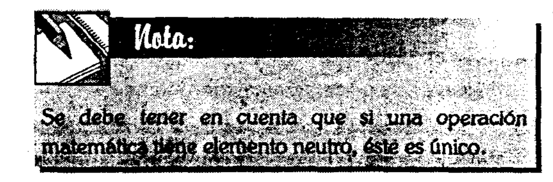
Sea "e" un elemento del conjunto A, tal que al operarlo con algún elemento "a" también del conjunto A, tanto a derecha como a izquierda, da como resultado el mismo elemento "a". Si este elemento "e" existe, se llamará ELEMENTO NEUTRO.

$$\exists! e \in A \ / \ \forall a \in A \Rightarrow a * e = e * a = a$$

Ejemplo 1

- En la adición el elemento neutro es el 0.
  $a+0 = 0 + a = a \ \Rightarrow e = 0$
- En la multiplicación el elemento neutro es el 1.

$$a \times 1 = 1 \times a = a \ \Rightarrow \ e = 1$$



Nota:

Se debe tener en cuenta que si una operación matemática tiene elemento neutro, éste es único.

Ejemplo 2

Se define en **Z** :

$a*b = a + b - 3$

¿Cuál es, si tiene, el elemento neutro?

Resolución:

Procedemos a calcular, si tiene, el elemento neutro (e). Por definición:

$$\underbrace{e*a}_{} = a \qquad \underbrace{a*e}_{} = a$$

$$e+a-3 = a \qquad a+e-3 = a$$

$$e = 3 \qquad e = 3$$

$$\therefore\ e = 3$$

Ejemplo 3

Se define en Q : $a \ominus b = 2ab$

¿Cuál es, si tiene, el elemento neutro?

Resolución:

Por definición :

$$\underbrace{e \ominus a}_{} = a \qquad \underbrace{a \ominus e}_{} = a$$

$$2ea = a \qquad 2ae = a$$

$$e = \frac{1}{2} \qquad e = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ e = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 4

Se define en **Z** : $a \triangle b = a - b + 5$

¿Cuál es, si tiene, el elemento neutro?

Resolución:

Aplicamos definición de elemento neutro:

$$\underbrace{a \triangle e}_{} = a \qquad \underbrace{e \triangle a}_{} = a$$

$$a-e+5 = a \qquad e-a+5 = a$$

$$e = 5 \qquad e = 2a-5$$

Se observan dos elementos neutros, pero sabemos que por definición, el elemento neutro (e) es único; por lo tanto, se concluye que la operación no tiene elemento neutro.

Ejemplo 5

Se tiene en **R** :

$$a*b = ab + a + b + 2$$

¿Cuál es, si tiene, el elemento neutro?

Resolución:

Aplicamos definición de elemento neutro :

$$\underbrace{a*e}_{} = a \qquad \underbrace{e*a}_{} = a$$

$$ae+a+e+2 = a \qquad ea+e+a+2 = a$$

$$e(a+1) = -2 \qquad e(a+1) = -2$$

$$\Rightarrow e = \frac{-2}{a+1} \qquad \Rightarrow e = \frac{-2}{a+1}$$

Si: $a = 0 \Rightarrow e = -2$

$a = 1 \Rightarrow e = -1$

$a = -2 \Rightarrow e = 2$

Se observa que "e" depende de "a", por lo que habría más de un elemento neutro, y ya sabemos que por definición el elemento neutro es único. Por lo tanto, se concluye que la operación no tiene elemento neutro.

En tablas :

*	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

La operación mostrada en la tabla, ¿tiene elemento neutro?

Para determinar si tiene elemento neutro utilizaremos EL CRITERIO DE LA INTERSECCIÓN.

Criterio de intersección columna – fila

1. Ubicar, en el cuerpo de la tabla, una columna igual a la columna de entrada y una fila igual a la fila de entrada.
2. La intersección de la columna y fila mencionadas nos dará el elemento neutro (e).

Veamos:

*	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Filas iguales

Columnas iguales

Observando la intersección, concluimos que e=b

Ejemplo 6

¿Tiene elemento neutro (e), la siguiente tabla?

*	2	4	6
2	4	6	2
4	2	6	4
6	2	4	6

Resolución:

*	2	4	6
2	4	6	2
4	6	2	4
6	2	4	6

$\Rightarrow$ $e = 6$

4. ELEMENTO INVERSO (a^{-1})

En una operación con elemento neutro, tenemos un elemento "a" $\in$ A, de modo que para él existe un elemento $a^{-1} \in A$ tal que al ser operado, tanto a la derecha como a la izquierda de "a", da como resultado el elemento neutro de la operación. Dicho elemento a^{-1} es denominado **elemento inverso** de "a".

Dado $e \in A$, $\forall a \in A$, $\exists a^{-1} \in A$ / $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

e : elemento neutro

a^{-1} : elemento inverso de a

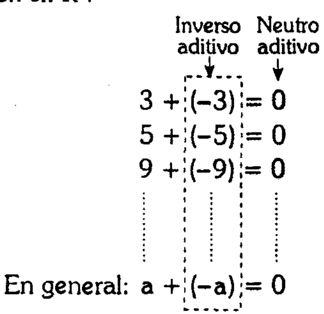
Observación:

Se usa el símbolo a^{-1} para denotar al elemento inverso de a y no debe confundirse esto con la definición de exponente negativo.

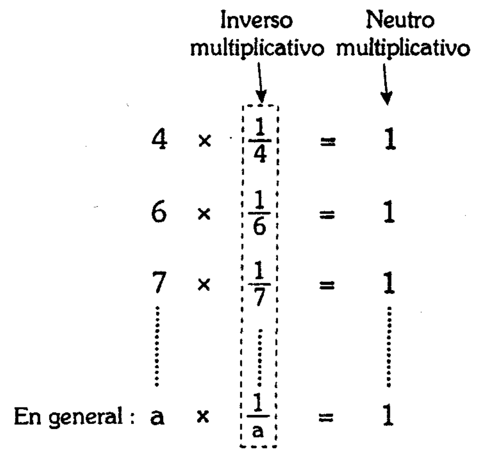
Luego : a^{-1} no necesariamente es $\frac{1}{a}$

Ejemplo 1

La adición en $\mathbb{R}$:



La multiplicación en $\mathbb{R}$



Ejemplo 2

Se define en $\mathbb{R}$: $a \# b = a + b - 6$

a^{-1} : elemento inverso de "a"

Calcule : 3^{-1}

Resolución:

Primero hallamos "e":

$a \# e = a$

$a + e - 6 = a \Rightarrow e = 6$

Luego calculamos "a^{-1}" :

$a \# a^{-1} = e$

$a + a^{-1} - 6 = 6 \Rightarrow \boxed{a^{-1} = 12 - a}$

$\therefore\ 3^{-1} = 12 - 3 = 9$

Ejemplo 3

Se define en $\mathbb{R}^{*}$: $\quad a \,!\, b = \dfrac{2ab}{3}$

a^{-1} : elemento inverso de "a"

Calcule : 4^{-1}

Resolución:

Hallamos "e"

$\underbrace{a \,!\, e} = a$

$\dfrac{2ae}{3} = a \Rightarrow e = \dfrac{3}{2}$

Aplicamos definición de inverso:

$\underbrace{a \,!\, a^{-1}} = e$

$\dfrac{2a \,.\, a^{-1}}{3} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a^{-1} = \dfrac{9}{4a}}$

$\therefore\ 4^{-1} = \dfrac{9}{4(4)} = \dfrac{9}{16}$

Ejemplo 4

De acuerdo a la operación mostrada en la siguiente tabla definida en A = {a,b,c}

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

n^{-1} : elemento inverso de "n"

Calcule : a^{-1} ; b^{-1} ; c^{-1}

Resolución:

Primero hallamos "e" :

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$\Rightarrow$ (e = c)

Por definición de inversas $\Rightarrow$ $a * a^{-1} = c \quad b * b^{-1} = c \quad c * c^{-1} = c$

De la tabla $\Rightarrow$ $\underbrace{a * b = c} \quad \underbrace{b * a = c} \quad \underbrace{c * c = c}$

$\therefore\ a^{-1} = b \quad b^{-1} = a \quad c^{-1} = c$

Ejemplo 5

Se define en A = {1,3,5,7} la operación θ, mediante la siguiente tabla :

θ	1	3	5	7
1	5	7	1	3
3	7	1	3	5
5	1	3	5	7
7	3	5	7	1

a^{-1} : elemento inverso de "a".

Calcule : 1^{-1} ; 3^{-1} ; 5^{-1} ; 7^{-1}

Resolución:

Primero hallamos "e" :

θ	1	3	5	7
1	5	7	1	3
3	7	1	3	5
5	1	3	5	7
7	3	5	7	1

$\Rightarrow$ (e = 5)

Por definición de inversos $\Rightarrow$ $1\,\theta\,1^{-1} = 5 \quad 3\,\theta\,3^{-1} = 5 \quad 5\,\theta\,5^{-1} = 5 \quad 7\,\theta\,7^{-1} = 5$

De la tabla $\Rightarrow$ $\underbrace{1\,\theta\,1 = 5} \quad \underbrace{3\,\theta\,7 = 5} \quad \underbrace{5\,\theta\,5 = 5} \quad \underbrace{7\,\theta\,3 = 5}$

$\therefore\ 1^{-1} = 1 \quad 3^{-1} = 7 \quad 5^{-1} = 5 \quad 7^{-1} = 3$

Ejemplo 6

Se define en **N** una operación representada por *, mediante la siguiente tabla:

*	2	3	4	5
2	10	12	14	16
3	13	15	17	19
4	16	18	20	22
5	19	21	23	25

Calcule : 9*8

Resolución:

Notamos que los elementos de la tabla presentan una cierta formación; por lo tanto, la deducimos tomando algunas operaciones de la tabla. Observamos :

$$2*3 = 3(2) + 2(3) = 12$$
$$2*4 = 3(2) + 2(4) = 14$$
$$3*2 = 3(3) + 2(2) = 13$$
$$3*5 = 3(3) + 2(5) = 19$$

Notamos que : $m*n = 3m + 2n$

$$\therefore \quad 9*8 = 3(9) + 2(8) = 43$$

Ejemplo 7

Se define una operación mediante la tabla :

*	1	2	3	4
1	3	5	7	9
2	7	9	11	13
3	11	13	15	17
4	15	17	19	21

Calcule : $21*20$

Resolución:

Al igual que en el ejemplo anterior, deduzcamos la formación que presenta la tabla :

$$1*2 = 4(1) + 2(2) - 3 = 5$$
$$1*4 = 4(1) + 2(4) - 3 = 9$$
$$2*1 = 4(2) + 2(1) - 3 = 7$$
$$2*3 = 4(2) + 2(3) - 3 = 11$$
$$3*2 = 4(3) + 2(2) - 3 = 13$$
$$3*4 = 4(3) + 2(4) - 3 = 17$$

Luego : $a*b = 4a + 2b - 3$

Entonces : $21*20 = 4(21) + 2(20) - 3$
$= 84 + 40 - 3$

$$\therefore \ 21*80 = 121$$

Ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1

Se define en **Z** :

$a*b = 3a - 2b + 5$

Calcule : $4*2$

Resolución:

$a*b = 3a - 2b + 5$

↓ ↓

$4*2 = 3(4) - 2(2) + 5 = 13$

Ejemplo 2

Definimos en Q : $m\#n = \dfrac{3m - n}{m + n}$

Calcule : $4\#4$

Resolución:

$$\therefore \ 4\#4 = \frac{3(4) - 4}{4 + 4} = \frac{8}{8} = 1$$

Ejemplo 3

Se define una operación matemática en **R**, representada por Δ :

$$a\Delta b = \frac{a^3 + 2b^2}{8b - 3a}$$

Calcule : $E = 3\Delta 2$

Resolución:

$$E = 3\Delta 2 = \frac{3^3 + 2(2)^2}{8(2) - 3(3)} = \frac{35}{7} = 5$$

Ejemplo 4

Si : $a*b = 3(\underline{b*a}) - 5b$

Calcule : $E = (7*5) + \dfrac{3}{4}$

Resolución:

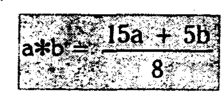
Buscamos b*a

$\underline{b*a} = 3(a*b) - 5a$

Reemplazando :

$a*b = 3[3(a*b) - 5a] - 5b = 9(a*b) - 15a - 5b$

Despejando :



$$a*b = \frac{15a + 5b}{8}$$

Aplicamos esta definición en E

$$\Rightarrow \; E = (7*5) + \frac{3}{4}$$

$$E = \frac{15(7) + 5(5)}{8} + \frac{3}{4}$$

$\therefore$ E=17

Ejemplo 5

Se define en el conjunto de los números naturales:

$$\sqrt[3]{x^2} \;\#\; \sqrt[y-1]{y^{y+1}} = \left(\sqrt[y]{x}\right)^2$$

Calcule : E = 4 # 9

Resolución:

Para poder reemplazar los valores de "x" e "y" en la regla de definición dada, debemos, previamente, darle forma a la expresión E; así:

E = 4 # 9

$$\therefore\; E = \sqrt[3]{8^2} \;\#\; \sqrt[3-1]{3^{3+1}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$$

Ejemplo 6

Se define : $R*S = 4R^2 + 3$

Calcule : 6*[7#(8#(9# ...))]

Resolución:

Observamos que la regla de definición no depende del segundo elemento (S), luego :

$$E = 6*\underbrace{[7\,\#\,(8\#\,(9\,\#\,...))]}_{S}$$

$$\therefore\; E = 6 * S = 4(6)^2 + 3 = 147$$

Ejemplo 7

Si : $a*b = \begin{cases} 5a - 3b \;;\; a < b \;.....\; (i) \\ 3b - 5a \;;\; a \geq b \;.....\; (ii) \end{cases}$

Calcule : A = (2*1) *(1*2)

Resolución:

2*1 = ??? .... caso (ii) ; pues: 2 > 1

$\Rightarrow$ 2*1 = 3(1) – 5(2) = –7

1*2 = ??? .... caso (i) ; pues: 1< 2

$\Rightarrow$ 1* 2 = 5(1) – 3(2) = –1

Reemplazando, tenemos :

A = (2*1) * (1*2)

A = –7 * – 1 ...... caso (i) pues: –7 < –1

A = 5(–7) – 3(–1)

$\therefore$ A = –32

Ejemplo 8

Se define : $x*y = ax^2 - xy$

En una aplicación se obtuvo : 2*1 = 10

Halle "b", si 3*b = 0

Resolución:

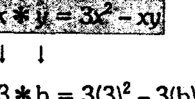
$x*y = ax^2 - xy$

Por dato :

$2*1 = a(2)^2 - (2)(1) = 10$

a = 3

Luego :



$$x * y = 3x^2 - xy$$

↓ ↓

$$\Rightarrow\; 3 * b = 3(3)^2 - 3(b) = 0$$

$\therefore$ b = 9

EJERCICIO 1

Si: $x*y = \dfrac{x^2 - xy}{x - y} - 1; x \neq y \;\; ; \;\; xy \neq 0$

Calcule: $8*(8*(8*(8* \ldots)))$

Resolución:

Observamos que se puede reducir términos en la regla de definición:

$$x*y = \frac{x^2 - xy}{(x - y)} - 1$$

$$x*y = \frac{x\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}} - 1$$

$$x*y = x - 1$$

Nota:

Se aprecia que la regla de definición depende únicamente de x (1er. elemento); el 2do. elemento no interviene en los cálculos.

Ahora veamos lo que nos piden :

$$\underbrace{8}_{x} * \underbrace{(8*(8*\ldots))}_{y} = 8 - 1 = 7$$

EJERCICIO 2

Si: $\dfrac{a}{b} \triangle \dfrac{c}{d} = \dfrac{a + \dfrac{1}{b}}{c + \dfrac{1}{d}}$ $\quad b \neq 0$, $d \neq 0$

Calcule :

$$A = \left(\frac{n-1}{n}\right) \triangle \left[\left(\frac{n-1}{n}\right) \triangle \left(\frac{n}{n-1}\right)\right]$$

Resolución:

Primero hallamos lo que está dentro del corchete de la expresión A:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) \triangle \left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{n - 1 + \dfrac{1}{n}}{n + \dfrac{1}{n-1}} = \frac{\dfrac{n^2 - n + 1}{n}}{\dfrac{n^2 - n + 1}{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{n}$$

Reemplazamos lo encontrado en la expresión A y nos queda :

$$A = \left(\frac{n-1}{n}\right) \triangle \left[\frac{n-1}{n}\right]$$

Entonces, operando :

$$A = \frac{n - 1 + \dfrac{1}{n}}{n - 1 + \dfrac{1}{n}} = 1 \quad \therefore A = 1$$

EJERCICIO 3

Si: $(b*a)^2 = a(a*b) \;\; ; \;\; a*b > 0,$

Halle : $E = 24*3$

Resolución:

De la expresión dada:

$$a(a*b) = (b*a)^2 \rightarrow a*b = \frac{(b*a)^2}{a} \; \ldots\ldots \; (I)$$

Cambiamos el orden de los elementos y obtenemos:

$$b*a = \frac{(a*b)^2}{b}$$

Reemplazando la expresión hallada para b∗a en la expresión (I) tendremos:

$$a*b = \frac{(b*a)^2}{a} = \frac{\left(\frac{(a*b)^2}{b}\right)^2}{a} = \frac{(a*b)^4}{b^2 \cdot a}$$

Luego: $a*b = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$

Entonces: $E = 24*3 = \sqrt[3]{24 \cdot 3^2} = 6$

EJERCICIO 4

Definimos: $a*b = 2(b*a) + a-b$, según esta definición, calcule $12*3$

Resolución:

Se tiene $a*b = 2(b*a) + a-b$

Calculamos "b∗a", invirtiendo el orden de los elementos, y obtenemos:

$$b*a = 2(a*b) + b - a$$

Reemplazando, en la expresión que nos dio el problema, tenemos :

$$a*b = 2\ (\mathbf{2(a*b) + b - a}) + a - b$$

$$a*b = 4(a*b) + 2b - 2a + a - b$$

Simplificando :

$$a*b = 4(a*b) + b - a \quad \Rightarrow a*b = \frac{a-b}{3}$$

$$\therefore \quad 12*3 = \frac{12-3}{3} = 3$$

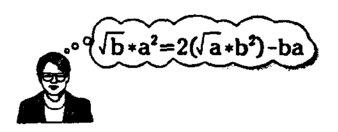
EJERCICIO 5

Sabemos que se cumple:

$$\sqrt{a} * b^2 = 2\left(\sqrt{b} * a^2\right) - ab; \text{ calcule: } \frac{\sqrt[4]{3} * 2}{\sqrt{6}}$$

Resolución:

Como: $\sqrt{a}*b^2 = 2(\sqrt{\mathbf{b}}\mathbf{*a^2}) - ab$, calcularemos la expresión en negrita.



Reemplazaremos esta expresión en la igualdad dada. Así tendremos:

$$\sqrt{a}*b^2 = 2[2(\sqrt{\mathbf{a}}\mathbf{*b^2}) - \mathbf{ba}] - ab = 4(\sqrt{a}*b^2) - 3ab$$

Luego: $\sqrt{a}*b^2 = 4(\sqrt{a}*b^2) - 3ab$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a}*b^2 = ab$$

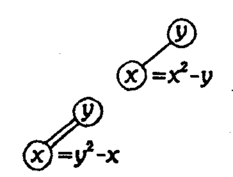
Nos piden:

$$\frac{\sqrt[4]{3} * 2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}} * (\sqrt{2})^2}{\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{3})(\sqrt{2})}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 1$$

Le damos forma adecuada Por definición

EJERCICIO 6

Si:



Además:

(m)—(3) = −((5)═(m)) + 10

Calcule : m, si $m \in \mathbb{Z}^+$

Resolución:

(m)—(3) = −((5)═(m)) + 10

Aplicando la definición. — Según su regla de definición.

$$m^2 - 3 = -(m^2 - 5) + 10$$

Reduciendo: $m^2 - 3 = -m^2 + 5 + 10$

$2m^2 = 18 \rightarrow m^2 = 9$

Luego : $m = \pm 3$, desechamos: $m = -3$, por la condición: $m \in \mathbf{Z}^+$

$\therefore\ m = 3$

EJERCICIO 7

Si: $a*b = \dfrac{(b*a)^2}{5}$, además $a*b > 0$

Halle: $2*3$

Resolución:

$$a*b = \frac{(b*a)^2}{5} \qquad b*a = \frac{(a*b)^2}{5}$$

Reemplazando:

$$a*b = \frac{(b*a)^2}{5} = \frac{\left(\dfrac{(a*b)^2}{5}\right)^2}{5} = \frac{(a*b)^4}{125}$$

Reduciendo: $a*b = \dfrac{(a*b)^4}{125}$

Queda: $a*b = 5$

Observamos que la regla de definición se reduce a una constante y no depende ni de a ni de b, es decir, cualquiera que sean los valores de a y b, el resultado siempre será el mismo: 5.

Luego: $2*3 = 5$

EJERCICIO 8

Si se sabe que: $24 * 15 = 3$

$49 * 26 = 24$

$18 * 23 = 2$

$\overline{a5} * \overline{3b} = 8$

Calcule: $N = \dfrac{\overline{bb} * \overline{ab}}{\overline{ba} * \overline{aa}}$; si: $a \neq b$

Resolución:

En esta clase de ejercicio tendremos que deducir cuál es la regla de definición de la operación simbolizada por $*$. Esto no siempre es fácil y tendrás que hacer mucho uso de tu ingenio y creatividad para poder llevarlo a cabo. Una vez descubierta la regla quizás pensarás que era evidente y preguntarás cómo era posible que no la descubrieras antes. Bien, veamos:

$24 * 15 = 2 \times 4 - 1 \times 5 = 3$

$49 * 26 = 4 \times 9 - 2 \times 6 = 24$

$18 * 23 = 1 \times 8 - 2 \times 3 = 2$

$\overline{a5} * \overline{3b} = a \times 5 - 3 \times b = 8$

$5a - 3b = 8$

4 4 No se cumple, pues debe ocurrir: $a \neq b$

7 9 sí cumple:

$\Rightarrow a = 7 \wedge b = 9$

Luego: $N = \dfrac{\overline{bb} * \overline{ab}}{\overline{ba} * \overline{aa}} = \dfrac{99 * 79}{97 * 77}$

$$N = \frac{9 \times 9 - 7 \times 9}{9 \times 7 - 7 \times 7} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$$

$$\therefore\ N = \frac{9}{7}$$

EJERCICIO 9

Se define:

$$\overline{a}\lfloor\underline{b} = \begin{cases} (a^{-b}) \times (-b^{-a}) & ; \text{ Si: } a < b \\ (a^{-a}) \times (-b^{-b}) & ; \text{ Si: } a \geq b \end{cases}$$

Halle: $E = \left(\overline{2}\lfloor\underline{-2}\right) - \left(\overline{-2}\lfloor\underline{2}\right)$

Resolución:

Esta definición es condicionada, es decir:

i. Si $a < b$

$\overline{a|}\underline{b} = (a^{-b})\times(-b^{-a})$

$-2 < 2$

II. Si $a \geq b$

$\overline{a|}\underline{b} = (a^{-a}) \times (-b^{-b})$

$2 \geq -2$

$\Rightarrow \overline{-2|}\underline{2} = (-2^{-2})\times(-2^{2})$ $\quad \overline{2|}\underline{-2} = (-2^{-2})\times(-(-2)^{-(-2)})$

$\overline{-2|}\underline{2} = -\frac{1}{4}\times -4 = 1$ $\quad \overline{-2|}\underline{2} = \frac{1}{4}\times -4 = -1$

Nos piden :

$E = (\overline{2|}\underline{-2}) - (\overline{-2|}\underline{2}) = -1 - 1 = -2$

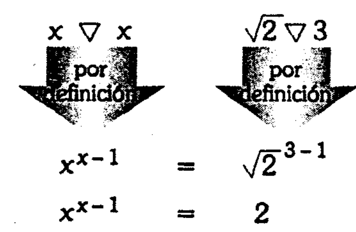
$\therefore\ E = -2$

EJERCICIO 10

Se define: $a\nabla b = a^{b-1}$; halle x,

si: $x\nabla x = \sqrt{2}\ \nabla\ 3$

Resolución:



$x\ \nabla\ x \qquad \sqrt{2}\ \nabla\ 3$

$x^{x-1} = \sqrt{2}^{\,3-1}$

$x^{x-1} = 2$

Dándole forma y comparando :

$x^{x-1} = 2^{2-1}$ $\qquad \therefore\ x = 2$

EJERCICIO 11

Para todo número real, definimos $ⓧ$, como: $ⓧ = x^2 - 1$. Según esto, ¿cuál es el resultado al efectuar el producto de ③ por ④?

Resolución:

$ⓧ = x^2 - 1$

③ $= 3^2 - 1 = 8$
④ $= 4^2 - 1 = 15$ } luego ③ × ④ $= 8 \times 15$

$\therefore$ ③ × ④ $= 120$

EJERCICIO 12

Si: $\frac{m}{4}\theta n = \frac{m-4n}{nm}$

Calcule: $M = \left(\frac{1}{3}\theta\frac{2}{3}\right)\theta\frac{6}{5}$

Resolución:

Hacer lo siguiente:

Sea : $p = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 4p$

Ahora, en la regla de definición:

$p\theta n = \frac{4p - 4n}{4pn} \Rightarrow p\theta n = \frac{p-n}{pn}$

Regla de definición

Trabajamos con esta regla ya que sólo hemos acomodado los términos. En lo que nos piden, primero hallamos lo que está entre paréntesis.

$$\frac{1}{3}\theta\frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}\theta\frac{2}{3} = -\frac{3}{2}$$

Ahora :

$$M = \left(-\frac{3}{2}\right)\theta\frac{6}{5} = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{6}{5}}{-\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}} = \frac{-\frac{27}{10}}{-\frac{18}{10}}$$

$M = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$ $\qquad \therefore\ M = \frac{3}{2}$

EJERCICIO 13

Si $a * b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

además: $m \# n = n^m$

Calcule: $A = \left(\dfrac{1}{3}\right) \# (102 * 38)$

Resolución:

Observemos detenidamente la definición del operador (*); ... te darás cuenta de que hay algo que se puede cancelar.

Veamos:

$$a * b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}{\cancel{(a^2+ab+b^2)}}$$

Luego: $a * b = a - b$

$$A = \left(\frac{1}{3}\right) \# (102 * 38)$$

$$A = \left(\frac{1}{3}\right) \# (102 - 38)$$

$$A = \frac{1}{3} \# 64$$

$$A = 64^{\frac{1}{3}} \qquad \therefore\ A = 4$$

EJERCICIO 14

Si: $P\left(\dfrac{x}{y}\right) = P_{(x)} - P_{(y)}$, calcule $P_{(4)} / P_{(2)}$

Resolución:

En la regla de definición, si hacemos:

$x = 4\ ;\ y = 2 \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 2;$ vemos que el cociente está relacionado con lo que nos piden.

Veamos :

$$P_{\left(\frac{4}{2}\right)} = P_{(4)} - P_{(2)}$$

$$P_{(2)} = P_{(4)} - P_{(2)}$$

$$2P_{(2)} = P_{(4)}$$

$$\therefore\ \frac{P_{(4)}}{P_{(2)}} = 2$$

EJERCICIO 15

Si : $P(x+1) = x^2+3x+2$, hallar "y"

Además : $P_{(P(y))} = 42$

Resolución:

Factorizamos el 2do. miembro

$$P(x+1) = \underbrace{x^2 + 3x + 2}_{(x+1)(x+2)} \rightarrow P(x+1) = (x+1)(x+2)$$

Observamos que el valor del operador ("P") está dado por el producto de 2 números consecutivos, y el índice ("x+1") es el menor de estos 2 números.

$$P_{(P(y))} = 42 = 6 \times 7 \Rightarrow P_{(y)} = 6$$

Ahora :

$$P_{(y)} = 6 = 2 \times 3$$

$$\therefore\ y = 2$$

EJERCICIO 16

Si: $|x|$: valor absoluto de "x"

Halle: $|2abc|$; si $ac < 0$ y $b > 0$

Resolución:

Por definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x;\ x > 0 \\ -x;\ x < 0 \end{cases}$$

Luego:

Observamos que : $2abc = 2(ac)b$

Además, si : $ac < 0$ y $b > 0 \Rightarrow acb < 0$

Por lo que el producto 2abc es negativo.

$\Rightarrow |2abc| = -2abc$

EJERCICIO 17

Si: $[x]$: máximo entero de "x", hallar $P_{(2)}$ en:

$$P(a) = \frac{-[2,5]+[-2,5]-[-0,1]+a^2}{a+[-1,08]}$$

Resolución:

Definición de máximo entero:

$[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

$\forall x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}$

Ejemplos:

- $[2,5] = 2$ porque $2 \leq 2,5 < 3$
- $[-2,5] = -3$ porque $-3 \leq -2,5 < -2$
- $[-0,1] = -1$ porque $-1 \leq -0,1 < 0$
- $[-1,08] = -2$ porque $-2 \leq -1,08 < -1$

Luego:

$$P(a) = \frac{-(2)+(-3)-(-1)+a^2}{a+(-2)} = \frac{a^2-4}{a-2}$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a-2}$$

Por teoría sabemos que la división entre cero (0) no está definida, y como lo que nos piden es: $P_{(2)}$, (es decir el valor de "a" debe ser 2); entonces estaríamos en un caso de división entre cero, y como ello no está definido, entonces hallaremos el valor límite de $P_{(2)}$, es decir, el valor que tome "P(a)" cuando "a" se aproxima a 2, sin llegar a tomar este valor.

Luego: $P_{(a)} = \frac{(a+2)\cancel{(a-2)}}{\cancel{a-2}} = a+2$

$\therefore\ P_{(2)} = 2+2 = 4$

EJERCICIO 18

Si $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z}$, hallar F(–3) en:

$$F(a) = \frac{a^2+[3,2]+[-2,8]+[-8,01]}{a+[0,95]-[-3,4]-1}$$

Resolución:

Como ya sabemos calcular el máximo entero, entonces ahora lo haremos más rápido:

$[3,2] = 3$ $[-8,01] = -9$ $[-3,4] = -4$

$[-2,8] = -3$ $[0,95] = 0$

Reemplazando:

$$F_{(a)} = \frac{a^2+\cancel{(3)}+\cancel{(-3)}+(-9)}{a+(0)-(-4)-1} \rightarrow F_{(a)} = \frac{a^2-9}{a+3}$$

$$\rightarrow F_{(a)} = \frac{(a-3)(a+3)}{(a+3)}$$

De manera similar al problema anterior, lo que nos piden es el valor de $F_{(-3)}$, lo cual haría que tengamos una división entre cero; por lo tanto, lo que hallaremos sólo será un valor límite, es decir, cuando "a" tiende a –3.

Entonces:

$$F_{(a)} = \frac{(a-3)\cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)}} = a-3\ ;\ \forall a \neq -3$$

$$F_{(-3)} = -3-3 = -6$$

$$\therefore\ F_{(-3)} = -6$$

EJERCICIO 19

Si : $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$

$\forall x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{Z}$

Resolver: $[3x+5] = 2x+7$

Resolución:

De acuerdo a la definición:

$[3x+5] = 2x+7 \Leftrightarrow 2x+7 \leq 3x+5 < (2x+7)+1$

$\Rightarrow 2x+7 \leq 3x+5 < 2x+8$

Luego: $2x+7 \leq 3x+5 \quad \wedge \quad 3x+5 < 2x+8$

$2 \leq x \quad \wedge \quad x < 3$

Entonces: $2 \leq x < 3$; recuerda que: $2x+7 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 11 \leq \underbrace{2x+7}_{\in \mathbb{Z}} < 13$; los únicos son 11 y 12

Para los cuales: $x = 2$ y $\frac{5}{2}$

$$\therefore\ x = 2\ ;\ \frac{5}{2}$$

EJERCICIO 20

Se define:

$$\textcircled{2x} = \triangle{x} + x - 1$$

$$\triangle{x-1} = 2\,\textcircled{x+5} - x + 3$$

Calcule: $\textcircled{12}$

Resolución:

Nos piden: $\textcircled{12} = \textcircled{2(6)}$

Acomodando:

$$\textcircled{2(6)} = \triangle{6} + 6 - 1 \ \text{..... por definición de } \textcircled{2x}$$

$$\Rightarrow \textcircled{12} = \triangle{6} + 5 \ \text{......... (I)}$$

Luego:

$$\triangle{6} = \triangle{7-1} = 2\,\textcircled{7+5} - 7 + 3 \ \text{...... por definición de } \triangle{x-1}$$

$$\Rightarrow \triangle{6} = 2\,\textcircled{12} - 4 \ \text{........ (II)}$$

Reemplazando (II) en (I) :

$$\textcircled{12} = \triangle{6} + 5$$

$$\textcircled{12} = \left(2\,\textcircled{12} - 4\right) + 5$$

$$\therefore\ \textcircled{12} = -1$$

EJERCICIO 21

Si: $\boxed{x} = 2\triangle{x}\ \wedge\ \triangle{n+1} = n$

Calcule: $A = \boxed{3} + \boxed{4} - \boxed{5}$

Resolución:

Desarrollando las definiciones:

$$\boxed{x} = 2\triangle{x} \ \text{...... (I)}$$

$$\triangle{x} = \triangle{(x-1)+1}$$

por definición ↓

$$\triangle{x} = x - 1 \ \text{... (II)}$$

Reemplazando (II) en (I) :

$$\boxed{x} = 2(x-1)$$

Luego:

$$\boxed{3} = 2(3-1) = 4$$

$$\boxed{4} = 2(4-1) = 6$$

$$\boxed{5} = 2(5-1) = 8$$

Entonces:

$$A = \underbrace{\boxed{3}}_{} + \underbrace{\boxed{4}}_{} - \underbrace{\boxed{5}}_{}$$

$$A = 4 + 6 - 8$$

$$\therefore\ A = 2$$

EJERCICIO 22

Si: $\boxed{x^3+1} = 14x$

Calcule "a" en: $\boxed{\boxed{2a+1}} = 42$

Resolución:

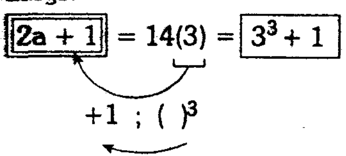
De la definición:

$$14\,x = \boxed{x^3 + 1}$$

$(\ )^3;\ +1$

Primero se eleva al cubo y luego se le agrega 1

Luego:



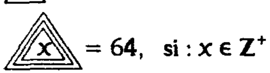
$\boxed{2a+1} = 3^3 + 1 = 28 = 14(2) = \boxed{2^3+1}$

Se deduce que:

$\Rightarrow \; 2a+1 = 2^3+1 \quad \therefore \; a = 4$

EJERCICIO 23

$\triangle n = (n-1)^2$, hallar "x" en:

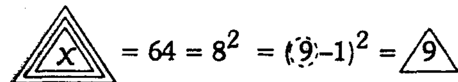


Resolución:

En la definición :

$$(n - 1)^2 = \triangle n$$

Tomando:



se deduce que :

$$\triangle\triangle x = 9 = 3^2 = (4-1)^2 = \triangle 4$$

se deduce que :

$$\triangle x = 4 = 2^2 = (3-1)^2 = \triangle 3$$

$$\therefore \; x = 3$$

EJERCICIO 24

Si: $\boxed{n} = \dfrac{2n+5}{3} - \dfrac{n+1}{4}$

además: $\boxed{x} = 1{,}5$

Hallar: $E = 5x^2 + 1$

Resolución:

Por definición: $\boxed{x} = \dfrac{2x+5}{3} - \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{3}{2}$

$$\Rightarrow \; x = \frac{1}{5}$$

Luego: $E = 5x^2+1 \rightarrow E = 5\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 1 = \dfrac{6}{5}$

$$\therefore \; E = \frac{6}{5}$$

EJERCICIO 25

Se define, en el conjunto Q, la operación representada por $*$ mediante:

$a * b = a+b+1$; probar que esta operación es asociativa.

Resolución:

Debemos probar que : $(a*b)*c = a*(b*c)$

Veamos : $(a*b)*c = (a+b+1)*c$
$= (a+b+1) + c+1$
$= a + 1 + (b+c+1)$
$= a + (b+c+1) + 1$
$= a + (b*c) + 1$
$= a*(b*c)$

$$\therefore \; (a*b)*c = a*(b*c)$$

EJERCICIO 26

Dado un conjunto no vacío A y una ley de composición interna definida en él mediante la siguiente regla: $a * b = b \quad \forall \, a, b \in A$; probar que la operación es asociativa.

Resolución:

Veamos :

$$\underbrace{(a * b)} * c = a * \underbrace{(b * c)}$$

En efecto: $\underbrace{b * c}_{c} = \underbrace{a * c}_{c}$

$c = c$

$$\therefore \; (a*b)*c = a*(b*c)$$

EJERCICIO 27

¿Es conmutativa la operación definida en el conjunto A = {1;2;3;4} mediante la siguiente tabla?

Resolución:

*	1	2	3	4
2	3	4	1	2
4	1	2	3	4
1	2	3	4	1
3	4	1	2	3

Observación:

Recuerda que para trazar la diagonal principal y observar la simetría los elementos de la columna y la fila de entrada deben estar en el mismo orden.

Ordenando la columna de entrada:

*	1	2	3	4
2	3	4	1	2
4	1	2	3	4
1	2	3	4	1
3	4	1	2	3

Quedaría así:

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Observamos que hay simetría.
Luego; la operación es conmutativa.

EJERCICIO 28

Verifica, por simple inspección, si la operación definida mediante la siguiente tabla es conmutativa o no:

*	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2
6	6	8	4	2
8	8	2	4	6

Resolución:

Se observa que la columna y la fila de entrada están en el mismo orden, y aparentemente es simétrica; pero si observas bien te darás cuenta que no es así:

*	2	4	6	8
2	2	4	6	8
4	4	6	8	2
6	6	8	4	②
8	8	2	④	6

Elementos colocados simetricamente no son iguales

∴ No es conmutativa

EJERCICIO 29

En el conjunto A = {0,1,2,3} se define la operación, representada por *, mediante la siguiente tabla:

*	0	1	2	3
0	3	0	1	2
1	0	1	2	3
2	1	2	3	0
3	2	0	3	1

Verificar si la operación (*) es conmutativa o no

Resolución:

Como se puede ver, la tabla está ordenada adecuadamente, así que ahora:

Trazamos la diagonal:

*	0	1	2	3
0	3	0	1	2
1	0	1	2	3
2	1	2	3	⓪
3	2	0	③	1

Elementos colocados simétricamente no son iguales

Al analizar los elementos que están colocados simétricamente, respecto a la diagonal, en uno de los casos (el indicado en la tabla) se observa que los elementos no son iguales; por lo tanto, la operación no es conmutativa.

EJERCICIO 30

Sea el conjunto A de los puntos de un plano y $\mathscr{C}$ la construcción geométrica que hace corresponder a dos puntos cualesquiera P y Q de este plano un tercer punto C, obtenido de la siguiente manera:

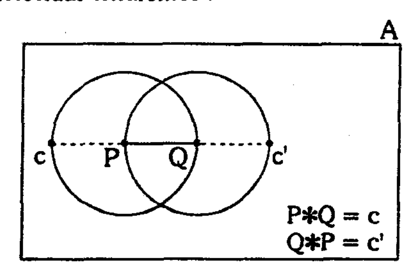
I) Se traza la circunferencia con centro en P y radio $\overline{PQ}$.

II) En esta circunferencia, el punto construido C es el punto diametralmente opuesto a Q.

¿Se cumple la propiedad conmutativa?

Resolución:

Construyendo el gráfico según las condiciones establecidas tendremos :



De acuerdo a esto, la construcción P ∗ Q no da el mismo resultado que la construcción Q ∗ P; como puede apreciarse en la figura, la construcción $\mathscr{C}$ es una ley de composición interna en el conjunto A, pero no cumple la propiedad conmutativa.

EJERCICIO 31

Consideremos la operación ∗ definida en el conjunto A = {1; 2; 3; 4}, mediante la siguiente tabla:

∗	1	2	3	4
2	4	1	2	3
4	2	3	4	1
1	3	4	1	2
3	1	2	3	4

I) ¿Es cerrada la operación?
II) ¿La operación dada es conmutativa?
III) Hallar; si es que existe; el elemento neutro.

Resolución:

I) Observando el cuerpo de la tabla se notará que todos y cada uno de los elementos en ella pertenecen al conjunto A.

∴ la operación es cerrada en dicho conjunto.

II) Veamos la conmutatividad mediante el criterio de la diagonal:

∗	1	2	3	4
2	4	1	2	3
4	2	3	4	1
1	3	4	1	2
3	1	2	3	4

Ordenando la tabla

∗	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Notamos rápidamente que hay simetría o que los elementos están ubicados simétricamente, respecto a la diagonal

∴ la operación es conmutativa.

III) Buscando el elemento neutro:

Para hallar el elemento neutro en tablas haremos uso del siguiente criterio :

1. Se verifica que la operación sea conmutativa.
2. En el cuerpo de la tabla se buscan: una fila igual a la fila de entrada y una columna igual a la columna de entrada. Donde se intersecten, se encontrará el elemento neutro "e".

En la tabla ordenada, procedemos:

∗	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

columna igual a la columna de entrada.
elemento neutro
fila igual a la fila de entrada

En la intersección mostrada hallamos el elemento neutro. Así: e = 3

EJERCICIO 32

Se define en el conjunto A = {0; 2; 4; 6}la operación ∗ mediante la tabla dada. Halle el elemento neutro.

∗	0	2	4	6
0	2	4	6	0
2	4	6	0	2
4	6	0	2	4
6	0	2	4	6

Resolución:

∗	0	2	4	6
0	2	4	6	0
2	4	6	0	2
4	6	0	2	4
6	0	2	4	6

columna igual a la columna de entrada.

elemento neutro

fila igual a la fila de entrada

Por lo que observamos $e = 6$

EJERCICIO 33

Se define, en Q, la operación representada por A

mediante: $a \triangle b = \frac{a.b}{3}$

Halle el valor de: $A = 3^{-1} + 6^{-1} - 9^{-1}$

Donde "a^{-1}" es el elemento inverso de "a"

Resolución:

Antes de calcular lo que se pide daremos unas recomendaciones:

I. Se verifican rápidamente la cerradura y la conmutatividad de la operación.

II. Se busca el elemento neutro, si es que existe.

III. Una vez hallado el neutro se busca los elementos inversos, según la definición.

Ahora sí, empezamos hallando el elemento neutro (e):

$$a \triangle e = a$$

$$\frac{ae}{3} = a \Rightarrow e = 3$$

Luego, hallamos el elemento inverso de una cantidad cualquiera "a":

$$a^{-1} \triangle a = e$$

$$\frac{a^{-1} \times a}{3} = 3 \longrightarrow a^{-1} = \frac{9}{a}$$

$$A = 3^{-1} + 6^{-1} + 9^{-1}$$

$$A = \frac{9}{3} + \frac{9}{6} + \frac{9}{9} = 5,5$$

$$\therefore A = 5,5$$

EJERCICIO 34

Se define: $a \,\theta\, b = a + b - 4$

Halle: $M = (2^{-1} \,\theta\, 4)^{-1} \,\theta\, (6^{-1} \,\theta\, 8)^{-1}$

Donde a^{-1} es elemento inverso de "a"

Resolución:

Por definición de elemento inverso: $a \,\theta\, a^{-1} = e$, entonces primero debemos conocer el elemento neutro.

Luego:

$\rightarrow$ $a\theta e = a$ $\quad a\theta a^{-1} = e$

Luego: $a \,\theta\, e = a$

$$\not{a} + e - 4 = \not{a} \Rightarrow e = 4$$

Reemplazando:

$$a \,\theta\, a^{-1} = 4$$

$$a + a^{-1} - 4 = 4 \rightarrow a^{-1} = 8 - a$$

Entonces: $2^{-1} = 8-2 = 6$

$6^{-1} = 8-6 = 2$

$$M = (2^{-1} \,\theta\, 4)^{-1} \,\theta\, (6^{-1} \,\theta\, 8)^{-1}$$

$$M = (6 \,\theta\, 4)^{-1} \,\theta\, (2 \,\theta\, 8)^{-1}$$

$$M = (6)^{-1} \quad \theta \quad (6)^{-1}$$

$$M = 2 \quad \theta \quad 2$$

$$\therefore M = 0$$

EJERCICIO 35

Se define en $\mathbb{R}$: $a \square b = a+b-\frac{4}{3}$;

a^{-1} = elemento inverso de "a"

El 2^{-1} para dicha operación es de la forma n/m, donde n/m es una fracción irreductible. Entonces "nm" es igual a :

Resolución:

Como en el problema anterior, primero debemos hallar el elemento neutro :

$$a \square e = a \Rightarrow \cancel{a} + e - \frac{4}{3} = \cancel{a}$$

$\Rightarrow e = \frac{4}{3}$ elemento neutro

Ahora hallamos el elemento inverso :

$$a \square a^{-1} = e \quad \Rightarrow \quad a + a^{-1} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad a^{-1} = \frac{8}{3} - a$$

Dato:

$$2^{-1} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{8}{3} - 2 = \frac{n}{m} \rightarrow \frac{n}{m} = \frac{2}{3} \text{ (fracción irreductible)}$$

$\Rightarrow \; n = 2 \;\wedge\; m = 3$

$$\therefore \; nm = 2 \times 3 = 6$$

EJERCICIO 36

Si: $a \theta b = a+b+2$.

Si a^{-1}: elemento inverso de "a"

Halle: $E = (3 \,\theta\, 2^{-1}) \,\theta\, 3^{-1}$

Resolución:

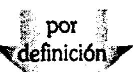
Hallando el elemento neutro:

$$a \,\theta\, e = a$$

$$\cancel{a} + e + 2 = \cancel{a} \Rightarrow e = -2$$

Luego, para el elemento inverso :

$$a \,\theta\, a^{-1} = -2$$



$$a + a^{-1} + 2 = -2 \Rightarrow a^{-1} = -4 - a$$

Entonces:

$$2^{-1} = -4 - 2 = -6$$
$$3^{-1} = -4 - 3 = -7$$
$$E = (3 \,\theta\, 2^{-1}) \,\theta\, 3^{-1}$$
$$E = (3\theta - 6)\theta - 7$$
$$E = \underbrace{-1 \quad \theta - 7}_{-6}$$

$$\therefore \; E = -6$$

EJERCICIO 37

Se define una operación en $\mathbb{R}$, mediante la siguiente regla: $a * b = a+b-1 \;\; \forall \; a, b \in \mathbb{R}$, donde: a^{-1} es el elemento inverso de "a"

Halle: $A = 5^{-1} * 2^{-1}$

Resolución:

Hallando el elemento neutro:

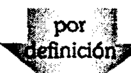
$$a * e = a$$

por
definición

$$\cancel{a} + e - 1 = \cancel{a} \Rightarrow e = 1$$

Luego, para el elemento inverso:

$$a * a^{-1} = 1$$



$$a + a^{-1} - 1 = 1 \Rightarrow a^{-1} = 2 - a$$

Entonces: $5^{-1} = 2-5 = -3$
$2^{-1} = 2-2 = 0$

Reemplazando: $A = \overline{5^{-1}} * \overline{2^{-1}}$

$$A = \underbrace{\overline{-3} * \overline{0}}_{-4}$$

$$\therefore \; A = -4$$

EJERCICIO 38

Dada la siguiente tabla:

θ	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

a^{-1}: elemento inverso de "a"

Halle : $E = (a\,\theta\,c)^{-1}\,\theta\,b$

Resolución:

θ	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

⇒ e = b (Elemento neutro)

$a\theta a^{-1} = b$ → c ; $b\theta b^{-1} = b$ → b ; $c\theta c^{-1} = b$ → a

(observando la tabla)

Luego :

$$E = \underbrace{(a\theta c)}_{b}^{-1}\,\theta\, b$$

$$\Rightarrow E = b^{-1}\,\theta\, b = b$$

$$\therefore\ E = b$$

EJERCICIO 39

En el conjunto A={0,2,4,6,8}, definimos la operación, representada por Δ, mediante la siguiente tabla:

Δ	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
8	2	4	6	8	0
6	0	2	4	6	8
4	8	0	2	4	6
2	6	8	0	2	4

Calcule: $M = [(2^{-1}\,\Delta\,6^{-1})^{-1}\ \Delta\ (6\,\Delta\,8^{-1})^{-1}]\,\Delta\,4^{-1}$

Resolución:

Al igual que en el problema anterior, podemos hallar el elemento neutro, directamente podemos decir entonces, que el elemento neutro es "6".

$$e = 6$$

Ahora veamos el inverso de los elementos de "A".

$0\Delta 0^{-1}=6$; $2\Delta 2^{-1}=6$; $4\Delta 4^{-1}=6$;

$6\Delta 6^{-1}=6$; $8\Delta 8^{-1}=6$

Observando la tabla obtenemos:

$0^{-1}=2$; $2^{-1}=0$; $4^{-1}=8$; $6^{-1}=6$; $8^{-1}=4$

$$\Rightarrow M = [(2^{-1}\,\Delta\,6^{-1})^{-1}\,\Delta\,(6\,\Delta\,8^{-1})^{-1}]\ \Delta\ 4^{-1}$$

$$M = [(\underbrace{0\ \Delta\ 6}))^{-1}\ \Delta\ (\underbrace{6\,\Delta\ 4})^{-1}]\ \ \Delta\ 8$$

$$M = [\underbrace{(\ 0\ )^{-1}}\ \Delta\ \underbrace{(\ 4\ )^{-1}}]\ \ \Delta\ 8$$

$$M = [\ \ 2\ \ \ \Delta\ \ \ 8\ \ ]\ \ \Delta\ 8$$

$$M = 4\,\Delta\,8 = 6$$

$$\therefore\ M = 6$$

EJERCICIO 40

Se define en el conjunto Q una operación simbolizada por # de la siguiente manera:

#	1	2	3	4
1	5	7	9	11
2	8	10	12	14
3	11	13	15	17
4	14	16	18	20

Calcule: $A = \dfrac{(8\#3)+(7\#5)}{4\#8}$

Resolución:

En este tipo de problemas debemos encontrar una relación (regla de definición) entre los términos de la columna y la fila de entrada y, luego, generalizar para cualquier elemento.

Si observamos bien, podría ser la siguiente :

$$a\#b = 3a + 2b \quad \text{¿por qué?}$$

Comprobamos :

$2\#1 = 3(2) + 2(1) = 8$ (correcto, fijarse en la tabla)

$3\#3 = 3(3) + 2(3) = 15$ (correcto)

¡Ah! Observamos que sí cumple, quiere decir que la regla de definición que escogimos es correcta.

Luego :

$$A=\frac{(8\#3)+(7\#5)}{4\#8}=\frac{[3(8)+2(3)]+[3(7)+2(5)]}{3(4)+2(8)}$$

$$\therefore\ \ A = \frac{61}{28}$$

Ejercicios Propuestos

1. Si:

$$\triangle n = n\,\nabla n + 1$$
$$\nabla m = x\,\boxed{m} - 1$$
$$\boxed{a} = 2a+4$$

Calcule: $\triangle\boxed{-2}$

A) 2 B) 1 C) 4
D) 3 E) 0

2. Si : $f(x+1) = x^2+2x-3$, calcule $g(3)$
Además : $f(g(y)) = y^4+15$

A) 9 B) 7 C) 12
D) 11 E) 10

3. Si : $P(x+1) = x^2+3x+2$, halle "y"
Además : $P(P(y)) = 42$

A) 4 B) 5 C) 3
D) 1 E) 2

4. Si : $f(x+3) = x^2-1$, halle el valor de:

$$A = \frac{f(a+2)-f(2)}{a-2} \quad ; \quad a \neq 2$$

A) a B) a^2 C) a^3+1
D) $a+1$ E) $-a$

5. Si : $a^3 \triangle b^2 = b^3-a^2$
$\boxed{x^2+1} = 2^x+1$
Calcule: $E = \boxed{5 + \boxed{17} + (343 \triangle 16)}$

A) 70 B) 48 C) 65
D) 50 E) 60

6. Si : $(a*b)^2 = b*a$; $a*b > 0$
halle: $E = 3*5$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4

7. Si : $a*b = \sqrt{a^b}$; $b \triangle a = \sqrt[3]{a^b}$
halle : $\sqrt[3]{4*27} - \sqrt{4 \triangle 27}$

A) 450 B) 500 C) 503
D) 490 E) 510

8. Sabiendo que: $a*(b+1) = 2a-3b$
Halle "x" en: $5*x = x*(3*1)$

A) 28/5 B) 14/5 C) 20/7
D) 5/12 E) 4/7

9. Si: $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$
$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

Simplifique: $E = \dfrac{[4{,}2]+[6{,}5]}{[-3{,}7]+[-2{,}2]}$

A) –5/7 B) 3/2 C) –10/11
D) –10/7 E) 9/20

10. Si: $\boxed{\text{(x-1)}} = x+1$, $\boxed{x+1} = x-1$

Halle: $\left(\text{(4)} + 1\right)$

A) 10 B) 13 C) 15
D) 36 E) 14

11. Si :

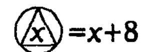
$$\boxed{x-1} = 2x+1$$
$$\boxed{\triangle x+1} = 8x+9$$

Halle el valor de: $E = \triangle\!\triangle 2 + \triangle\boxed{5}$

A) 90 B) 74 C) 60
D) 56 E) 78

12. Si :

$$\triangle x = x+4$$
$$\left(\boxed{x+3}\right) = x-1$$


$= x+8$

Halle el valor de: $E = \textcircled{\boxed{\triangle 5}}$

A) 7 B) 9 C) 5
D) 8 E) 6

13. Si : $\textcircled{m} = m(m-1)$

$\boxed{n} = (n-1)(n+1)$

Halle: $\textcircled{\boxed{2}}$

A) 6 B) 9 C) 8
D) 7 E) 5

14. Si :

$\textcircled{x} = x^2 + 1 \;\;;\;\; x>0$

$\textcircled{\boxed{x}} = 4x^2 + 1$

Calcule: $R = \textcircled{4} + \textcircled{\boxed{2}} - \boxed{8}$

A) 19 B) 20 C) 21
D) 18 E) 22

15. Sabiendo que:

$\boxed{P^2} = -1 + P^4 \;;\; \boxed{\triangle n} = n^2 + 2n$

Calcule:

$E = \triangle\left(\boxed{\triangle 3} + \boxed{2}\right)$

A) 7 B) 9 C) 10
D) 8 E) 6

16. Se definen:

$\triangle(x-1) = 2x^2 - 3$

$\triangle\boxed{x} = 8x + 5$

Calcule: $\boxed{8} + \boxed{15}$

A) 15 B) 14 C) 12
D) 11 E) 10

17. Dado: $\boxed{a*b} = 2a - b$

$\triangle x = 6x + 7$

Halle "N" en:

$\triangle\boxed{N*5} = 25$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 1

18. Se define:

$\textcircled{a^4}^{\sqrt{b}} = a^8 \times \sqrt[4]{b}$

Calcule: $A = \textcircled{\boxed{\sqrt{2}}^{9}}^{4}$

A) 60 B) 70 C) 64
D) 72 E) 81

19. Si:

$\textcircled{\boxed{x+4}} = x + 3$ y

$\textcircled{x+3} = 3x + 1$

Calcule: $\boxed{\boxed{5} + 1}$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 3

20. Si :

$\textcircled{x+1} = x - 1$

$\boxed{y-2} = \textcircled{\textcircled{y}}$

Calcule : $\boxed{\textcircled{4}}$

A) 1 B) –1 C) –2
D) 0 E) 3

21. Si : $\boxed{a-2} = a^2$, halle : $\boxed{3} + \boxed{\boxed{1}}$

A) 146 B) 130 C) 122
D) 150 E) 115

22. Sea x un número entero, $x>-2$

$$\textcircled{x} = x^3+1$$

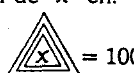
$$\boxed{x} = x^2+3x$$

Calcule el valor de $x+5$; si $\textcircled{\boxed{x}} = -7$

A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 4

23. Si : $\triangle_{n} = (n+1)^2$

Halle el valor de "x" en:



$= 100$

A) $\sqrt{3}$ B) 5 C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}-1$ E) 3

24. Si : $\diamond_{x} = (x-1)^2+a$; $x \neq 0$

Entonces:

$$E = \frac{\diamond_{x} - \diamond_{x+2}}{x} \text{ es :}$$

A) 3 B) –5 C) 6
D) –4 E) –1

25. $\triangle_{x} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\textcircled{x} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Calcule: $\triangle_{a}^2 - \textcircled{a}^2$

A) 3 B) 4 C) 2
D) 2 E) 1

26. Si : $a^2 * b^3 = 3a+4b$, halle $M = 16 * 27$

A) 20 B) 21 C) 17
D) 24 E) 15

27. Si :

$$m^{\#} = \frac{(m^2+1+2m)^2}{(m-1)^2+4m} \; ; m \neq -1$$

Halle : $A = \left[\dfrac{5^{\#}-3^{\#}+1^{\#}}{6^{\#}-4^{\#}} + 2^{\#}\right]^{\#}$

A) 90 B) 121 C) 100
D) 89 E) 81

28. Si : $A \# B = \dfrac{(A+B)^2}{2}$ y $m \triangle n = m^2+r^2$

Halle : "r–s" en :

$$(r \triangle s) - (r \# s) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \; ; \; r > s$$

A) 2 B) 1 C) 3
D) 5 E) 4

29. Si : $\sqrt{a^3} * \sqrt[3]{b^2} = \dfrac{2a}{3} + \dfrac{3b}{2}$

Calcule : $M = 27 * 4$

A) 19 B) 20 C) 16
D) 18 E) 22

30. Se define : $\dfrac{m}{3} \# n = \dfrac{3n-m}{mn}$

Calcule : $E = \left(\dfrac{1}{6} \# -2\right) \# (-3)$

A) 16/39 B) 15/17 C) 20/27
D) 15/29 E) 21/29

31. Se define en $\mathbb{R}$: $a * b = ab$

Calcule: $E = [(3^{-1} * 2^{-1}) * (4^{-1} * 5^{-1})]^{-1}$

Observación:
a^{-1} : elemento inverso de "a"

A) 123 B) 115 C) 165
D) 120 E) 146

32. Si : $a \triangle b = \dfrac{a*b}{a+b}$; $a \neq -b$

Además: $x * y = x-2y$

Halle : $6 \triangle 2$

A) 2/3 B) 1/4 C) 1/6
D) 4/5 E) 1/9

33. Dado que : $a \triangle b = \sqrt{\dfrac{a*b}{a-b}}$; $a \neq b$

$m * n = m + 2n$

Halle el valor de : $E = \dfrac{8 \triangle 4}{2 \triangle 1}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

34. Si se cumple :

$$Ⓐ—Ⓑ = \frac{a+b}{2}$$

$$Ⓜ╲Ⓝ = \frac{n-m}{2}$$

Además:

$$③—ⓧ = 5$$

$$ⓨ╲⑥ = -1$$

Halle : $\boxed{y-x}$, si : $\boxed{m} = (m+1)m$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 3 E) 5

35. Si definimos : $a \triangleleft b = \sum_{i=a}^{b} (2i-1)$; $a,b \in \mathbb{Z}$

calcule : $M = (4 \triangleleft 15) + (16 \triangleleft 30)$

Observación:
Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 14 B) 12 C) 13
D) 18 E) 15

36. Se define la operación (∗), en el conjunto A={1,2,3,4,5,6}, para los casos i) y ii) y con la siguiente ley de orden de prioridad.

I. $a * b = 2a + b \Leftrightarrow a < b$

II. $a * b = 2a - b \Leftrightarrow a \geq b$

III. $a * b = \dfrac{a+b-1}{2} \Leftrightarrow$ en otros casos

Calcule : $E = [(4 * 5) * (3 * 2)] * (1 * 3)$

A) 6 B) 10 C) 13
D) 9 E) 7

37. Si :

$$a \triangle b = \begin{cases} \dfrac{a-b}{a^2-b^2} & ; \ a \neq b \\ 0 & ; \ a = b \end{cases}$$

Halle "x" en :
$5 \triangle x = 2 \triangle (1 \triangle (-2 \triangle 3))$; Obs: $x \neq 5$

A) 6 B) 7 C) 2
D) 0 E) –3

38. Considerando las operaciones:
$A \# B = A+B-N$; si $1<N<5$
$A \# B = A+B+N$; si $5<N<10$
donde "N" es la suma de las cifras de los operandos (A y B)

Halle: $(12 \# 15) \# (3 \# 1)$

A) 36 B) 40 C) 45
D) 48 E) 50

39. Si se cumple :

$$\boxed{x} = \frac{x^2-9}{x+3}, \ x \neq -3$$

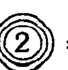
Además : $\boxed{\boxed{\boxed{1+2n}}} = 16$

$$M = \boxed{n^2-1}$$

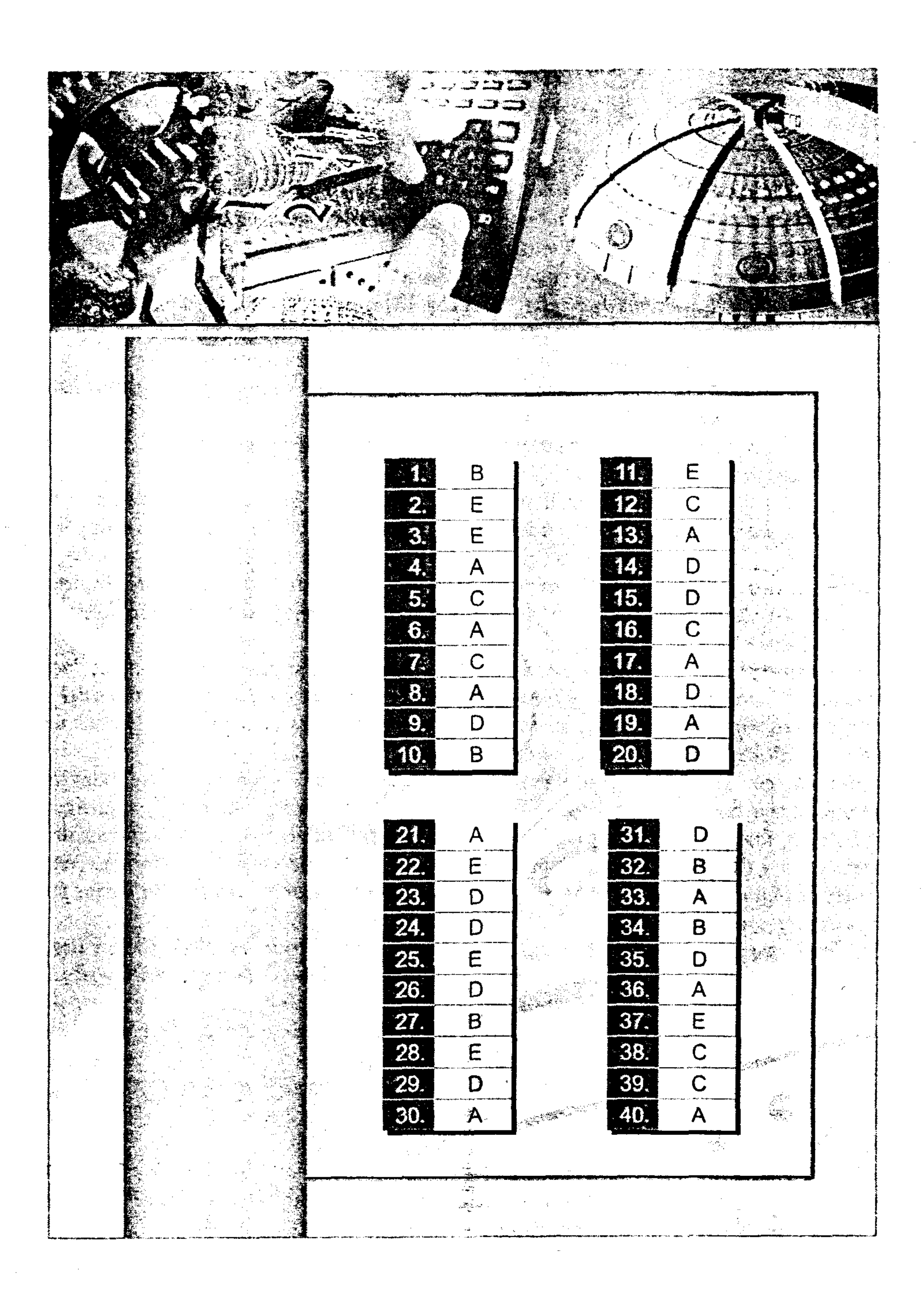
A) 147 B) 114 C) 140
D) 158 E) 161

40. Se define la operación :

$$\text{(2x+1)} = \frac{2x+3}{2}$$

Halle el valor de "n" en:  = (2n)

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 4



1.	B	11.	E
2.	E	12.	C
3.	E	13.	A
4.	A	14.	D
5.	C	15.	D
6.	A	16.	C
7.	C	17.	A
8.	A	18.	D
9.	D	19.	A
10.	B	20.	D

21.	A	31.	D
22.	E	32.	B
23.	D	33.	A
24.	D	34.	B
25.	E	35.	D
26.	D	36.	A
27.	B	37.	E
28.	E	38.	C
29.	D	39.	C
30.	A	40.	A

Evariste Galois

Entró, a los doce años, en el famoso liceo Louis-le-Grand de París, donde las materias principales era el latín y el griego. Sus resultados en esas asignaturas eran mediocres y decidió seguir un curso optativo de matemáticas; eso cambió el curso de su vida, le entró una exaltación sin precedentes: terminó en dos días obras que se estudiaban en dos años. Leyó y asimiló a todos los maestros de su tiempo, tales como Legendre y Cauchy. Más aún, su genio creador lo llevó a hacer descubrimientos inesperados (descubrió que las ecuaciones de quinto grado, con las que habían tropezado muchos matemáticos famosos, no tienen soluciones generales por radicales).

Los docentes del liceo Louis-le-Grand no reconocieron para nada su talento ni su genio. Éstos son los comentarios de algunos de sus profesores:

"Su talento, en el que tendríamos que creer, no lo he visto todavía; no llegará a nada, su trabajo sólo demuestra extravagancia y negligencia".

Un solo profesor sugiere que abandone las otras asignaturas y que se dedique exclusivamente a las matemáticas, dice: "Una locura matemática se ha apoderado de este joven, aquí está perdiendo el tiempo, sólo atormenta a sus maestros, su conducta es pésima, su carácter muy reservado".

Galois quería entrar en L' Ecole Polytechnique, la mejor escuela de matemáticas de Francia, y se presentó al concurso de ingreso, pero criticó las preguntas, fue insolente con los examinadores y no fue aceptado. Tuvo que volver al liceo.

A los diecisiete años, envió a la Academia de Ciencias una memoria sobre la resolución de ecuaciones algebraicas que contenía "algunas de las ideas matemáticas más importantes del siglo"; desgraciadamente, Galois nunca supo nada más de ese trabajo; es muy probable que Cauchy, el principal matemático francés de la época lo haya perdido.

Se presentó por segunda vez al L'Ecole Polytechnique y por segunda vez se peleó con los examinadores que le cerraron las puertas definitivamente. Envió un segundo trabajo a la Academia; esta vez Poisson, un matemático de prestigio, fue el juez y declaró el trabajo "incomprensible".

En febrero de 1 830, a los diecinueve años, fue finalmente admitido en la Ecole Normale, de menor prestigio que la anterior, pero también tuvo conflictos con los profesores, participó en luchas políticas y fue expulsado a los pocos meses.

Abandonó, casi por completo las matemáticas, se decidió a la lucha revolucionaria y llegó a ser un líder prestigioso, pero terminó en la cárcel; allí se enamoró de una joven que iba a visitar a otro preso. La relación fue corta y dramática; salió de la cárcel el 29 de mayo de 1 832 y murió dos días después en un duelo ridículo (se sospecha que la joven y la provocación a duelo fueron ardides de la policía). Galois tenía 21 años.

La noche antes del duelo, escribió algunas cartas y unas sesenta páginas de matemáticas. En ellas presentaba su teoría de grupos abstractos, fundando así el álgebra abstracta moderna, que iba a mantener ocupadas a varias generaciones de matemáticos y de físicos.

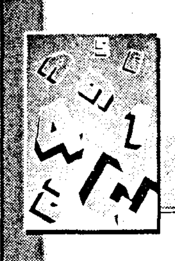
Hermann Weyl, un importante matemático alemán del siglo XX, dijo de este testamento matemático de Galois: "Si se considera la originalidad y la profundidad de las ideas que contiene, es, quizás, el documento escrito más valioso de toda la literatura de la humanidad".

Superando largamente su fama, la frase final de su última carta pedía: "Conservad mi recuerdo, ya que el destino no me ha dado suficiente vida para que mi país conozca mi nombre", pues el mejor monumento a su recuerdo es su valioso legado a la humanidad.

SUCESIONES

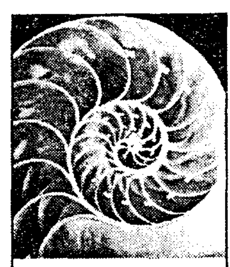
"La matemática es la más simple, la más perfecta y la más antigua de las ciencias".

Hadamard



Lectura 13

El número e:



Algunos caracoles desarrollan su concha en una espiral continua a medida que crecen, originando una espiral logarítmica natural

Casi siempre nos es presentada la noción de logaritmo, por primera vez, del siguiente modo: "el logaritmo de un número y en base a es el exponente x tal que $a^x = y$". Sigue la observación: "Los números usados más frecuentemente como base de un sistema de logaritmos son el 10, que es la base de nuestro sistema de numeración, y el número e = 2,71828182 ...". Esto nos deja intrigados.

Planteamos una pregunta ingenua: ¿Persiste la regularidad en la secuencia de las cifras decimales de este número? No. Apenas una coincidencia al comienzo. Un valor más preciso sería:

$$e = 2,718281828459$$

No se trata de una fracción decimal periódica. El número "e" es irracional, esto es, no puede ser obtenido como cociente $e = p/q$ de dos números enteros. Más aún: es un irracional trascendente. Esto significa que no existe un polinomio P(x) con coeficientes enteros, que se anule para x = e.

¿Por qué entonces escoger un número tan extraño como base del logaritmos? Aún después de aprender que:

$$e = \lim_{n \to x} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

la indagación persiste: ¿Qué hace tan importante a ese número?

Tal vez la respuesta más concisa sea que el número "e" es importante porque es inevitable, pues surge espontáneamente en varias cuestiones básicas.

Una de las razones por las cuales la matemática es útil a las ciencias en general está en el cálculo (diferencial e integral), que estudia la variación de las magnitudes. Y un tipo de variación de los más simples y comunes es aquel en el cual el crecimiento(o decrecimiento) de una magnitud en un instante es proporcional al valor de la magnitud en aquel instante. Este tipo de variación ocurre, por ejemplo, en cuestiones de interés, crecimiento de poblaciones (de personas o bacterias), desintegración radiactiva, etc.

En todos los fenómenos de esta naturaleza, el número "e" aparece de modo natural e insustituible. Los logaritmos que tiene base "e" son, a veces, impropiamente llamados "logaritmos neperianos". En realidad, los logaritmos originalmente introducidos por Napier tenían por base el número $a = (1 - 10^{-7})^7$

Para ser más exactos, el verdadero "logaritmo neperiano" del número x era igual a:

$$10^7 . \log_a \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

Es más apropiado llamar logaritmos naturales a los logaritmos de base e; Euler los llamaba logaritmos hiperbólicos.

FUENTE : Mi profesor de matemática E. Lages Lima

SUCESIONES

Objetivos

1. *Iniciar al lector en el estudio de las sucesiones en general.*
2. *Conocer la noción básica de sucesión y su clasificación.*
3. *Reconocer y aplicar las sucesiones numéricas más importantes.*
4. *Vincular el concepto de sucesión con el concepto de límites.*

Introducción

Al principio, el género humano no conocía la actividad de contar. Quizá no la necesitaba o, al menos, no tenía que hacerlo para cazar animales y, así, sobrevivir. Como no conocía las horas, las semanas y los meses, no tenía porque hacer conteos. Sin embargo, podía distinguir que existía una diferencia entre uno, pocos y muchos, ya sea al momento de la recolección de alimentos, al llevar a cabo la cacería o al momento de enfrentarse a una situación de peligro que entrañaba la lucha por la supervivencia.

El ser humano aprendió a contar por necesidad y con el transcurrir del tiempo lo fue haciendo cada vez mejor. Primero con los dedos, que fueron los primeros símbolos usados como números, y luego haciendo uso de piedras, haciendo marcas en el tronco de un árbol, en la tierra o arena del suelo.

¿Cuál es el origen del número?

*Siendo el número un concepto de relación se sabe que el número surgió de la comparación entre un grupo de objetos y uno de esos objetos aislados. Caminando por el desierto, el beduino ve una caravana de camellos. ¿Cuántos son? Para definir ese "**cuántos**", debe emplear los números. El número será la pluraridad definida bajo la forma de una palabra o de un símbolo.*

Para llegar a ese resultado, el hombre precisa poner, en ejercicio, cierta actividad. Necesita contar. Al contar relaciona cada conjunto con un determinado símbolo: uno, dos, tres ...; es decir, establece una correspondencia entre los números y los objetos del conjunto que desea contar. Nacía así, la noción de sucesión. Ahora, para la representación de un número cualquiera con pocos signos era necesario inventar un sistema de numeración. El más antiguo sistema de numeración es el Quinario, en el cual las unidades se agrupan de cinco en cinco.

○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

En el primitivo sistema quinario el número de discos indicados sería 32.

Una vez contadas cinco unidades obtendremos una colección llamada quina. Si 8 unidades sería una quina más 3 y escribiríamos 13, entonces en el esquema mostrado tendríamos 3 quinas y 2 unidades y escribiríamos 32 (en notación utilizada actualmente es $32_{(5)}$). Es importante decir que en este sistema el segundo guarismo de la izquierda valía 5 veces más que si estuviese en el primer lugar. Por consiguiente, los matemáticos dicen, que la base de este sistema es 5.

Surgió después el sistema de base 10 que se prestaba para expresar grandes cantidades. El origen de este sistema se explica por el número de dedos de la mano. Algunos pueblos, sin embargo, demostraban preferencia por un sistema que tenía por base el número 12 (una docena). La docena presenta sobre la decena una gran ventaja: el número 12 tiene más divisores que el número 10.

El sistema decimal fue universalmente adoptado. Desde el Tuareg, que cuenta con los dedos, hasta el matemático, que maneja instrumentos de cálculo, todos contamos de 10 en 10. Dadas las divergencias profundas entre los pueblos, semejante universalidad es sorprendente; no puede jactarse de lo mismo ninguna religión, código moral, forma de gobierno, sistema económico, principio filosófico o artístico, lenguaje, ni alfabeto alguno. Contar es uno de los pocos tópicos en torno del cual los hombres no divergen pues lo consideran lógico y natural.

NOCIÓN DE SUCESIÓN

En matemática la palabra sucesión se emplea casi con igual sentido que en el lenguaje común. Por ejemplo, supongamos que pedimos a un grupo de niños formarse en fila india (alineados uno detrás de otro). Empezamos a repartir caramelos: al primero le damos dos; al segundo, 5; al tercero, 8 caramelos; al cuarto, 11, y así sucesivamente hasta haber entregado lo que le corresponde al último niño de la fila.

Ya sea que repartamos caramelos de 3 en 3 a un grupo de niños o contemos las estrellas de 2 en 2, aparece nítidamente la noción de sucesión.

Es claro que debemos disponer de una cantidad suficiente de caramelos para poder llevar a cabo el reparto. Si se asume que dicha cantidad es finita, es posible determinarla, porque el número de alumnos que integran el grupo (sea grande o pequeño) es finito. Cabe señalar que los números, los cuales indican la cantidad de caramelos entregado a cada niño, están ordenados de manera creciente; es decir forman **una sucesión** cuyo número de términos va a ser limitado y dependiente del número de niños. Estamos frente a una **sucesión finita**.

Si en una noche clara, mirando el oscuro cielo tachonado de estrellas, empezamos a contarlas de dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, ...y no llegáramos a contarlas todas, aun teniendo un poderoso telescopio, su número sería infinito y como estamos **enumerando**, los términos de dicho infinito será denominado infinito numerable.

Por ello, cuando la sucesión tiene un número finito de términos, se denomina **sucesión finita** y cuando tiene un número infinito numerable de términos se denomina **sucesión infinita**.

SUCESIONES NUMÉRICAS NOTABLES Y ESPECIALES

A continuación mostraremos, en el siguiente cuadro, algunas sucesiones importantes.

	Nombre	Sucesión	Regla de formación o término enésimo
SUCESIONES NOTABLES	De los números naturales	1, 2, 3, 4, 5	$t_n = n$
	De los números pares	2, 4, 6, 8, 10, ...	$t_n = 2n$
	De los números impares	1, 3, 5, 7, 9, ...	$t_n = 2n - 1$
	De los números triangulares	1, 3, 6, 10, 15, 21. .	$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$
	De los números tetraédricos	1, 4, 10, 20, 35, . . .	$t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
	Números pentagonales	1, 5, 12, 22, ...	$t_n = \frac{n(3n-1)}{2}$
	Números hexagonales	1, 6, 15, 28, ...	$t_n = n(2n-1)$
	De los números cuadrados	1, 4, 9, 16, 25, ...	$t_n = n^2$
	De los cubos perfectos	1, 8, 27, 64, 125, . . .	$t_n = n^3$
SUCESIONES ESPECIALES	De los números primos	2, 3, 5, 7, 11, 13, ...	No tiene término enésimo, pero sí criterio de orden
	De Fibonacci	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13	$t_1 = 1 \quad t_2 = 1$ $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \ \forall\, n \geq 3$
	De Feinberg[1] ("Tribonacci")	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, . . .	$t_1 = 1 \quad t_2 = 1 \quad t_3 = 2$ $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3}$ $\forall\, n \geq 4$
	De Lucas	1, 3, 4, 7, 11, ...	$t_1 = 1 \quad t_2 = 3$ $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \ \forall\, n \geq 3$

Edward Lucas, matemático francés, divulgó la obra de Fibonacci y Mark Feinberg generalizó las sucesiones de fibonacci.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE ALGUNAS SUCESIONES NOTABLES

Números triangulares

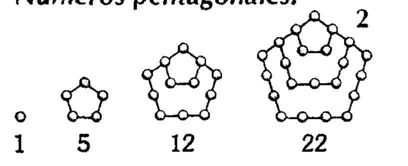
$$1+2+3+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1 3 6 10

Números cuadrados: n^2

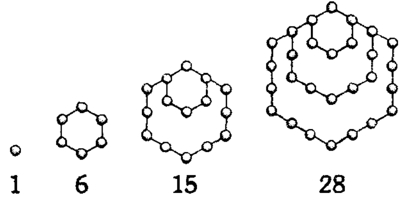
1 4 9 16

Números pentagonales: $\frac{n(3n-1)}{2}$



1 5 12 22

Números hexagonales: $n(2n-1)$



1 6 15 28

Números en escuadra: $2n-1$

1 3 5 7

Observación:

$5=3^2-2^2$ $7=4^2-3^2$

$2^2=1+3$ $3^2=1+3+5$ $4^2=1+3+5+7$

"Todo es número". he aquí una frase de Pitágoras que resume, en cierto modo, su filosofía. Es interesante la imagen geométrica de los números que los pitagóricos representaban, partiendo de la unidad, con distintas figuras. Así se clasificaba los números en triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, en escuadra, cúbicos, etc.

Cada número triangular representa la suma de un número entero y los antecedentes con excepción del 1° número triangular (1).

Número entero n	Números triangulares
n = 1	1 = 1
n = 2	2 + 1 = 3
n = 3	3 + 2 + 1 = 6
n = 4	4 + 3 + 2 + 1 = 10
n = 5	5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15
n = n	$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}$

Cada número cuadrado representa el producto de un entero por sí mismo, y cada cúbico el producto de un entero por sí mismo tres veces.

Número entero n	Número cuadrado	Número cúbico
n = 2	$2^2 = 2\times2 = 4$	$2^3 = 2\times2\times2 = 8$
n = 3	$3^2 = 3\times3 = 9$	$3^3 = 3\times3\times3 = 27$
n = 4	$4^2 = 4\times4 = 16$	$4^3 = 4\times4\times4 = 64$
n = 5	$5^2 = 5\times5 = 25$	$5^3 = 5\times5\times5 = 125$
⋮		
n = n	$n^2 = n\times n$	$n^3 = n\times n\times n$

La representación en escuadra de los números impares permite verificar la propiedad por la cual un número impar es la diferencia de dos números cuadrados y también que el cuadrado de un número n es igual a la suma de los **n** primeros números impares, lo cual se observa al ir encajando consecutivamente las **n** primeras escuadras. También vale la pena destacar que el cuadrado de **n** es la suma de dos números triangulares consecutivos.

Veamos finalmente los números rectangulares. Se observa que no todos los números impares son representables con rectángulos de este tipo; en tal caso se puede recurrir a rectángulos sin altura, es decir, lineales. Descubrimos que estos números sólo son divisibles por sí mismos y por la unidad: son los **números primos**.

"Las representaciones geométricas de los números que hemos mostrado con algunas propiedades características dan una idea sobre la aritmo–geometría de los pitagóricos, es decir, el tipo de análisis basado en el principio de que a partir de la forma de la figura que representa el número se pueden descubrir todas las propiedades del número y viceversa. Pero esta extraordinaria convicción, que encierra parte de verdad, llevó a los pitagóricos a un excepcional descubrimiento, el de los números irracionales, que supuso el derrumbamiento de sus mitos". (A. Mondadori)

Números rectangulares

6

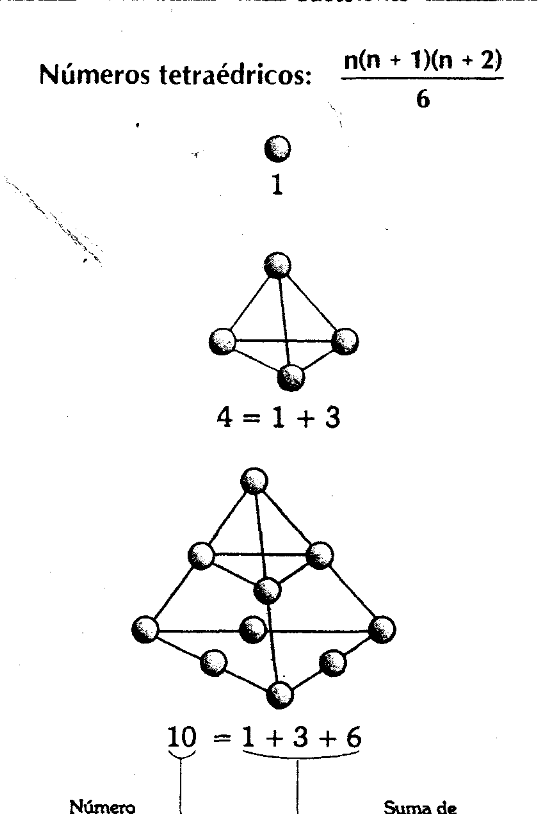
12

20

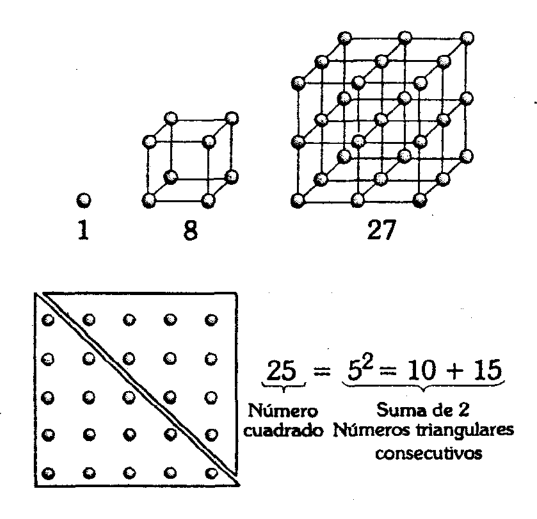
15

7

11



Números cúbicos: n^3

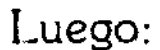


¿Qué es una sucesión?

Podemos aceptar como noción de sucesión a aquella relación existente entre un conjunto ordenado de elementos (pueden ser números, letras, figuras o una combinación de los anteriores casos) y el lugar que ocupa cada uno de dichos elementos gracias a este orden, se puede distinguir el primero, el segundo, el tercero y así sucesivamente; acorde con una ley de formación, criterio de orden o fórmula de recurrencia. A los elementos de este conjunto se les denomina términos de la sucesión.

Cuando decimos que una colección de objetos o sucesos está en **sucesión**, queremos decir que dicha agrupación está ordenada de manera que un primer elemento está ya identificado, al igual que el segundo elemento, el tercero, etc.

Luego:

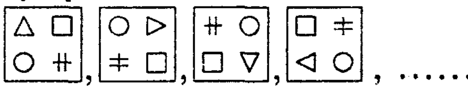


N° ordinal ⇒ 1 2 3 4 ...
(indica el lugar que ocupa cada término)
Términos de la sucesión ⇒ t_1 t_2 t_3 t_4 ...
(son los elementos de la sucesión)

Ejemplo 1

El conjunto ordenado 2, 5, 8, 11, 14, 17. . . son términos de una **sucesión numérica** y están constituidos de modo que cada elemento se obtiene añadiéndole 3 unidades al elemento anterior a partir del segundo elemento.

Ejemplo 2



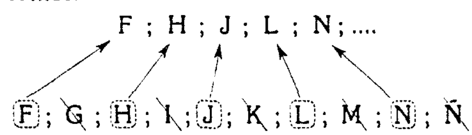
son términos de una sucesión gráfica.

Cada figura, a partir de la segunda, se obtiene girando, la anterior, en sentido horario, un ángulo de 90°.

Ejemplo 3

F, H, J, L, N; . . . . . **son términos de una sucesión literal**

Veamos:



Cada término que sigue se obtiene considerando el orden que la letra ocupa en el alfabeto dejando un lugar y tomando la siguiente letra. No hemos considerado la letra LL.

Ejemplo 4

4 ; 9 ; 16 ; 25 ; .....

La serie anterior se denomina **sucesión grafonumérica**, cada elemento esta constituido por una figura y un número. En este caso las figuras son polígonos regulares ordenados (según el número de lados que poseen) en forma creciente. En el interior de ellos los números son cuadrados perfectos: 2^2, 3^2, 4^2, ... etc.

El número de lados del polígono se obtiene sumando dos al número ordinal correspondiente. El número en el interior se obtiene sumándole uno al número ordinal y elevando al cuadrado este resultado. Luego cada *"término"* se logra construyendo el polígono y escribiendo en su interior el número correspondiente.

Como se ha visto ya en los ejemplos anteriores las sucesiones pueden ser:

- sucesiones gráficas
- sucesiones literales
- sucesiones numéricas

En ocasiones se presentan algunas sucesiones que son combinación de las anteriores. Iniciaremos nuestro estudio en el orden adecuado.

SUCESIONES GRÁFICAS

Están conformadas por figuras que han sido construidas y ordenadas de acuerdo a cierto criterio que determina el lugar de cada término de la sucesión. Los criterios que rigen la aparición o construcción de las figuras no son únicos; hay una gran diversidad de ellos, sin embargo podemos señalar los más usados.

- Criterio de giro
- Criterio de aparición y/o desaparición de elementos de la figura.
- Unión y/o intersección de figuras.
- Relación con otras figuras.

Ejemplo 1

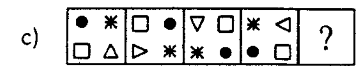
¿Qué figura continúa en cada sucesión gráfica?

a)

Criterio: El número de lados aumenta de uno en uno.

b) ⌐⌐, ⌐, ⌐, ⌐, ...

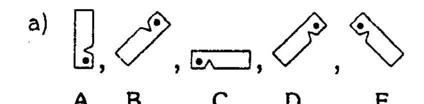
Criterio: El número de segmentos que compone cada línea disminuye de uno en uno.

c) 

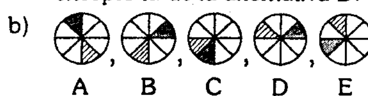
Criterio: Cada cuadrado con sus figuras interiores gira 90° en sentido horario.

Ejemplo 2

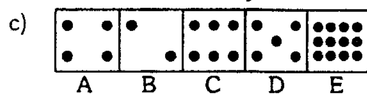
¿Qué figura no guarda relación con las demás en cada caso?

a) 

Criterio: Todas las figuras se pueden superponer al girarlas adecuadamente, excepto la de la alternativa D.

b) 

Criterio: La región rayada avanza un lugar en sentido horario mientras que la sombreada avanza 1; 2; 3; 4; . . . . etc lugares consecutivamente y la D no corresponde.

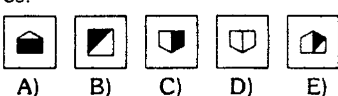
c) 

Criterio: Todas las alternativas muestran un número par de puntos, excepto la D.

Observación: En sucesiones gráficas también se recomienda analizar las alternativas.

La figura que continúa en:

es:

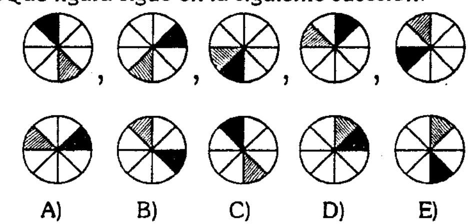


Resolución:

La parte superior e inferior de la 1ra. figura se complementan para formar la 2da. figura. Si completamos adecuadamente la tercera figura, obtendríamos como respuesta la alternativa C.

Ejemplo 4

¿Qué figura sigue en la siguiente sucesión?

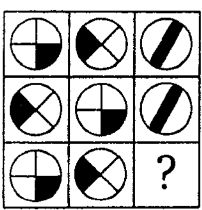


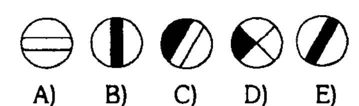
Resolución:

La región pintado en negro avanza 2, 3, 4, 5, lugares en sentido horario; luego en la figura que sigue habrá avanzado 6 lugares en sentido antihorario; asímismo la región rayada avanza un lugar en sentido horario, entonces obtenemos como respuesta la alternativa E.

Ejemplo 5

¿Qué figura completa adecuadamente el recuadro?





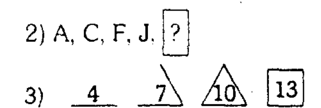
Resolución:

Las figuras de la 1ra. fila se repiten en la 2da. y en la 3ra. fila excepto (figura) que es la que falta.

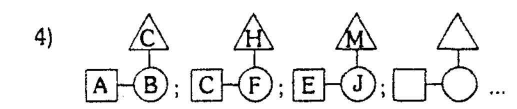
Ejemplo 6

Indica el término que continúa en cada caso:

1) (figuras), (figuras), (figuras), (figuras), ?



4)



Resolución:

Queda como ejercicio para el lector.

SUCESIONES LITERALES

Es aquella sucesión que se caracteriza por tener como términos a letras del alfabeto distribuidos de acuerdo a un determinado criterio.

Estos criterios son diversos y los más considerados son:

- lugar que ocupa la letra en el alfabeto.
- iniciales de palabras conocidas.
- formación de palabras.

Observación:

Generalmente al elaborar las preguntas sobre sucesiones literales no se considera las letras: ch,ll y rr. Por este motivo, al resolver los ejercicios dados es que no se toman en cuenta dichas letras. Sin embargo debemos advertir que hay algunos textos con ejercicios planteados en los cuales sí se los considera, por ello te aconsejamos leer cuidadosamente la pregunta y analizarla bajo la luz de esta observación para proceder de la manera más adecuada.

Ejemplo:

Indique qué letra continúa en cada caso:

1. A, Z, B, Y, C, . . .

   En los lugares impares están A, B; C; . . .

   En los lugares pares están Z; Y; . . .

   luego, seguirá la letra X

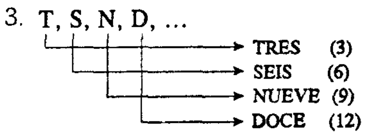
2. R, O, M, J, . . .

   Resolución:

   R ; O ; M ; J ; G

   QP ÑN LK IH

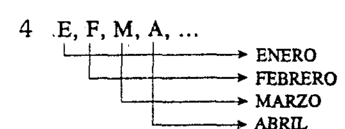
3. T, S, N, D, ...



Seguirá Q de quince (15).

Criterio: Iniciales de palabras que guardan relación entre sí.

4. E, F, M, A, ...



Sigue M de mayo.

Criterio: Otra vez iniciales de palabras que guardan relación entre sí.

5. B, A, F, C, J, E

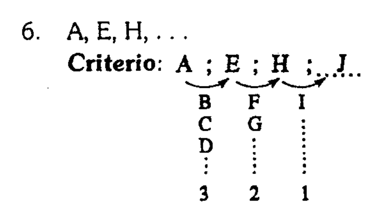
   Resolución:

   B ; A ; F ; C ; J ; E ; N...

   C D E   G H I   K L M

6. A, E, H, . . .

   Criterio: A ; E ; H ; J...



7. J, L, H, J, F, H, . . .

   Criterio: J ; L ; H ; J ; F ; H ; D...

   I   G   E

SUCESIÓN NUMÉRICA

Es aquella sucesión cuya característica es presentar como términos a elementos numéricos en el cual cada uno de ellos tiene un orden designado, es decir, a cada uno le corresponde un número ordinal, de tal manera que puede distinguirse a uno como el primero, otro como el segundo, otro como el tercero y así sucesivamente de acuerdo a cierta ley de formación.

Veamos:

Número ordinal	1°	2°	3°	4°	.....	n°	.....
	↓	↓	↓	↓		↓	
Términos de la sucesión	t_1	t_2	t_3	t_4	.....	t_n	.....

Observación:

Se aprecia que cada término de la sucesión tiene un correspondiente número ordinal, gracias a lo cual también se cumple lo inverso de modo que cada número ordinal tiene su correspondiente término de la sucesión.

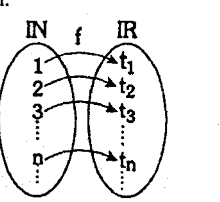
Como podemos apreciar, cada elemento del conjunto ordenado recibe el nombre de **término de la sucesión** y lo simbolizamos por $\mathbf{t_n}$. Vamos ahora a dar una definición más formal de lo que es una sucesión numérica:

Definición

Una sucesión de números reales es una función f: N → R definida en el conjunto N = {1, 2, 3 . . . . } de números naturales y que va tomando valores en el conjunto R de los números reales. Un valor f(n), ∀ n ∈ N será representado por $\mathbf{t_n}$ llamado término enésimo o término general de la sucesión.

Observación:

Notamos que la definición formal se hace utilizando la noción de función.



De acuerdo a la definición dada se deduce que hay una correspondencia de "uno a uno" entre los números naturales a partir de 1 y los términos de la sucesión. Indicamos también que una sucesión se puede considerar como el rango de una función cuyo dominio es el conjunto N.

Hay diversas maneras de representar una sucesión numérica daremos unos ejemplos y al final de ellos enunciaremos las conclusiones.

Ejemplo 1

La sucesión para la cual: $t_n = 7n-2$ tiene como términos: 5; 12; 19; 26; . . .

En efecto:

para n: 1 ; 2 ; 3; 4 . . . (Números ordinales)

se tiene: t_n : 5 ; 12 ; 19 ; 26 . . .

(Términos de la sucesión)

Ejemplo 2

La sucesión cuyo término enésimo es: $t_n = \dfrac{n^3+1}{3n+2}$ tiene como términos:

$$\frac{2}{5} ; \frac{9}{8} ; \frac{28}{11} ; \frac{65}{14} ; \ldots$$

En efecto:

Para n : 1 2 3 4 . . .

se tiene: tn : $\frac{2}{5} ; \frac{9}{8} ; \frac{28}{11} ; \frac{65}{14} ; \ldots$

Ejemplo 3

La sucesión, la cual $t_n = \frac{1}{2^n}$, está integrada por los términos: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$

Presenta

para n : 1 2 3 4 . . .

tn: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$

Ejemplo 4

La sucesión, la cual: $f(n) = \frac{2}{n+2}$,

tiene como términos: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \ldots$

Otro método para definir una sucesión es dar el primer término o los dos primeros (según convenga) y una fórmula para calcular un término cualquiera pero en función de los términos anteriores. Tal tipo de fórmula se denomina **fórmula de recurrencia.**

Ejemplo 5

Escribe los primeros términos de la sucesión en la cual:

$$t_1 = 16 \text{ y } t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n$$

Observación:

Aquí estamos dando el primer término y una fórmula para el término de lugar n+1 en función del enésimo término.

Resolución:

Como $t_1 = 16$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{2}t_1 = \frac{1}{2}(16) = 8$$

$$\Rightarrow t_3 = \frac{1}{2}t_2 = \frac{1}{2}(8) = 4$$

y así sucesivamente.

Luego, los términos serán: 16, 8, 4, 2, . . .

Ejemplo 6

$t_1 = 1$

$t_2 = 1$

$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad n \geq 3$

Para:

n = 3	$t_3 = t_2 + t_1$	$= 1 + 1 = 2$	$\therefore t_3 = 2$
n = 4	$t_4 = t_3 + t_2$	$= 2 + 1 = 3$	$\therefore t_4 = 3$
n = 5	$t_5 = t_4 + t_3$	$= 3 + 2 = 5$	$\therefore t_5 = 5$
n = 6	$t_6 = t_5 + t_4$	$= 5 + 3 = 8$	$\therefore t_6 = 8$
n = 7	$t_7 = t_6 + t_5$	$= 8 + 5 = 13$	$\therefore t_7 = 13$
⋮		⋮	⋮

y así sucesivamente. Entonces los términos de la sucesión serán:

1; 1; 2 ; 3; 5 ; 8; 13; . . .

Podemos indicar ahora que: $F_1 = 1$; $F_2=1$; $F_3 = 2$; $F_4 = 3$ y así sucesivamente, son los denominados **Números de Fibonacci**. Cuando escribamos F_n estaremos denotando el enésimo número de Fibonacci; F_{n+1} es el número que sigue a F_n; etc.

Esta sucesión es muy notable y es conocida como la sucesión de Fibonacci; cuyos términos, han sido obtenidos mediante un procedimiento recursivo.

"Un procedimiento recursivo consiste en una serie de etapas; cada una de ellas dependiente de las anteriores. Si para calcular el enésimo término de la sucesión de Fibonacci se van sumando pares de términos inmediatamente anteriores hasta alcanzarlo, se estará procediendo iterativamente o por recurrencia. Al definir el término F_n, como suma de los dos términos que le anteceden, estamos dando un ejemplo sencillo de Fórmula de recurrencia" (M. Gardner).

En ocasiones los términos están ordenados según algún **criterio de ordenamiento**.

Ejemplo 7

La sucesión 2, 3, 5, 7, 11, . . . es interesante pues sus términos son los **números primos dispuestos en orden creciente**. En primer lugar, está el número primo 2; en segundo lugar, el siguiente número primo 3; etc. Esta sucesión se puede continuar fácilmente si disponemos de la tabla de números primos (la llamada Criba de Eratóstenes) sin la cual no estamos en condiciones de decir, por ejemplo, el término que se encuentra ocupando el 1000 –ésimo lugar; puesto que no existe una fórmula que exprese el enésimo término de esta sucesión en función del número que indica el lugar de dicho término. Sin embargo, la expresión en negrita, llamada criterio de orden, expresa exactamente la **Ley de Formación** de sus términos.

Ejemplo 8

La sucesión 3; 3, 1; 3, 14; 3, 141; 3,1415; . . .
está formada por los valores aproximados al número π . Para esta sucesión tampoco podemos indicar una fórmula general o de recurrencia que nos dé el término enésimo; pero podemos notar un claro **criterio de orden**.

Observación:

Una sucesión se considera dada o definida si es conocida la **ley de su formación**; es decir, una regla por la cual se pueda determinar cualquier término de ella (entre los términos de la sucesión pueden habe. números iguales).

- Muchas veces es posible establecer una fórmula para el término general t_n, llamado **término enésimo** de la sucesión.
- En otros casos, se utiliza las **fórmulas de recurrencia**.
- Además, los términos de la sucesión pueden estar dados según algún **criterio de orden**.

En resumen:

Los términos de una sucesión están ordenados de acuerdo a una **ley de formación** la cual puede ser una **fórmula general** (que nos brinde el término enésimo); una **fórmula de recurrencia** o según cierto **criterio de orden.**

SUCESIONES NUMÉRICAS IMPORTANTES

SUCESIÓN ARITMÉTICA LINEAL O DE PRIMER ORDEN

Es aquella en la cual fijado el primer término; cada término siguiente; a partir del segundo, se obtiene sumando al término anterior un número llamado "diferencia común" o razón aritmética constante de la sucesión lineal. También es usual decir que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión es siempre constante. A una sucesión aritmética con estas características también se le denomina **progresión aritmética** (P.A.)

Ejemplo:

La sucesión aritmética: 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; ... (+3, +3, +3, +3)

es lineal y denominada progresión aritmética, su característica principal es su razón aritmética constante, (r) que en este caso es r=3

Notamos que:

$$t_1 = 5 + 0(3) = 5$$
$$t_2 = 5 + 1(3) = 8$$
$$t_3 = 5 + 2(3) = 11$$
$$t_4 = 5 + 3(3) = 14$$
$$t_5 = 5 + 4(3) = 17$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\therefore t_n = 5 + (n-1)3 = 3n + 2$$

Observación:

Si $r > 0$ La sucesión aritmética es creciente.
Si $r < 0$ La sucesión aritmética es decreciente.

Luego, el término enésimo de la sucesión es:

$$t_n = 5 + 3(n-1)$$

Primer término ← 5 ; 3 → Razón aritmética

En general:

Si $t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; .... ; t_n ; ...$ (con diferencia r entre términos consecutivos)

es una progresión aritmética

Luego, el término general de una progresión aritmética viene dada por la expresión:

$$t_n = t_1 + r(n-1)$$

Podemos darle una forma más simple, operando así:

$$t_n = t_1 + r.\ n - r$$
$$t_n = r.\ n + \underbrace{t_1 - r}_{t_o}$$

Luego: $\boxed{t_n = r\ .\ n + t_0}$

Donde:
t_n = Término enésimo
t_1 = Primer termino.
r = Razón
n = Número de términos
t_0 = Término anterior al primero

Ejemplo 1

Realizaremos el cálculo del t_n en cada uno de los casos:

a) $9 ; 16 ; 23 ; 30 ; 37 ; ...$
   $+7 \quad +7 \quad +7 ...$
   $r = 7, \quad t_0 = 9 - 7 = 2$
   entonces: $t_n = 7n + 2$

b) $33; 21 ; 9 ; -3 ; -15 ; ...$
   $-12 \quad -12 \quad -12 ...$
   $r = -12, t_0 = 33 - (-12) = 45$
   entonces: $t_n = -12n + 45$

c) $-3 ; 2 ; 7 ; 12 ...$
   $+5 \quad +5 \quad +5$
   $r = 5, t_0 = -3 - 5 = -8$
   entonces: $t_n = 5n - 8$

Ejemplo 2

En la siguiente P.A.: 127; 123; 119; 115; ...; –269
Calcule

I. t_n
II. La cantidad de términos de la sucesión
III. El segundo término negativo de la P.A.

Resolución:

I. Cálculo del término enésimo:

$127 ; 123 ; 119 ; 115 ; ...$
$-4 \quad -4 \quad -4$

$r = -4 \quad t_0 = 127-(-4) = 131$
$\Rightarrow t_n = -4n + 131$

II. Cálculo de la cantidad de términos de la P.A.

Despejando "n" de la expresión

$t_n = r.\ n + t_o$, tenemos: $\boxed{n = \dfrac{t_n - t_o}{r}}$

n : cantidad de términos
t_n : último término
t_o : anterior al 1ro.
r : razón

Luego, para el ejemplo, tenemos:

$t_n = -269$; $t_0 = 131$; $r = -4$

$$\Rightarrow n = \frac{-269-(131)}{-4} = 100$$

Rpta: la sucesión tiene 100 términos,.

III. Cálculo del 2do. término negativo

Establecemos la inecuación para calcular los valores de n que hacen aparecer los términos negativos de la P.A.

Como $t_n = -4n+131 \Rightarrow -4n + 131 < 0$

$\frac{131}{4} < n \quad 32{,}75 < n$

luego, los términos de la sucesión a partir de n=33 son negativos.

Para n = 33 $\Rightarrow$ $t_{33} = -4(33) + 131$

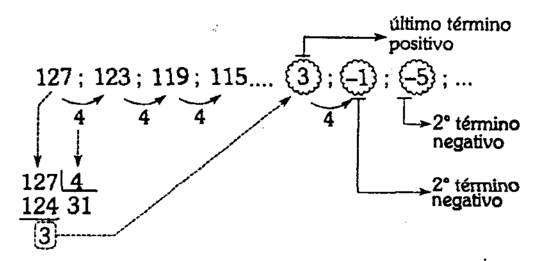
$t_{33} = -1$ . . . (1° término negativo)

Para n = 34 $\Rightarrow$ $t_{34} = -4(34) + 131$

$t_{34} = -5$ . . . (2° término negativo)

Segunda forma (método práctico)

Se tiene:



∴ –5 es el segundo término negativo de esta progresión decreciente.

¿En que se fundamenta esta forma practica?

¿Se cumplirá también para progresiones aritméticas crecientes?

Ejemplo 3

Dada la P.A. –147 ; –139 ; –131 ; 1045

Calcula:

I. El término enésimo.

II. Cantidad de términos de la P.A.

III. El primer término positivo

Resolución:

I. Cálculo del término enésimo

$$-147 \; ; -139 \; ; -131 \; ; -123 \; ; \ldots$$
+8 +8 +8 +8

Se observa:

$r = 8 \quad t_0 = -147 - 8 = -155$

$\Rightarrow t_n = 8n - 155$

II. Cantidad de términos:

$$n = \frac{1045-(-155)}{8} = 150$$

La sucesión tiene 150 términos

III. Cálculo del primer término positivo

Como $t_n = 8n-155 \rightarrow 8n-155 > 0$

$n > 19{,}3$

Al resolver la inecuación propuesta se consiguen los valores de n que hacen aparecer términos positivos de la P.A, Para valores de n≥20 se obtienen términos positivos.

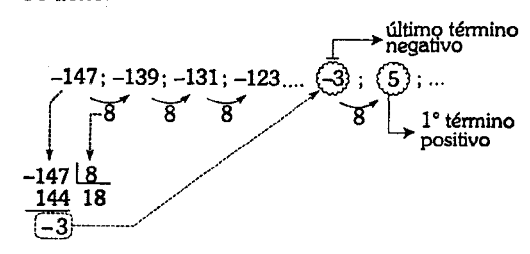
Entonces para n = 20

Tendremos: $t_{20} = 8(20) - 155$

Luego: $t_{20} = 5$ (1er. término positivo)

Forma práctica:

Se tiene:



∴ 5 es el primer término positivo de esta progresión aritmética creciente

Otra vez hemos empleado el método práctico del problema anterior. ¿Averiguaste de dónde sale el método?

Ejercicio:

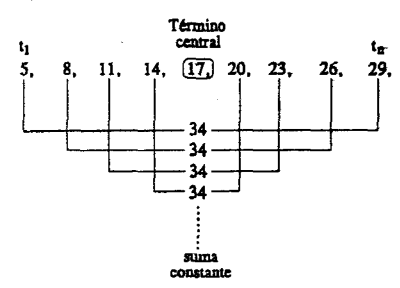
Probar que el método práctico mencionado es consecuencia de la aplicación del algoritmo de la división en relación con la expresión del término enésimo de una P.A,

Nota:

- En toda progresión aritmética se cumple que la suma de términos extremos o equivalentes de los extremos es constante.
- Si el número de elementos de una progresión aritmética es impar, entonces existirá un único término central (t_c) cuyo valor es igual a la semisuma de los extremos o equidistantes de los extremos.

Ejemplo:

Sea la P.A. de razón 3



También: $17 = \dfrac{5+29}{2} = \dfrac{8+26}{2} = \dfrac{11+23}{2}$

$$t_c = \frac{t_1+t_n}{2} = \frac{t_2+t_{n-1}}{2} = \frac{t_3+t_{n-2}}{2} = \ldots$$

SUCESIÓN ARMÓNICA O PROGRESIÓN ARMÓNICA

Se denomina así a la sucesión numérica en la cual se cumple que cada término a partir del segundo es media armónica del término que le precede y del término que continúa.

Recordemos:

Media armónica de 2 cantidades:
$$M.H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

Ejemplo 1

a) $1\,;\ \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \dfrac{1}{4}\,;\ \dfrac{1}{5}\,;\ \ldots$

Aquí el término enésimo de esta sucesión es:

$$t_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cálculo de t_2:

$$t_2 = \frac{2(1)\left(\frac{1}{3}\right)}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$t_3 = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$t_4 = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 2

$\dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{2}{9}\,;\ \dfrac{2}{15}\,;\ \dfrac{2}{21}\,;\ \dfrac{2}{27}\,;\ \ldots$

El término enésimo es: $t_n = \dfrac{2}{6n-3}$

Cálculo de t_2:

$$t_2 = \frac{2t_1 \times t_3}{t_1 + t_3} \Rightarrow t_2 = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{15}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{2}{15}} = \frac{2}{9}$$

$$t_3 = \frac{2t_2 \times t_4}{t_2 + t_4} \Rightarrow t_3 = \frac{2\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{21}\right)}{\frac{2}{9}+\frac{2}{21}} = \frac{2}{15}$$

$$t_4 = \frac{2t_3 \times t_5}{t_3 + t_5} \Rightarrow t_4 = \frac{2\left(\frac{2}{15}\right)\left(\frac{2}{27}\right)}{\frac{2}{15}+\frac{2}{27}} = \frac{2}{21}$$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

y así sucesivamente.

Ejercicios:

I. Observa el denominador de la fracción que expresa el término enésimo de este ejemplo y del anterior ¿Aprecias algo notable?

II. ¿Existe alguna relación entre la sucesión armónica y la progresión aritmética?

En general, si tenemos una progresión armónica t_1; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; . . ., entonces se cumple:

$$t_2 = \frac{2t_1t_3}{t_1+t_3} \qquad t_3 = \frac{2t_2 \times t_4}{t_2+t_4} \qquad t_4 = \frac{2t_3 \times t_5}{t_3+t_5}$$

$\vdots$

Luego, el término general de una progresión armónica viene dada por la expresión:

$$t_n = \frac{2t_{n-1} \times t_{n+1}}{t_{n-1}+t_{n+1}}$$ **Fórmula de Recurrencia**.

Observación:

Para poder construir una progresión armónica debemos tener, como mínimo 2 términos consecutivos cualesquiera de la progresión.

Ejemplo 1

Si sabemos que los términos tercero y cuarto de una progresión armónica son $\frac{1}{13}$ y $\frac{1}{17}$ respectivamente, podremos reconstruir la progresión. Veamos:

$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \\ \square; & \square; & \frac{1}{13}; & \frac{1}{17}; & \square; & \square; \ldots\ldots \end{matrix}$$

Cálculo de t_2:

Como $t_3 = \dfrac{2t_2 \times t_4}{t_2+t_4}$ y son conocidos t_3 y t_4 entonces despejamos:

$$t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{t_3 \times t_4}{2t_4 - t_3}$$

De acuerdo a esto

$$t_2 = \frac{\left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{17}\right)}{2\left(\frac{1}{17}\right)-\left(\frac{1}{13}\right)} = \frac{1}{9}$$

Análogamente, calculamos:

$$t_1 = \frac{t_2 \times t_3}{2t_3 - t_2}$$

$$t_1 = \frac{\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{13}\right)}{2\left(\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{9}\right)} = \frac{1}{5}$$

Procediendo de igual forma tendremos:

$$t_5 = \frac{1}{21} \text{ y } t_6 = \frac{1}{25}$$

Luego, la progresión armónica sería:

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{9}; \frac{1}{13}; \frac{1}{17}; \frac{1}{21}; \frac{1}{25}; \ldots ; \frac{1}{4n+3}; \ldots$$

El término enésimo $t_n = \dfrac{1}{4n+3}$ se ha obtenido en este caso tomando en cuenta la sucesión formada por los denominadores de los términos de la progresión armónica (dichos números están formando una **progresión aritmética**).

Observación:

Las inversas de los términos de una progresión armónica forman una progresión aritmética.

De acuerdo a esto podríamos construir una progresión armónica tomando una progresión aritmética e invirtiendo sus términos, pero ¡cuidado! la sucesión aritmética escogida no deberá tener un elemento nulo, es decir, cero; pues su inversa no tendría sentido.

Ejemplo 1

La sucesión:

$$\frac{2}{7};\frac{2}{13};\frac{2}{19};\frac{2}{25};\ldots\frac{2}{6n+1};\ldots$$

es una progresión armónica. Si se invierte los términos de la misma, podrá verificarse que forman una progresión aritmética.

En efecto, al invertir queda:

$$\frac{7}{2};\frac{13}{2};\frac{19}{2};\frac{25}{2};\ldots$$

P.A. de razón (r = 3)

Ejemplo 2

Si invertimos los términos de la progresión armónica:

$$\frac{1}{4};\frac{1}{7};\frac{1}{10};\frac{1}{13}\ldots$$

obtendremos la P.A.

4; 7; 10; 13 . . . . .

Ejemplo 3

Si tomamos la P.A. $\frac{4}{7};\frac{11}{7};\frac{18}{7};\frac{25}{7};\ldots,$

al invertir sus términos, tendríamos:

$\frac{7}{4};\frac{7}{11};\frac{7}{18};\frac{7}{25};\ldots$ la cual es una progresión armónica ¡¡Compruébalo!!

Nota:

En la sucesión natural: 1, 2, 3, ... , N; donde N es un número de K cifras, se puede conocer la cantidad de cifras utilizadas para escribirla mediante la siguiente expresión:

$$\text{cantidad de cifras usadas} = (N+1) - \underbrace{111\ldots111}_{k\ cifras}$$

Así, al escribir: 1, 2, 3, ..., 25 N=25 y K=2 habremos empleado una cantidad de cifras = (25 + 1)2 − 11 = 41

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Denominamos progresión geométrica a la sucesión en la cual, dado un primer término diferente de cero, cada término que continúa a partir del segundo, se obtiene del inmediato anterior al mutiplicarlo por un número diferente de cero llamado cociente común o **razón geométrica constante** de la sucesión, la cual será denotada por **q**.

Si q>1, la progresión es creciente

Si |q| < ,1 la progresión es decreciente

Ejemplo:

La sucesión geométrica:

$$2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54 \xrightarrow{\times 3} 162 \xrightarrow{\times 3} \ldots$$

Presenta la característica de tener razón geométrica constante que en este caso es q = 3

Si apreciamos:

$t_1 = 2 \times 3^{0}$

$t_2 = 2 \times 3^{1}$

$t_3 = 2 \times 3^{2}$

$t_4 = 2 \times 3^{3}$

⋮

$t_n = 2 \times 3^{n-1}$

Entonces el término enésimo de la sucesión es:

$$t_n = 2 \times 3^{(n-1)}$$

$(n-1)$ → Exponente

2 → Primer término

3 → Razón geométrica

En general, si $\underbrace{t_1 ; t_2}_{\times q} ; \underbrace{t_3}_{\times q} ; \underbrace{t_4}_{\times q} ; \underbrace{......}_{\times q} ; t_n ...$ es una progresión geométrica, entonces:

$$t_1 = t_1 \times q^{0}$$
$$t_2 = t_1 \times q^{1}$$
$$t_3 = t_1 \times q^{2}$$
$$t_4 = t_1 \times q^{3}$$
$$t_5 = t_1 \times q^{4}$$
$$\vdots$$
$$t_n = t_1 \times q^{n-1}$$

El término general de una progresión geométrica cualquiera viene dada por la expresión:

donde:

t_n = término enésimo
t_1 = primer término
q = razón geométrica
n = número de términos (indica el lugar que ocupa un término dado)

Ejemplo 1

Halle el término enésimo en cada una de las siguientes progresiones geométricas.

a) 3 ; 12 ; 48 ; 192 ; .....
(×4 ×4 ×4 ×4)

Resolución:

$\therefore q = 4$; $t_1 = 3$; luego $t_n = 3 \times 4^{n-1}$

b) $40 ; 10 ; \frac{5}{2} ; \frac{5}{8} ;.....$
($\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$ $\times\frac{1}{4}$)

Resolución;

$$q = \frac{1}{4} \quad t_1 = 40 \Rightarrow t_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

c) $1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{16} ; .....$
($\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$)

Resolución:

$$q = \frac{1}{2} \quad t_1 = 1$$

$$\Rightarrow t_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

d) $108 ; 36 ; 12 ; 4 ; \frac{4}{3} ; ......$
($\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$)

Resolución:

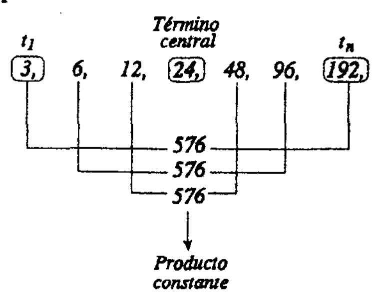
$$q = \frac{1}{3} \quad t_1 = 108$$

$$\Rightarrow t_n = 108 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Nota:

- En una progresión geométrica se cumple que el producto de términos equidistantes de sus extremos tiene un resultado constante.
- Si la progresión tiene un número impar de términos, entonces el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los términos equidistantes de sus extremos.

Ejemplo:



También: $24 = \sqrt{3 \times 192}$

$$t_{central} = \sqrt{t_1 \times t_n} = \sqrt{t_2 \times t_{n-1}} = \sqrt{t_3 \times t_{n-2}} ...$$

SUCESIÓN POLINOMIAL

En principio, debemos mencionar que se denominan sucesiones polinomiales a aquellas cuyo término enésimo t_n viene expresado como un polinomio en variable n, donde $n \in \mathbb{N}$.

$$t_n = a_1n^K + a_2n^{K-1} + \ldots + a_{K-1}n^2 + a_Kn + a_{K+1} \quad K \in \mathbb{Z}^+, \; a_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1,2,3;\ldots, K$$

Según el máximo valor numérico del exponente de la variable n se le denomina sucesión lineal, sucesión cuadrática, sucesión cúbica y así sucesivamente; o también sucesión de primer orden, sucesión de segundo orden, sucesión de tercer orden, etc. (respectivamente).

Hemos estudiado ya páginas atrás las sucesiones aritméticas lineales o de primer orden, llamadas también *progresiones aritméticas*; por lo tanto, comenzaremos este apartado con el estudio de las sucesiones cuadráticas.

SUCESIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO ORDEN

Las sucesiones polinomiales cuadráticas o de segundo orden son aquellas cuyo término enésimo viene dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{t_n = an^2 + bn + c} \quad a \neq 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

donde:

n: indica la cantidad de términos o el lugar que ocupa un término de la sucesión.

a, b y c son constantes cualesquiera en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1

Escribe explícitamente la sucesión cuyo término enésimo es: $t_n = n^2 - 2n + 1$

Resolución:

Si $n \in \mathbb{N}$, entonces vamos a tomar los valores de "n" y reemplazarlos en la expresión dada. Así:

para $n = 1 \rightarrow t_1 = 1^2 - 2(1) + 1 = 0$

para $n = 2 \rightarrow t_2 = 2^2 - 2(2) + 1 = 1$

para $n = 3 \rightarrow t_3 = 3^2 - 2(3) + 1 = 4$

para $n = 4 \rightarrow t_4 = 4^2 - 2(4) + 1 = 9$

para $n = 5 \rightarrow t_5 = 5^2 - 2(5) + 1 = 16$

⋮

luego la sucesión pedida es: 0; 1; 4; 9; 16; . . .

Pudimos escribir el término enésimo de manera más sencilla. De esta forma:

$t_n = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$, luego $t_n = (n-1)^2$ siendo los cálculos, en este caso, más rápidos.

Para n :	1	2	3	4	5	. . . . .
$t_n = (n-1)^2$:	0	1	4	9	16	. . . . .

Ejemplo 2

Escribe los términos de la sucesión cuyo término enésimo es: $t_n = 3n^2 + 1$

Resolución:

Para n :	1	2	3	4	5	. . . . .
$t_n = 3n^2+1$:	4	13	28	49	76	. . . . .

Luego la sucesión es:

4; 13; 28; 49; 76; . . . . . .

Procederemos a calcular el término enésimo de una sucesión cuadrática conociendo los términos de la misma.

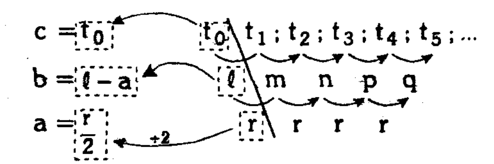
REGLAS PRÁCTICAS PARA CALCULAR EL TÉRMINO ENÉSIMO DE UNA SUCESIÓN CUADRÁTICA

1° Regla

Sean t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; . . . . ; t_n ; . . . . . términos de una sucesión cuadrática cuyo término enésimo se da por:

$$\boxed{t_n = an^2 + bn + c} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

El cálculo de a, b y c se realiza de la siguiente manera:



Procedimiento:

$$a = \frac{r}{2}$$

Paso 1

Obtenemos **a** dividiendo entre 2 al valor de **r** (razón constante)

$$b = \ell - \frac{r}{2}$$

Paso 2

Para calcular **b** restamos del número ℓ el valor obtenido para **a** en el paso anterior

$$c = t_0$$

Paso 3

El valor de **c** es igual al valor del término anterior al primero es decir $\mathbf{t_0}$.

Debemos enfatizar el carácter práctico de esta regla. No estamos llevando a cabo una demostración rigurosa, sino damos las pautas de una regla sencilla. Además, se podría obtener el término enésimo de la sucesión cuadrática por otros métodos como el de ecuaciones; fórmulas de recurrencia; o aplicando números combinatorios. Estudiaremos más adelante los dos últimos métodos mencionados.

Ejemplo 1

Calcule el término enésimo de la siguiente sucesión: 5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41 ; . . . . . .

Resolución:

Hallaremos las diferencias entre cada uno de los términos de la sucesión:

Sucesión : 5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41 ⟹ **En esta sucesión la razón no es constante.**

1° orden : +6 + 8 + 10 + 12 ⟹ **Estos números estan formando una P.A.**

2° orden : +2 +2 +2 ⟹ **La razón constante de la P.A. es 2 y esta en el 2° orden después de la sucesión**

Hemos anotado la sucesión y calculado la diferencia de sus términos escribiéndola en la 1ra. línea (estos números son distintos, es decir la razón no es constante); luego, hallamos la diferencia entre los términos de la 1ra. línea y el resultado es siempre 2. Nos detenemos aquí porque hemos encontrado ya una razón constante recién en la segunda línea después de la sucesión.

En una sucesión cuadrática la razón constante se halla en el 2do. orden después de la sucesión; en una sucesión cúbica encontraremos la razón constante en el 3er. orden después de la sucesión y así sucesivamente.

Hasta ahora tenemos:

1 \ 5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41

4 \ 6 8 10 12

2 \ 2 2 2

Se ha trazado además una línea oblicua y se ha calculado los **términos anteriores** ubicándolos al lado izquierdo de la línea.

Como sabemos que el término enésimo de una sucesión cuadrática es de la forma:

$$\boxed{t_n = an^2+bn+c}$$

Solo nos falta calcular los valores de a, b y c. y para ello ubicaremos dichas constantes como sigue:

c = ( ) **1** \ 5 ; 11 ; 19 ; 29 ; 41 ; ...

b = ( ) **4** \ 6 8 10 12

a = ( ) ÷2 **2** \ 2 2 2

El cálculo de a, b y c es sencillo, veamos:

$$a = \frac{2}{2} = 1 \ ; \quad b = 4-a = 4-1 = 3 \ ; \quad c = 1$$

luego, el término enésimo de esta sucesión cuadrática será:

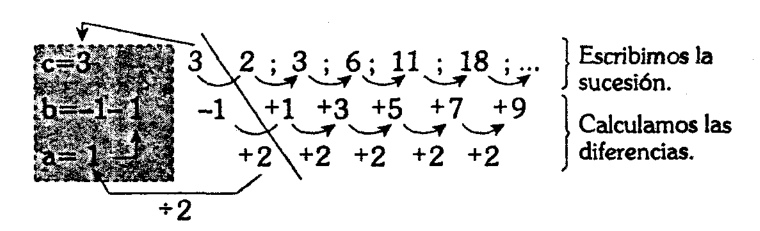
$$t_n = 1n^2 + 3n + 1 \quad \rightarrow \quad t_n = n^2 + 3n + 1$$

Quizás diga: "¡Qué, extenso y laborioso!" pero debes darte cuenta que por ser este el primer ejemplo, teníamos que explicar con mayor detalle la resolución. Estudia ahora el siguiente ejemplo. Pues vamos a ser más concretos, ¡atención!

Ejemplo 2

Halle el término enésimo de la sucesión: 2 ; 3; 6 ; 11 ; 18 ; . . . . .

Resolución:



Luego: a = 1, b = −2 y c = 3

$\therefore \ t_n = 1n^2-2n+3$ } *Escribimos finalmente el* término enésimo

En el siguiente ejemplo ya no haremos comentarios. Intente hacerlo y luego mire la solución. Pero si aún no ha entendido la aplicación de la 1ra. regla práctica, es hora de volver al principio y repasar la exposición hasta comprenderla; si aún duda, busque la guía y el apoyo de su profesor o resuelva los problemas en grupo.

Ejemplo 3

Escribe el término enésimo de la sucesión: 2 ; 7 ; 13 ; 20; 28; . . . . . .

Resolución:

-2 \ 2 ; 7 ; 13 ; 20 ; 28 ; .....

4 \ 5 6 7 8

+1 \ +1 +1 +1

$a = \frac{1}{2}$ $b = 4-\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ $c = -2$

luego: $t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 2$

Ejemplo 4

Dada la sucesión: –5 ; –9 ; –9 ; –5 ; 3 ; . . . .
Halle su término enésimo.

Resolución:

3 \ -5 ; -9 ; -9 ; -5 ; 3 ; ...

-8 \ -4 0 +4 +8

+4 \ +4 +4 +4

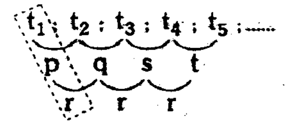
a = 2	b = –10	c = 3

Luego: $t_n = 2n^2 - 10n + 3$

Suele usarse también una 2da. regla práctica para calcular el término enésimo de una sucesión cuadrática, en cierto modo derivada de la primera regla práctica. Veamos:

2da Regla

Dada la sucesión cuadrática de términos: t_1 ; t_2 ; t_3 ; . . . . . donde:



El término enésimo de ella puede calcularse directamente con los datos mostrados como sigue:

$$t_n = \left(\frac{r}{2}\right)n^2 + \left[p - 3\left(\frac{r}{2}\right)\right]n + (t_1 - p + r)$$

Comparativamente hablando:

$$t_n = \underset{\smile}{a}n^2 + \underset{\smile}{b}n + \underset{\smile}{c}$$

Luego:

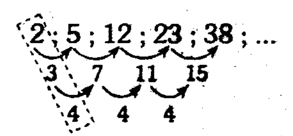
$$a = \frac{r}{2}$$
$$b = p - 3\left(\frac{r}{2}\right)$$
$$c = t_1 - p + r$$

Ejemplo 1

Calcule el término enésimo de la sucesión:
2; 5; 12; 23; 38; . . . . .

Resolución:

Escribimos la sucesión y calculamos las diferencias correspondientes:



notamos:

$a = \frac{4}{2} = 2$ $b = 3 - 3\left(\frac{4}{2}\right)$ $c = 2 - 3 + 4$

luego:

$$t_n = \left(\frac{4}{2}\right)n^2 + [3 - 3(2)]n + (2 - 3 + 4)$$

$\therefore t_n = 2n^2 - 3n + 3$

Ejemplo 2

Halle el término enésimo de la sucesión:

2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; . . . . .

Resolución:

2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; ....
3 5 7 9
2 2 2

Entonces:

$$t_n = \left(\frac{2}{2}\right)n^2 + [3 - 3(1)]n + (2 - 3 + 2)$$

Luego: $t_n = n^2 + 0n + 1$

$\therefore\ t_n = n^2 + 1$

Ejemplo 3

En el colegio Bertolt Brecht los alumnos son evaluados quincenalmente. Los puntajes que obtiene la alumna Sofía en sus pruebas de educación física son:

Nº prueba	Puntajes
1°	2
2°	5
3°	10
4°	17
⋮	⋮

Si mantiene sus puntajes con la regularidad que puede observarse, ¿cuánto obtendrá en la décima primera prueba?

Resolución:

Escribamos la sucesión formada por las notas obtenidas y calculemos las diferencias respectivas.

2 ; 5 ; 10 ; 17 ; 26 ; ....
3 5 7 9
2 2 2

Podemos notar que la sucesión mostrada es la misma del ejemplo anterior, cuyo término enésimo es:

$$t_n = n^2 + 1$$

luego para $n = 11$ (décimo primera prueba)

tendremos:

$$t_{11} = 11^2 + 1$$

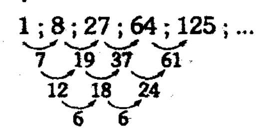
$$t_{11} = 122$$

Luego, Sofía obtendrá 122 puntos en la 11° prueba.

SUCESIONES POLINOMIALES DE ORDEN MAYOR QUE DOS

Observemos las siguientes sucesiones y sus diferencias respectivas:

1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ...
3 5 7 9
2 2 2

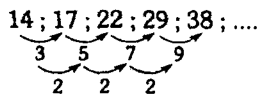


En la primera de ellas (de la izquierda), se nota que la razón constante se encuentra en el segundo orden después de la sucesión mientras que en la otra podemos ver que la razón constante está en el tercer orden después de la sucesión. El término enésimo de la primera es fácil de calcular y hemos estudiado ya sus características. En cuanto a la 2da. sucesión podríamos hallar su término enésimo haciendo uso de los números combinatorios o aplicando las técnicas de fórmula de recurrencia para sucesiones no lineales.

1ER MÉTODO: FÓRMULA DE RECURRENCIA PARA SUCESIONES NO LINEALES

Ejemplo 1

Consideremos la sucesión: 14; 17 ; 22 ; 29 ; 38 ; .... y calculemos las respectivas diferencias.



Podemos asumir que los dos primeros términos de la sucesión dada (aquí 14 y 17) están formando una sucesión aritmética lineal de razón 3; luego su término enésimo sería:

$$t_n = 3n + 11$$

De hecho está fórmula va a cumplir con darnos los dos primeros términos de la sucesión dada, pero falla en los demás casos.

En efecto:

Para $n = 1 \Rightarrow t_1 = 3(1) + 11 = 14$ cumple

Para $n = 2 \Rightarrow t_2 = 3(2) + 11 = 17$ cumple

Para $n = 3 \Rightarrow t_3 = 3(3) + 11 = 20$ Falla!!

Pues $t_3 = 22$

Como aprecias, a partir de $n = 3$ y sucesivos, la fórmula encontrada falla; pues resulta que t_3 es 20, cuando en realidad $t_3 = 22$. Ahora, agregaremos a la fórmula inicial, una expresión adecuada tal que sumada al número obtenido (20) nos dé como respuesta el verdadero número (22). Dicha expresión que vamos a agregar no debe influir en el cálculo de los dos primeros resultados ($t_1 = 14$ y $t_2 = 17$) y para que ello ocurra debe anularse para $n = 1$ y $n = 2$; luego debe ser un producto que tenga como factores a $(n - 1)$ y $(n - 2)$; o generalmente: $k(n - 1)(n - 2)$ (siendo K un valor constante)

Entonces tendremos:

$t_n = 3n + 11 + k(n-1)(n-2)$ (fórmula de recurrencia) para $n = 1$ y $n = 2$

Se verifica la obtención de t_1 y t_2;

ahora,, para $n = 3$ tendremos:

$$t_3 = \underbrace{3(3) + 11}_{} + k(3-1)(3-2)$$

$$22 = 20 + 2k \text{ de donde } k = 1$$

Hemos calculado ya el valor de la constante que faltaba y reemplazándolo en la fórmula de recurrencia nos queda:

$$\boxed{t_n = 3n + 11 + (n-1)(n-2)}$$

Expresión que será , finalmente, la fórmula general de la sucesión dada. Simplificando queda:

$t_n = n^2 + 13$

Si en esta expresión hacemos $n = 5$ obtendremos:

$t_5 = 3(5) + 11 + (5-1)(5-2) = 38$

verificándose la validez de la fórmula obtenida por recurrencia.

O también: $t_5 = 5^2 + 13 = 38$

Ejemplo 2

Calcule el décimo término de la sucesión:

–4; –2; 0; 14, 52 .....

Resolución:

$$-4 \; ; \; -2 \; ; \; 0 \; ; \; 14 \; ; \; 52 \; ; \; \ldots$$
$$+2 \quad +2 \quad +14 \quad +38$$

Observa que los 3 primeros términos de la sucesión están formando una P.A. de razón 2,

Para ésta tendremos: $t_n = 2n - 6$

Esta fórmula que se cumple hasta $n = 3$ no cumple para $n = 4$, representando:

$(t_4 = 2(4) - 6 = 2)$

En el ejemplo anterior, se agregó una expresión adecuada para que se anule los tres primeros valores de n; es decir, para $n = 1$, 2 y 3 y no influya en el calculo de los 3 primeros términos.

Agregaremos en este caso: $k(n-1)(n-2)(n-3)$

Así:

$t_n = 2n - 6 + k(n - 1)(n - 2)n - 3)$. Calculamos **k** haciendo aquí $n = 4$

Para $n = 4$ $\quad t_4 = \underbrace{2(4) - 6}_{} + k(3)(2)(1)$

$$14 = 2 + 6k$$

$$\therefore k = 2$$

luego: $\boxed{t_n = 2n - 6 + 2(n-1)(n-2)(n-3)}$

Haciendo aquí n = 5 tendremos:

$t_5 = 2(5)-6+2(4)(3)(2)$

$t_5 = 52$ (verificando que cumpla)

Nos piden $t_{10} = 2(10) - 6 + 2(9)(8)(7)$

$$t_{10} = 14 + 1008$$

$$\therefore \; t_{10} = 1022$$

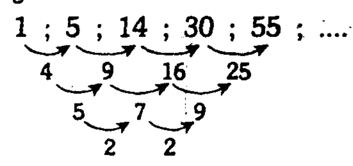
Ejemplo:

Calcule el término enésimo de:

1 ; 5 ; 14 ; 30 , 55 ; . . .

Resolución:

Escribimos la sucesión y calculamos las diferencias como sigue:



La razón constante se halla en la tercera línea después de la sucesión; luego esto nos permite afirmar que la fórmula que exprese el término enésimo será una cúbica. Pero en realidad, no hace falta calcular todas las diferencias para hallar el término enésimo. Bastará asumir, como al principio, que los dos primeros términos están formando una P.A. cuyo término enésimo es 4n–3 y luego, proceder como en los ejemplos anteriores. Así:

$t_n = 4n - 3$ expresión que cumple para n = 1 y n=2 pero falla para n=3.

Entonces:

$t_n = 4n - 3 + k(n-1)(n-2)$

si n = 3 tendremos:

$t_3 = 4(3)-3 + k(2)(1)$

$14 = 9 + 2k$

De donde:

k = 5/2

luego: $t_n = 4n-3+\dfrac{5}{2}(n-1)(n-2)$

Esta expresión es cuadrática y cumple para n = 1, 2 y 3; pero falla en n=4, y esto ocurre, como indicamos al principio en el término enésimo que es una cúbica.

Lo anterior, nos obliga a agregar, a la fórmula que tenemos, una nueva expresión que se anule para n=1, 2 y 3 pero que contribuya a calcular el cuarto término y los que siguen. Veamos:

$$t_n = 4n-3+\frac{5}{2}(n-1)(n-2)+k(n-1)(n-2)(n-3)$$

Para n=4

$$t_4 = 4(4)-3+\frac{5}{2}(3)(2)+k(3)(2)(1)$$

$$30 = 13 + 15 + 6k$$

Resolviendo:

$$k = \frac{1}{3}$$

Luego, la fórmula general será:

$$t_n = 4n-3+\frac{5}{2}(n-1)(n-2)+\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$

Esta expresión es de grado 3 (cúbica) y se cumple $\forall\, n \in \mathbb{N}$ generando los términos de la sucesión dada.

Simplificando queda $t_n = \dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

finalmente $t_n = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Ejemplo:

Calcule el valor de S en:

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2$

Resolución:

Esta expresión recibe el nombre de serie y la hemos citado aquí porque hay una manera de calcular su valor haciendo uso de la teoría de sucesiones. **Primero convertimos la serie en una sucesión de la siguiente manera**:

$t_1 = 1^2 \qquad = 1$
$t_2 = 1^2 + 2^2 \qquad = 5$
$t_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \qquad = 14$
$t_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \qquad = 30$
$t_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \qquad = 55$
$\vdots$
$t_n = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots. + n^2 \quad = S$

Luego:

$t_1 \; ; \; t_2 \; ; \; t_3 \; ; t_4 \; ; \; t_5 \; ; \ldots\ldots \; t_n$
$1 \; ; \; 5 \; ; \; 14 \; ; 30 \; ; \; 55 \; ; \ldots\ldots . S$

Pero, si observamos bien, notaremos que esta sucesión es la misma del ejemplo anterior, para la cual habíamos calculado su término enésimo:

$$t_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Por lo tanto, podemos deducir que hay una relación estrecha entre sucesión y serie. Veamos: $\mathbf{t_1}$ es el primer sumando; $\mathbf{t_2}$ es la suma de los **dos** primeros términos de la serie; $\mathbf{t_3}$ es la suma de los **3** primeros sumandos; $\mathbf{t_4}$ es la suma de **4** sumandos y así sucesivamente hasta que el $\mathbf{t_n}$ de la sucesión es la suma de los "**n**" primeros términos de la serie dada.

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$

$$\therefore \; S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2DO. MÉTODO: USO DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

En principio definiremos C_k^n de la siguiente manera:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} \qquad \forall\, 1 \leq k \leq n \quad k \in \mathbb{N} \; ; \; n \in \mathbb{N}$$

Ahora observemos la siguiente sucesión:

$t_1 \; ; \; t_2 \; ; \; t_3 \; ; \; t_4 \; ; \; t_5 \; ; \; t_6 \; ; \ldots$
$a \quad b \quad c \quad d \; \ldots$
$m \quad n \quad p \; \ldots$
$r \quad r \; \ldots$
(I)

El término enésimo de la sucesión se da por la siguiente expresión:

$$t_n = t_1 C_0^{n-1} + a C_1^{n-1} + m C_2^{n-1} + r\, C_3^{n-1}$$

Es necesario señalar que la anterior expresión corresponde a la sucesión genérica señalada en (I). Ésta, como se puede apreciar, presenta la razón constante en la 3ra. línea después de la sucesión, (es una sucesión polinomial de tercer orden), mas ¿para una sucesión de cuarto orden o más?, pues el proceso puede continuarse de acuerdo a la secuencia lógica de relación de los números combinatorios con los números encerrados en la línea punteada. Así:

1° 2° 3° 4° 5° 6° ... n°
$t_1 \; ; \; t_2 \; ; \; t_3 \; ; \; t_4 \; ; \; t_5 \; ; \; t_6 \; ; \ldots \qquad t_n$
$r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad r_5$
$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$
$v_1 \quad v_2 \quad v_3$
$z \quad z \; \ldots \quad \longleftarrow$ cte.

$$t_n = t_1 C_0^{n-1} + r_1 C_1^{n-1} + P_1 C_2^{n-1} + V_1 C_3^{n-1} + Z C_4^{n-1}$$

¿Se dio cuenta?

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1

Calcule el 6to. término de la sucesión:

$4 \; ; 6 \; ; 11 \; ; 21 \; ; 38 \; ; \ldots\ldots.$

Resolución:

1° 2° 3° 4° 5° .....
④, 6 , 11 , 21 , 38 , ...
② 5 10 17 26
③ 5 7 9
② 2 2

$$\Rightarrow \; t_n = 4C_0^{n-1} + 2C_1^{n-1} + 3C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1}$$

$t_6 = 4C_0^5 + 2C_1^5 + 3C_2^5 + 2C_3^5$

$t_6 = 4(1) + 2(5) + 3(10) + 2(10)$

$t_6 = 4 + 10 + 30 + 20$

$\therefore \; t_6 = 64$

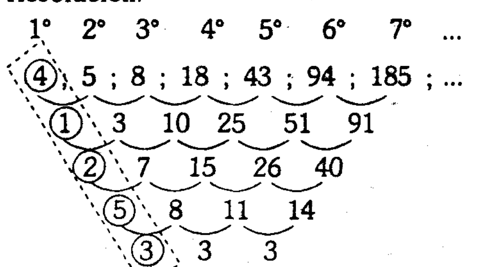
Ejemplo 2

Calcule el término enésimo de la siguiente sucesión:

4 ; 5 ; 8 ; 18 ; 43 ; 94 ; 185 ; . . . .

y dé como respuesta t_{15}.

Resolución:



luego:

$$t_n = 4C_0^{n-1} + 1C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1} + 5C_3^{n-1} + 3C_4^{n-1}$$

Entonces:

$$t_{15} = 4C_0^{14} + C_1^{14} + 2C_2^{14} + 5C_3^{14} + 3C_4^{14}$$

$$t_{15} = 4(1) + 14 + 2\left(\frac{14(13)}{2}\right) + 5\left[\frac{14(13)(12)}{1\times2\times3}\right] + 3\left[\frac{14(13)(12)(11)}{1\times2\times3\times4}\right]$$

$$t_{15} = 4 + 14 + 182 + 1820 + 3003$$

$$t_{15} = 5023$$

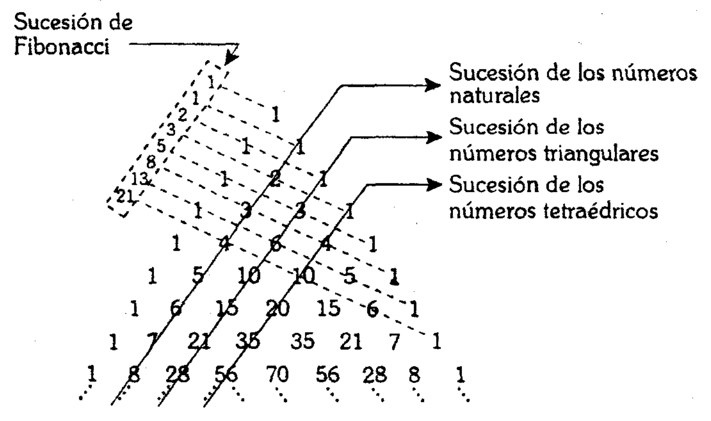
EL TRIÁNGULODE PASCAL

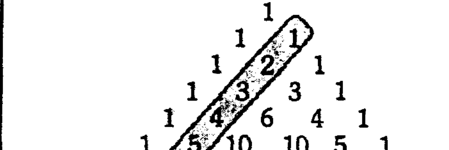
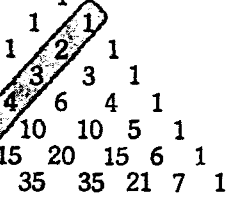
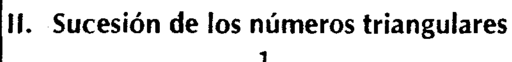
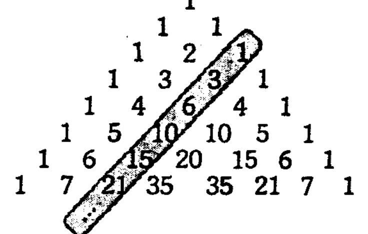
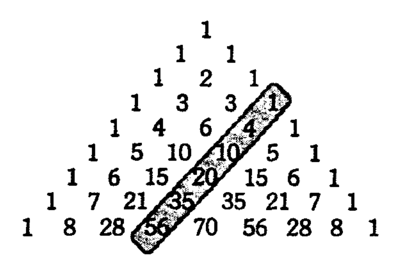
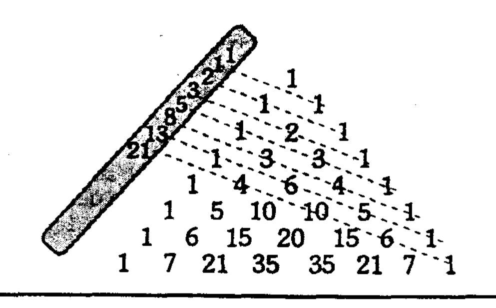
Es un arreglo numérico que tiene una forma triangular, así:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
⋰ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱

SUCESIONES NOTABLES EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Podemos mencionar las siguientes:



I. Sucesión de los números naturales	II. Sucesión de los números triangulares
 	 
III. Sucesión de los números tetraédricos	**IV. Sucesión de Fibonacci**
	

¿Que relación guarda el triángulo de Pascal con las sucesiones y con el binomio de Newton?

En el momento de estudiar la historia del desarrollo del binomio de Newton (impropiamente llamado), encontraremos que está ligado al desarrollo y evolución del triángulo de Pascal, el cual se inicia con el concepto de lo que es un número poligonal estudiado por la escuela pitagórica.

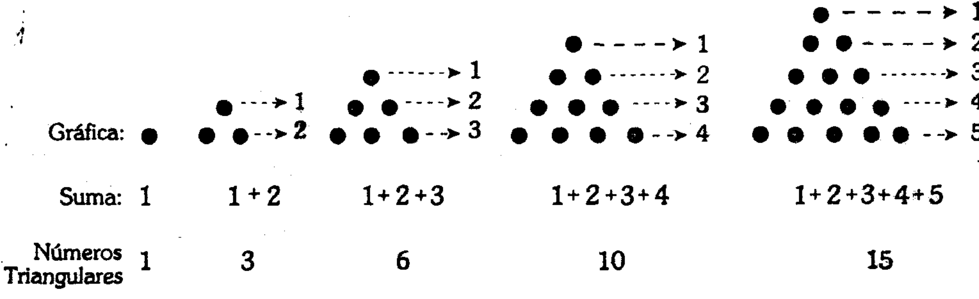
El número poligonal es uno cualquiera de los que se deducen de la fórmula general: $\dfrac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ donde $m \geq 2$:

Para $m = 2$, se obtiene los números naturales.
Para $m = 3$, se obtiene los números triangulares.
Para $m = 4$, se obtiene los números cuadrados y así sucesivamente (ver página 572 – 573)

Por ejemplo, para $m = 3$ tendremos: $\frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Es decir: $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ y se obtiene el término enésimo de la sucesión de los números triangulares.

Los números triangulares se forman por adición sucesiva de los números de la sucesión natural: 1; 2; 3; 4; 5 . . . . como sigue:



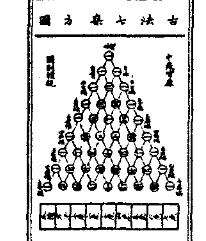
Como habrás visto, los puntos negros están ordenados "**formando triángulos**". Gracias a esta figura geométrica, reciben tal nombre.

La fascinación que causan estos números triangulares fue probablemente la inspiradora del llamado Triángulo de Pascal que lleva el nombre del primer matemático francés que prestó atención al tema de la probabilidad matemática fundamento de la moderna teoría estadística.

¿Dónde y cuándo aparecen los primeros vestigios del Triángulo de Pascal?

Es difícil establecer si fueron los chinos o los árabes los primeros en estudiar o aplicar esta distribución numérica para realizar los cálculos.

Uno de los más grandes poetas y matemáticos persas, Omar Khayyam (1 050 – 1 123) conocido como el "el fabricante de tiendas", escribió un libro titulado "Álgebra" que ampliaba la obra clásica de Al –Khawaizmi (muerto hacia el 850 d.n.e.), obra en la que menciona haber descubierto una regla sencilla para hallar las potencias de un binomio. Se refería a la distribución numérica que conocemos con el nombre de Triángulo de Pascal, según todos los indicios, apareció en China hacia la misma época. Tal coincidencia no es fácil de explicar pero a falta de evidencias se supone que fueron descubrimientos independientes.


La forma originaria del triángulo de Pascal

Yang Hui (hacia 1 261 d.c.), Matemático chino de cuya vida se tienen escasos datos, incluye en sus obras resultados acerca de la suma de series finitas y del llamado Triángulo de Pascal.

Mayor interés históricoy matemático tiene la obra: *Espejo precioso de los cuatro elementos*, escrito por Shu Shih – Chieh en 1 303 (según los 4 elementos son: el cielo, la tierra, el hombre y la materia). Este libro marca la cota más alta que alcanzo el desarrollo del álgebra china (se estudian ecuaciones simultaneas y ecuaciones individuales hasta de grado 14).

A la derecha apreciamos el Triángulo de Pascal, como aparece al comienzo del *Ssu Yuan Yü Chien* de *Chu Shih Chieh*, del año 1 303. Lleva el título de *El viejo método del diagrama de los siete cuadrados multiplicativos*, y en él figuran tabulados los coeficientes binomiales hasta la octava potencia.

Triángulo de Pascal tal como apareció impreso por primera vez en 1 527. En la Portada de la aritmética de Petrus Ingolstadí, 1 527, más de un siglo antes de que Pascal investigara las propiedades de dicho triángulo.

El Espejo precioso ... comienza con un diagrama del triángulo aritmético, conocido también en Occidente con el nombre inadecuado de Triangulo de Pascal y en este diagrama figuran los coeficientes de los distintos desarrollos binómicos hasta la octava potencia, escritos con toda claridad en el sistema de numerales a base de varillas y con un símbolo redondo para el cero. Chu no pretende en absoluto haber sido el autor del descubrimiento de este triángulo, sino que se refiere a él como "diagrama del viejo método para halar potencias octavas e inferiores". De hecho ya había aparecido en la obra de Yang Hui una distribución análoga de los coeficientes hasta la sexta potencia de un binomio, aunque sin utilizar el símbolo redondo para el cero, y en algunas obras chinas, hacia el 1 100, se encuentra referencias a sistemas de tabulación para el triángulo aritmético, y es probable que dicho triángulo aritmético tuviera su origen en China más o menos por estas fechas. Es interesante notar que el descubrimiento, por parte de los chinos, del teorema binomial para potencias enteras positivas, estuvo más asociado, en su origen a la extracción de raíces que al cálculo de potencias. Una forma equivalente de este teorema la conocía también Omar Khayyam por la misma época en que era utilizado en China. Pero la obra árabe más antigua que ha llegado a nosotros y que lo incluye se debe a Al-Kashi (principios del siglo XV) quien pública también el teorema binomial bajo la forma del Triángulo de Pascal un siglo después de su publicación en China y un siglo antes aproximadamente de aparecer impreso por vez primera en Europa, por Petrus Apianus.

El matemático y astrónomo alemán Petrus Apianus (1 495 – 1 552) publicó en 1 527 una aritmética comercial (El Rechmung) en la que aparece impreso el triángulo aritmético en la portada.

En la *Arithmetica Integra* de Michael Stiffel (1 487 – 1 567) aparece también dicho triángulo. Esta última obra es considerada como la más importante de todas las álgebras germánicas del siglo XVI.

Mientras Pascal se encontraba trabajando en sus *Cónicas*, en 1 654 su amigo el caballero de Mere le planteó algunas cuestiones sobre probabilidades. Pascal relacionó el estudio de las probabilidades con el triángulo aritmético, superando en sus discusiones la obra de Cardano en tal medida que la conocida distribución triangular de números ha venido recibiendo, desde entonces el nombre de triángulo de Pascal. El triángulo en sí databa de hacia más de 600 años, pero Pascal descubrió algunas propiedades inéditas de él, tales como la siguiente:

> *En todo triángulo aritmético, si dos celdas son contiguas en la misma base, entonces el número que figura, en la superior es al número que figura en la inferior como el número de celdas desde la superior al extremo más alto de dicha base es al número de las que van de la inferior hasta el extremo más bajo, ambas inclusive.*

Pascal llamaba a la posiciones de la misma columna vertical (ver fig. b) "celdas del mismo rango perpendicular", y a las de la misma fila horizontal " celdas del mismo rango paralelo"; a las celdas de la misma diagonal que va de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha, "celdas de la misma base". El método de demostración de esta propiedad es mucho más importante que la propiedad en sí porque aquí da Pascal, en 1 654, una exposición ejemplarmente clara y precisa del método de inducción matemática.

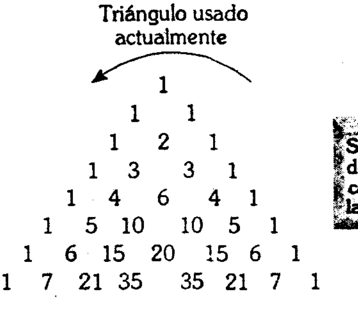
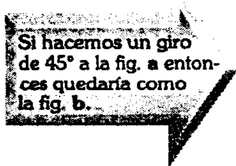


Fig. "a"



Triángulo usado por Pascal

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Fig. "b"

El triángulo de Pascal apareció en el *Tratado sobre el triángulo aritmético* del mismo autor, obra que fue editada en 1 685 después del fallecimiento de su creador. En dicho tratado fue publicada la tabla de la figura b en la que cada número A es igual a la suma del número anterior puesto en la fila horizontal en que se encuentra A y del número anterior puesto en fila vertical en que se encuentra también A.

Por lo tanto, nuestro Triángulo de Pascal difiere del triángulo que consideró el mismo Pascal con un giro de 45° (ver figuras a y b).

Cien años antes del tratado de Pascal la tabla que hoy es conocida en forma triangular fue publicada en la forma rectangular en el libro. *Tratado general sobre el número y la medida* (1 556 – 1 560) que también fue publicada después de la muerte de su autor el distinguido matemático italiano Nicola Fontana (Tartaglia) (1 500 – 1 557). Su tabla tenía la siguiente forma:

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

En la fila superior está compuesta por unidades y en cada una de las filas restantes el primer número es siempre la unidad. El que lo sigue se forma sumando los números que le preceden y están por encima (observa el ejemplo dado en la tabla). Ésta es la razón para que la tabla se llame **Rectángulo de Tartaglia**.

Lo que hizo Newton fue generalizar la fórmula de la potencia de un binomio para exponente no entero, pero fue de mayor trascendencia el aporte que hizo **Federico Villarreal** (1 850 – 1 923) nacido en Túcume, Lambayeque. A la edad de 22 años, descubrió el método para elevar no sólo un binomio sino un polinomio cualquiera a cualquier potencia (inclusive potencias complejas). Otro matemático peruano, Cristóbal de Losada y Puga, estudió profundamente dicho descubrimiento y lo llamó **Polinomio Villarreal**. De esto se deduce que el binomio de Newton es un caso particular de éste.

ALGUNAS PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

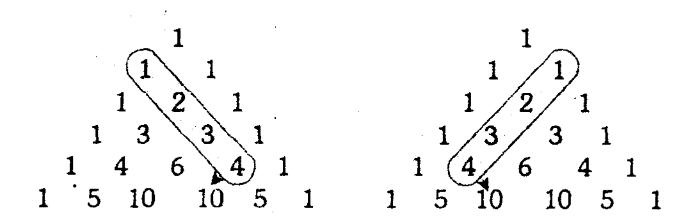
Pascal investigó detalladamente las propiedades y aplicaciones de su **triángulo**.

En cada propiedad mostraremos dos figuras (como ejemplo) una de ellas, la de la izquierda será la aplicación en el triángulo usado por Pascal y la otra la de la derecha, la aplicación en el triángulo usado actualmente.

PROPIEDAD 1

En la tabla cada número N es igual a la suma de los números de la fila horizontal anterior, partiendo de la izquierda hasta la dispuesta directamente por encima del número N (veáse la figura del ejemplo) Observa que las casillas que contienen los sumandos y que dan como suma N están sombreadas.

Ejemplo:

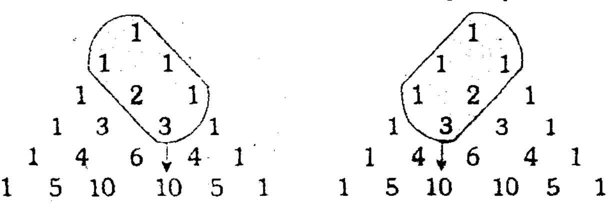


Aquí: $1+2+3+4=10$

PROPIEDAD 2

Cada número N de la tabla siendo disminuido en una unidad, es igual a la suma de todos los números que rellenan el rectángulo limitado por la fila y columna en cuya intersección se encuentra el número N (las propias filas y columna no se incluyen en el rectángulo que se considera).

Ejemplo:



Aquí: $10-1=1+1+1+2+1+3$

Observación:

1. El Triángulo de Pascal es simétrico con respecto a su bisectriz. Observe que los lados izquierdo y derecho de la figura 1 son simétricos.

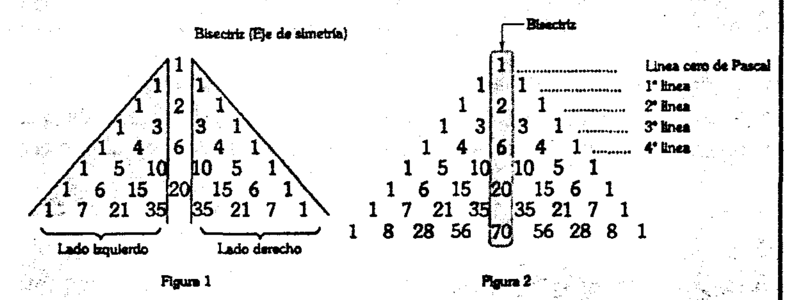


Figura 1 Figura 2

2. La suma de los cuadrados de los términos de la P - enésima línea siempre es igual al (P+ 1)-ésimo número ubicado en la bisectriz del mismo triángulo.

Ejemplo:

Sumemos los cuadrados de los números de la **tercera línea**:

$$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = \boxed{20}$$

→ **Este número está en 4° lugar en la bisectriz (contando de arriba hacia abajo)**

Análogamente:

Considerando los números de la **cuarta línea**:

$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = \boxed{70}$$

→ **Este número esta ubicado en el 5° lugar en la bisectriz**

3. Para todo número simple p (número primo P), todos los términos de la p–enésima línea, menos de los extremos, son divisibles por p.

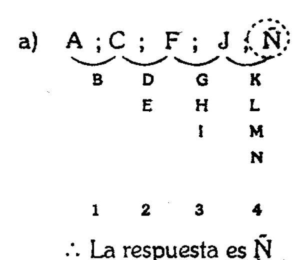
Así por ejemplo en la séptima línea (7 es número primo) todos los números que la conforman; excepto los extremos; son divisibles por 7. También en la 11° línea todos los números sin considerar los extremos son divisibles por 11; análogamente en la 13° línea y así sucesivamente.

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

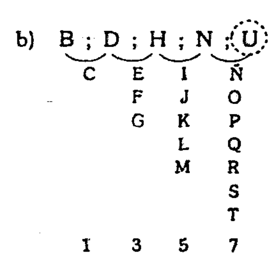
¿Qué letra continúa en cada sucesión?

a) A, C, F, J, ...
b) B, D, H, N, ...
c) A, B, E, F, I, J, ...
d) D, C, S, O, D, ...
e) E, V, D, I, N, O, ...

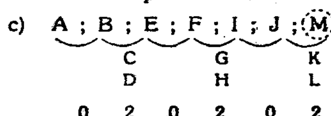


∴ La respuesta es Ñ

Resolución:



∴ La respuesta es U



∴ La respuesta es M

d) D ; C ; S ; O ; D ; (D)

Dos, Cuatro, Seis, Ocho, Diez, Doce

∴ La respuesta es D

d) E ; V ; D ; O ; N ; I ; (O)

Enero, Verano, Diciembre, Otoño, Noviembre, Invierno, Octubre

∴ La respuesta es O

PROBLEMA 2

Calcule el término enésimo de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 4, 9, 14, 19, ...
b) 36, 31, 26, 21, ...
c) –19, –16, –13, –10, ...
d) 5, 12, 23, 38, 57, ...
e) 2, 7, 14, 23, 34, ...
f) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{17}{15}, \ldots\ldots\ldots$

Resolución:

a) $4 \underbrace{;}_{5} 9 \underbrace{;}_{5} 14 \underbrace{;}_{5} 19$; .... $t_n = 5n-1$

b) $36 \underbrace{;}_{-5} 31 \underbrace{;}_{-5} 26 \underbrace{;}_{-5} 21$; .... $t_n = -5n+41$

c) $-19 \underbrace{;}_{3} -16 \underbrace{;}_{3} -13 \underbrace{;}_{3} -10$; ... $t_n = 3n-22$

d) 5 ; 12 ; 23 ; 38 ; 57 (diferencias: 7, 11, 15, 19; segundas diferencias: 4, 4, 4)

$$t_n = 2n^2 + n + 2$$

e) 2 ; 7 ; 14 ; 23 ; 34 (diferencias: 5, 7, 9, 11; segundas diferencias: 2, 2, 2)

$$t_n = n^2 + 2n - 1$$

f) $\frac{2}{3} ; \frac{5}{6} ; 1 ; \frac{17}{15} ; \ldots$

$\frac{2}{3} ; \frac{5}{6} ; \frac{10}{10} ; \frac{17}{15} ; \ldots$

$$\frac{2(1^2+1)}{2\times3} ; \frac{2(2^2+1)}{3\times4} ; \frac{2(3^2+1)}{4\times5} ; \frac{2(4^2+1)}{5\times6} ; \ldots$$

$$t_n = \frac{2(n^2+1)}{(n+1)(n+2)}$$

PROBLEMA 3

Dada la siguiente sucesión: 2, 9, 28, 65, 126; ...
¿Cuántos términos son de 4 cifras?

Resolución:

Este conjunto de números guarda cierta relación con los cubos perfectos.

Así:

$1° \Rightarrow 2 = 1^3 + 1$

$2° \Rightarrow 9 = 2^3 + 1$

$3° \Rightarrow 28 = 3^3 + 1$

$4° \Rightarrow 65 = 4^3 + 1$

$5° \Rightarrow 126 = 5^3 + 1$

⋮

$10° \Rightarrow 1001 = 10^3 + 1$ ⇨ Primer número de 4 cifras

⋮

$21° \Rightarrow 9262 = 21^3 + 1$ ⇨ Último número de 4 cifras

$22° \Rightarrow 10649 = 22^3 + 1$

⋮

Luego la cantidad de términos de 4 cifras es:
$21 - 9 = 12$

PROBLEMA 4

Halle que número continúa en cada sucesión:

a) 2, 4, 10, 22, 42, ...

b) 3, 6, 4, 2, 4, ...

c) 2, 3, 2, 4, 4, 6, 12, 9, ...

a) 2 ; 4 ; 10 ; 22 ; 42 ; 72

diferencias: 2, 6, 12, 20, 30 → 1×2, 2×3, 3×4, 4×5, 5×6

∴ La respuesta es 72

b) 3 ; 6 ; 4 ; 2 ; 4 ; 2

×2, −2, ÷2, ×2, −2 → Siguiendo la secuencia con los signos

∴ La respuesta es 2

c) 2 ; 3 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 12 ; 9 ; 48 ; 13

×1, ×2, ×3, ×4 (términos impares)

+1, +2, +3, +4 (términos pares)

∴ La respuesta 48 y 13

PROBLEMA 5

En una P.A. el 4to. término es 8 y el 7mo. término es 14. Halla el término de lugar 20.

Resolución:

Observación: En una progresión aritmética se cumple: $t_n = t_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow t_n = t_K + (n-K)r \quad 1 \le K \le n$

En nuestro problema:

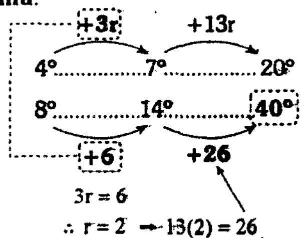
$t_7 = t_4 + (7-4)r$ | $t_{20} = t_7 + (20-7)r$

$t_7 = t_4 + 3r$ | $t_{20} = t_7 + 13r$

$14 = 8 + 3r$ | $t_{20} = 14 + 13(2)$

$\therefore r = 2$ | $\therefore t_{20} = 40$

Otra forma:



PROBLEMA 6

Un número múltiplo de 9 tiene seis cifras en total que están en P.A. creciente. Halle el producto de las dos últimas cifras.

Resolución:

De los datos del problema se conoce la forma:

$\overline{(a)(a+r)(a+2r)(a+3r)(a+4r)(a+5r)} = \overset{\circ}{9}$

Si se deduce que r=1, para que cada paréntesis represente un dígito y como tal no puede ser mayor que 9, entonces tendremos:

$\overline{(a)(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)} = \overset{\circ}{9}$

Observación:

Para que el número sea $\overset{\circ}{9}$, la suma de sus cifras debe ser $\overset{\circ}{9}$

Posibles valores:

123456 ⇒ suma de cifras = 21 ≠ $\overset{\circ}{9}$

234567 ⇒ suma de cifras = 27 = $\overset{\circ}{9}$ cumple con la condición del problema.

345678 ⇒ suma de cifras = 33 ≠ $\overset{\circ}{9}$

456789 ⇒ suma de cifras = 39 ≠ $\overset{\circ}{9}$

∴ Piden : 6 ×7 = 42

PROBLEMA 7

Dadas las siguientes sucesiones:

S_1 : 7, 12, 17, 22, . . . , 297.

S_2 : 4, 11, 18, 25, . . .

Calcule Ud. ¿cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

Resolución:

Se observa que los términos de S_1 terminan solamente en 2 y 7 ahora, para que los términos de S_2 coincidan con S_1, deben también terminar en 2 y 7. Para ello analizamos a S_2:

4 ; 11 ; 18 ; 25 ; .....

(diferencias: 7, 7, 7) ⟶ $t_n = 7n-3$ Forma general

$7n-3 = ...2$ y $7n-3 = ...7$

↓ 5 ; 15 ; 25 ; 35 — Admite 4 valores (para n=45 se pasa del último término 297)

↓ 10 ; 20 ; 30 ; 40 — Admite 4 valores (para n=50 tampoco cumple)

Por lo tanto, hay 8 términos comunes a ambas sucesiones.

PROBLEMA 8

Se reparte caramelos a un grupo de niños en cantidades que forman una progresión aritmética. Al séptimo niño le tocó la mitad de lo que le tocó al último y a este el quíntuplo de lo que le tocó al primero. ¿Cuántos niños son?

Resolución:

De acuerdo a los datos del problema planteamos:

Niños ⟹ 1°, 2°, 3°, ... 7° . . . . n°

Caramelos ⟹ 2a, ... , 5a, ... 10a

La cantidad de caramelos repartido a cada niño forma una P.A, sea r la razón de dicha P.A, entonces:

Niños ⟹ 1° 2° 3° . . . . 7° . . . . . . n°

2a, ... 5a, ... , 10a

(+6r) (+(n − 7)r)

$2a + 6r = 5a \Rightarrow 6r = 3a$ . . . . (I)

$5a + (n-7)r = 10a \Rightarrow (n-7)r = 5a$ . . . . (II)

dividiendo (I) ÷ (II)

$$\frac{6r}{(n-7)r} = \frac{3a}{5a} \Rightarrow \frac{6}{n-7} = \frac{3}{5} \Rightarrow n = 17$$

∴ El número de niños es 17

PROBLEMA 9

Halla el valor de n en la siguiente sucesión:

$(a+3)^1, (a+7)^3, (a+11)^5, \ldots\ldots, (a+118-n)^n$

Resolución:

En este problema tiene que ser muy observador ¿Notas alguna relación peculiar entre el exponente y el número de la base?

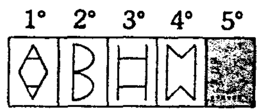
$(a+3)^1$, $(a+7)^3$ (×2, +1)

Luego: $2n+1 = 118 - n \Rightarrow n = 39$

PROBLEMA 10

¿Qué figura ocupa el 5° lugar en la siguiente sucesión?

1° 2° 3° 4° 5°



Resolución:

Observamos que cada figura está formada por una letra y un reflejo en posición invertida. Ahora analizamos las letras para encontrar la que continúa.

A ; D ; H ; M ; R

A–D	D–H	H–M	M–R
B	E	I	N
C	F	J	Ñ
	G	K	O
		L	P
			Q

La siguiente figura se construye con la R; y su reflejo invertido R

∴ La figura que sigue es

PROBLEMA 11

¿Qué figura continúa?

?

∴ La respuesta es

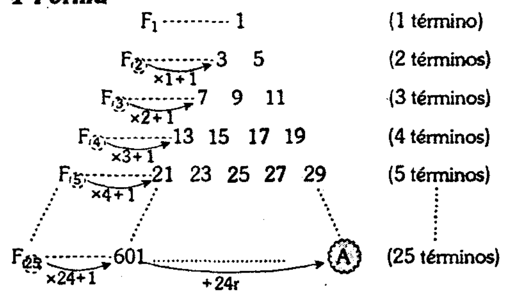
Criterio:

En las figuras de lugar par las lineas horizontales aumentan de uno en uno y las bolitas negras aumentan de uno en uno y giran todos en sentido horario.

PROBLEMA 12
En el siguiente arreglo numérico, halle la suma del primero y el último término de la fila 25.

$F_1 \longrightarrow 1$
$F_2 \longrightarrow 3 \quad 5$
$F_3 \longrightarrow 7 \quad 9 \quad 11$
$F_4 \longrightarrow 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$
$F_5 \longrightarrow 21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29$

Resolución:
1°Forma



Luego:
Como la razón es 2, por teoría de progresiones aritméticas planteamos:
$A = 601 + 24(2)$
$A = 649$
finalmente piden $S = 601 + 649 = 1250$

$\therefore$ La respuesta es 1250

2° Forma

# Fila: ⟶	1°	2°	3°	4°	5°	.....	25°
Suma del 1° y el último de la fila dada	1	8	18	32	50	.....	S
		$2(2)^2$	$2(3)^2$	$2(4)^2$	$2(5)^2$	.....	$2(25)^2$

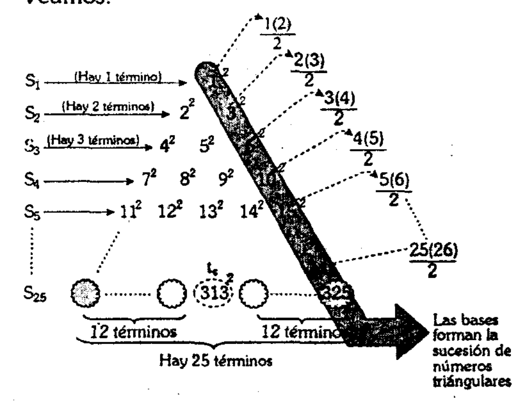
$\therefore \ S = 2(25)^2 = 1250$

PROBLEMA 13
En el siguiente arreglo:

$S_1 \Rightarrow 1$
$S_2 \Rightarrow 4, \ 9$
$S_3 \Rightarrow 16, \ 25, \ 36$
$S_4 \Rightarrow 49, \ 64, \ 81, \ 100$
. . . . .
. . . . .
. . . . .

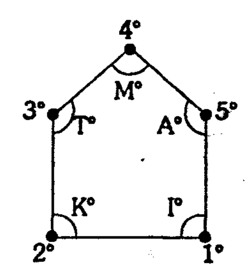
Halle la suma del término central y el último término en S_{25}

Resolución:
Observando atentamente nos damos cuenta de que los números que conforman la distribución triangular son los primeros cuadrados perfectos.
Veamos.



Luego el término central más el último término es
$313^2 + 325^2 = 203594$ (Respuesta)

PROBLEMA 14
Calcule el valor de T° + A° + K° + I°, si los ángulos mostrados forman una progresión aritmética de razón 20°



Resolución:

1°	2°	3°	4°	5°
I	K	T	M	A

$\xrightarrow{20^\circ} \quad \xrightarrow{20^\circ} \quad \xrightarrow{20^\circ} \quad \xrightarrow{20^\circ}$

Luego:

1°	2°	3°	4°	5°
a ;	(a+20) ;	(a+40) ;	(a+60) ;	(a+80)
I	K	T	M	A

entonces.
$a+(a+20) + (a+40) + (a+60) + (a + 80) = 540$

Resolviendo:

$a = 68° \rightarrow M = 128$

Reemplazando:

$T + A + K + I + M = 540$

$T + A + k + I = 540 - M$

$\therefore T + A + K + I = 540 - 128 = 412$

> Las sumas de las medidas de los ángulos internos de un polígono de "n" lados es:
> $S = 180(n-2)$
> Para $n = 5$; $S = 180(5-2) = 540°$

$\therefore$ La respuesta es 412

PROBLEMA 15

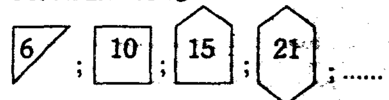


Fig (1) Fig (2) Fig (3) Fig (4)

Calcule la diferencia entre el número de lados de la figura 2k+4 y el valor numérico comprendido en el interior de esta, si la diferencia en la figura anterior es 300.

Resolución:

Figura N°	N° lados	Número en el interior
1	3	$6 = \frac{3(4)}{2}$
2	4	$10 = \frac{4(5)}{2}$
3	5	$15 = \frac{5(6)}{2}$
4	6	$21 = \frac{6(7)}{2}$
⋮	⋮	⋮
2k+3	2k+5	$\frac{(2k+5)(2k+6)}{2}$

Por condición:

$$\frac{(2k+5)(2k+6)}{2} - (2k+5) = 300$$

Resolviendo $k = 10$

Luego la figura 2k+4 será:

Figura	N° lados	N° interior
24	26	351

Nos piden $351 - 26 = 325$

$\therefore$ La respuesta es 325

PROBLEMA 16

El primer día ahorré S/ 1, el segundo día S/ 1, el tercer día S/ 2, el cuarto día el triple de lo que ahorré el segundo día, el quinto día ahorré S/ 3 más de lo que ahorré el tercer día, y así sucesivamente. ¿Cuánto ahorré el décimo quinto día?

Resolución:

N° día: 1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°...8°..... 15°

Ahorro: 1 1 2 3(1) 2+3 .... ?

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21;...... ?

Se trata de la sucesión de Fibonacci.

Luego:

$F_7^2 + F_8^2 = F_{15}$

↓ ↓ ↓

$13^2 + 21^2 = 610$

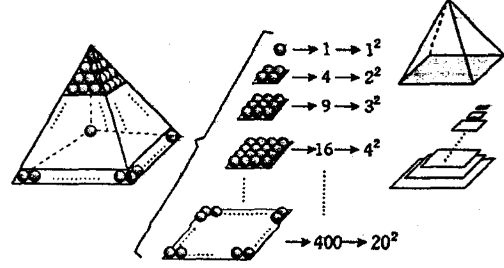
> En la sucesión de Fibonacci: 1; 2; 3; 5; 8; 13; . . . ., la suma de los cuadrados de dos números cualesquiera cumple:
> $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

$\therefore$ El décimo quinto día ahorro S/ 610

PROBLEMA 17

En la base cuadrangular de una pirámide se han usado 400 bolas de billar. ¿Cuántas bolas se han usado en total?

Resolución:



En total se han usado:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+20^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

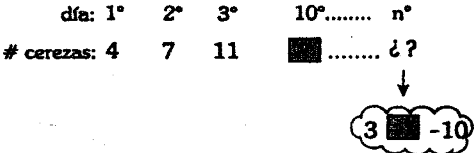
bolas de billar.

PROBLEMA 18

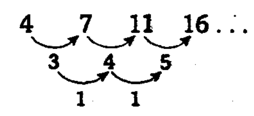
Ángela se encuentra en una huerta de cerezas donde comienza a comer de ella de la siguiente manera. El primer día come 4 cerezas, el segundo día come 7 cerezas, el tercer día come 11, el cuarto come 16 y así sucesivamente, hasta que cierto día se da cuenta de que el número de cerezas que comió ese día era 10 cerezas menos que el triple de cerezas que comió el décimo día. ¿Cuántos días han transcurrido hasta ese cierto día?

Resolución:

Sea n el número de días transcurridos:



Veamos:



$$t_n = \frac{n^2+3n+4}{2}$$

Luego:

N° día : 1° 2° 3° 4° . . . 10° . . . n°

N° cerezas: 4 7 11 16 . . . 67 . . . $\frac{n^2+3n+4}{2}$

Aprecia que hemos usado:

$t_n = \frac{n^2+3n+4}{2}$ para n = 10 y hallamos t_{10}

Por dato:

$$\frac{n^2+3n+4}{2} = 3(67) - 10$$

resolviendo: n = 18

∴ Han transcurrido 18 días.

PROBLEMA 19

El quinto término de una P.A. es tanto como la razón multiplicado por el primer término. Si el tercer término resulta al sumar los dos términos anteriores a éste, halle la suma de cifras del décimo término.

Resolución:

Dada la P.A.. t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; . . . .

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
a	a+r	a+2r	a+3r	a+4r	a+5r	a+6r	a+7r

Por dato

$t_3 = t_1 + t_2 \rightarrow a+2r = a+a+r \rightarrow a = r$

La P.A sería:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8...
a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a

Por dato:

$t_5 = r \cdot t_1$

$5a = a \cdot a \Rightarrow a = 5$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_{10}
5	10	15	20	25	30	●
5×1	5×2	5×3	5×4			5×10

Finalmente tendremos:

$t_{10} = 50$

∴ Suma de cifras de t_{10} es 5 + 0 = 5

PROBLEMA 20

La suma del tercer y octavo término de una P.A. es 41 y la relación del quinto al séptimo es 19/25. Halle el segundo término.

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° . . . .

P.A: . . . . 19a ◯ 25 a . . . .

Como se trata de una P.A, tenemos:

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° 8° . . . .

. . . . 19a 22a 25a . . . .

3a 3a

Observamos que la razón es 3a:

Luego:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8° ....
.... 10a	13a	16a	19a	22a	25a	28a	

3a 3a 3a 3a

Por condición:

13a + 28a = 41

a = 1

Entonces el segundo término es 10(1) = 10

PROBLEMA 21

En la siguiente sucesión, halle el primer término negativo de 3 cifras.

120, 113, 106, 99. . .

Resolución:
Hallando el término enésimo
120; 113; 106; 99;......
−7 −7 −7

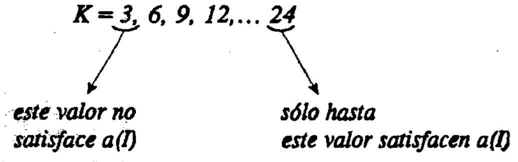
$t_n = -7n+127$
Como nos piden el primer negativo de 3 cifras:
$-7n + 127 \leq -100$
$227 \leq 7n$
$32{,}5 \leq n$
$\therefore n = 33, 34; 35; \ldots\ldots$
Para encontrar el primer término negativo de 3 cifras, debemos tomar el primer valor de n es decir n = 33
$\therefore t_{33} = -7(33) + 127 = -104$

PROBLEMA 22
¿Cuántos términos de la sucesión: 13,16, 19, . . . 613 resultan tener raíz cuadrada exacta al sumarles dos unidades?

Resolución:
Escribamos los términos de la sucesión dada

13 ; 16 ; 19 ; 22 ; 25 ; 28 ; 31 ; 34 ;... 613
+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 +2 +2
15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27 ; 30 ; 33 ; 36 ;...615

Se deduce que el t_n de la 2° sucesión es.
$t_n = 3n + 12$
Por condición del problema:
$3n + 12 = K^2$
Los términos que buscamos dependen de n pero n depende de K. Por lo tanto para encontrar los términos que cumplen con la condición bastará con encontrar cuantos valores toma K.
Sabemos que:
$15 \leq 3n + 12 \leq 615 \Rightarrow 15 \leq K^2 \leq 615$
$\Rightarrow 3{,}8 \leq K \leq 24{,}7 \ldots\ldots (I)$
Luego:
$K^2 = 3n + 12$
$K^2 = 3(n + 4)$
$K^2 = \overset{\circ}{3}$ de esta igualdad deducimos que:
$K = \overset{\circ}{3}$ entonces:

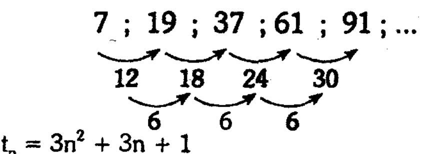


K = 6, 9, 12, . . . , 24
7 valores

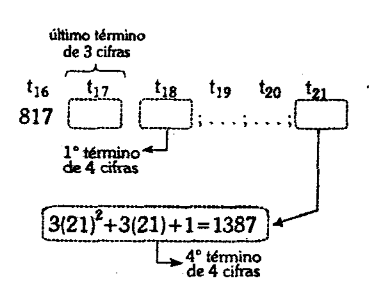
∴ La cantidad de términos de la sucesión que cumplen con la condición pedida es siete.

PROBLEMA 23
En la siguiente sucesión: 7, 19, 37, 61, 91, . . .
Halle la diferencia entre el penúltimo término de 3 cifras y el 4to. término de 4 cifras.

Resolución:
Cálculo del término enésimo:



$t_n = 3n^2 + 3n + 1$
Buscamos términos de 3 cifras:
$100 \leq 3n^2 + 3n + 1 \leq 999$
La desigualdad se satisface para n = 6; 7; 8 . . . ; 16; 17 y el penúltimo término de 3 cifras es:
para $n = 16 \Rightarrow t_{16} = 3(16)^2 + 3(16) + 1 = 817$
Entonces:



$\therefore$ Nos piden: $1387 - 817 = 570$

PROBLEMA 24
La suma de los n términos de una sucesión está dada por la siguiente expresión: $S_n = n(2n + 9)$
Calcule el primer término de 3 cifras en dicha sucesión.

Resolución:

$S_n = n(2n + 9)$

$S_1 = 1(2 \times 1 + 9) = 11 = t_1$

$S_2 = 2(2 \times 2 + 9) = 26 = t_1 + t_2$

$S_3 = 3(2 \times 3 + 9) = 45 = t_1 + t_2 + t_3$

⋮

Con estos elementos, podemos construir la sucesión:

1° 2° 3° 4° . . .

11 ; 15 ; 19 ; 23; . . .

(diferencias: 4, 4, 4)

$t_n = 4n + 7$

Buscando el primer término de 3 cifras:

$4n + 7 \geq 100 \Rightarrow n \geq 23{,}2$

$n = 24, 25, 26 \ldots$

Tomamos el primer valor, $n = 24$

$t_{24} = 4(24) + 7 = 103$

PROBLEMA 25

En una fábrica de municiones hay 210 granadas. Estas se van a acomodar en forma triangular; de modo que en la primera fila haya 1; en la segunda, 2; en la tercera, 3 y así sucesivamente. ¿Cuántas filas se formarán?

Resolución:

Número de granadas: 210

Condición:

Fila 1 : ● ······ 1 granada

Fila 2 : ● ● ······ 2 granadas

Fila 3 : ● ● ● ······ 3 granadas

⋮

Fila n : ● ● ● ... ● ...n granadas

En total debe haber 210 municiones; es decir, la suma de los elementos de todas las filas debe ser 210.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 210 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 210$

$n(n + 1) = 420$

$n(n + 1) = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$

∴ Se formarán 20 filas

PROBLEMA 26

En un cuartel, el mayor decide que cada cadete realice abdominales de acuerdo a su hora de llegada al patio. A las 6:16 a.m. se realiza 2 abdominales; a las 6:17 a.m., 5 abdominales; a las 6:18 a.m., 9 abdominales; a las 6:19 a.m., 14 abdominales y así sucesivamente.

Si Juanito llegó al patio a las 6:59 a.m., ¿cuántos abdominales deberá realizar?

Resolución:

De acuerdo a los datos establecemos:

Hora de llegada al patio		# de Abdominales
6:16 a.m.	⟶	2
6:17 a.m.	⟶	5
6:18 a.m.	⟶	9
6:19 a.m.	⟶	14
⋮		⋮
6:59 a.m.	⟶	▒

Según el planteamiento, deducimos:

Hora:	6:16	6:17	6:18	6:19	...	6:59
	−15	−15	−15	−15		−15
# de orden:	1°	2°	3°	4°	...	44°
sucesión:	2 ;	5 ;	9 ;	14 ;	...	●

$$t_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$$

$$\Rightarrow t_{44} = \frac{1}{2}(44)^2 + \frac{3}{2}(44) = 1034$$

∴ Juanito deberá realizar 1034 abdominales

PROBLEMA 27

Se escribe de corrido los siguientes números naturales 12345678910111213 . . . 585960. Se decide anular cien cifras escritas, de tal manera que juntando las cifras que quedan (sin alterar el orden) se forma un número, el mayor posible. ¿Cuál es el número? (Da como respuesta la suma de sus cifras).

Resolución:

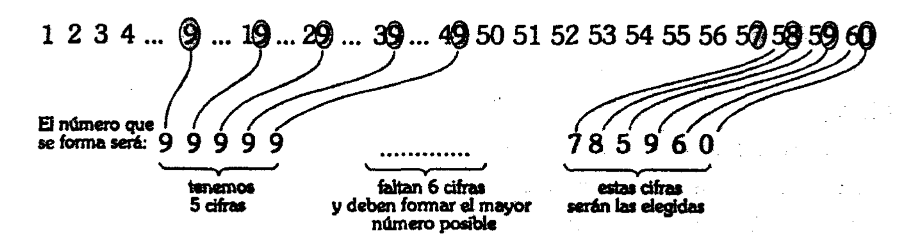
Escribamos los números separadamente:

$\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ldots,9;}_{9\text{ cifras}}\ \underbrace{10;\ 11;\ 12;\ \ldots 59;\ 60}_{51(2)\ =\ 102\text{ cifras}}$

∴ Son en total: 111 cifras

Ahora, en la secuencia se cuenta 111 cifras y como se debe eliminar 100, nos quedaremos con 11. Pero se debe tener en cuenta que éstas deben ser las de mayor valor; en este caso, nos conviene que se queden todas las cifras 9.

Así:



Como nos faltan 6 cifras primero las 2 últimas para que la cifra 9 quede delante y así tengamos un mayor valor.

Luego tomamos el 5 y los de mayor valor 8 y 7.
Finalmente tendremos:
99999785960
Nos piden la suma de sus cifras: 80 (Respuesta)

PROBLEMA 28

La siguiente es una armónica:

$$\frac{1}{2x+3};\ \frac{1}{x+8};\ \frac{1}{3x+1};\ \frac{1}{y};\ \ldots$$

Calcule el valor de $x+y$

Resolución:

Como la inversa de los términos de una sucesión armónica forman una progresión aritmética tendremos: $2x+3$; $x+8$; $3x+1$; y; . . . (P.A)

Luego: $x+8=\dfrac{2x+3+3x+1}{2}$ ¿Por qué?

Resolviendo: $x = 4$

La P.A. sera: 11; 12; 13; 14; . . .

∴ $y = 14$

Ahora, calculamos $x + y$
Respuesta: 18

PROBLEMA 29

En la siguiente sucesión:
8; 15; 22; 29 ...
¿Cuántos de sus términos de 3 cifras terminan en 5?

Resolución:

8, 15, 22, 29 ...

$t_n = 7n + 1$

Para que sea de 3 cifras:

$100 \leq 7n + 1 \leq 999 \Rightarrow 14,1 \leq n \leq 142,5$ ... (1)

Además:

$7n + 1 = ...5$

$n = ...2$ ... (I I)

De (I) y (II):

$n = \underbrace{22, 32, 42, 52, ..., 142}_{12 \text{ valores}}$

∴ Son 12 términos que terminan en 5.

PROBLEMA 30

Claudio se propone leer una novela diariamente. El primer día lee 3 páginas; el segundo día 8 páginas; el tercer día, 15 páginas, el cuarto día, 24 páginas y así sucesivamente. Cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 14 veces el número de días que ha estado leyendo. Halle el número de páginas leídas en dicho día.

Resolución:

Días → 1° 2° 3° 4° ... n°

Páginas ⇒ 3 ; 8 ; 15 ; 24 ;... $(n^2 + 2n)$

Por dato:

$n^2 + 2n = 14n$

Resolviendo:

$n = 12$

El número de páginas que ha leído ese día es:

$12^2 + 2(12) = 168$

PROBLEMA 31

Se escribe la sucesión de los primeros números naturales y nos detenemos cuando marcamos 1412 veces la cifra 7 en el lugar de la unidades. Indique cual es el último número de natural escrito en la sucesión.

Resolución:

Veamos la sucesión:

1; 2; 3; 4; 5; 6; **7**; .**17**. . ; **27**; . . . ; **37**; . . . ; **47** . . .

Como el dato indica que se ha escrito 1412 veces la cifra 7 en el lugar de las unidades, implica decir que hemos escrito los primeros números naturales consecutivos entre los cuales se encuentran 1412 números que acaban en cifra 7 (o también cuya última cifra es 7). Se puede apreciar, en la sucesión escrita, que los números en negrita (a partir de 17) ayudan a contabilizar la cantidad escrita en cifras pedidas así:

17, → una cifra 7

27, → dos cifras 7

37, → tres cifras 7

⋮

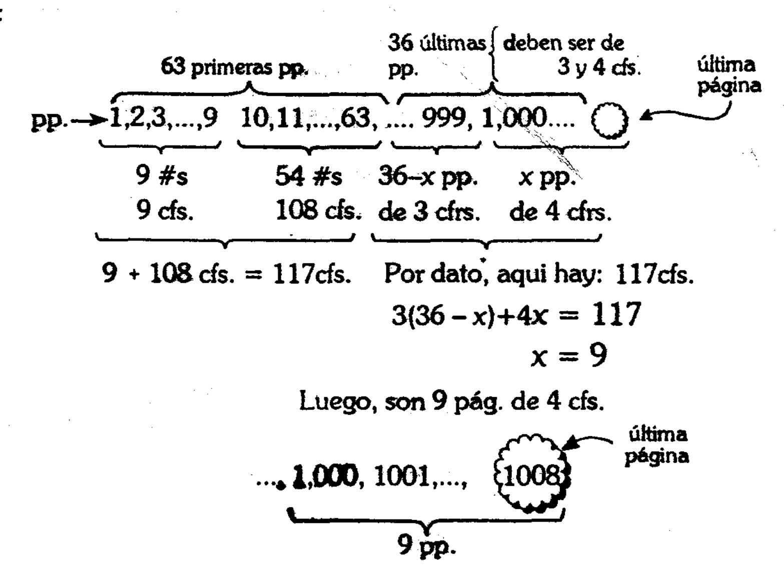
1410, → mil cuatrocientos diez cifras 7

1411, → mil cuatrocientos once cifras 7

y con la cifra 7 del principio se completa lo pedido.

PROBLEMA 32
Halle la cantidad de páginas que tiene un libro sabiendo que para enumerar sus últimas 36 páginas se emplearon la misma cantidad de tipos que se emplea en las 63 primeras páginas.

Resolución:

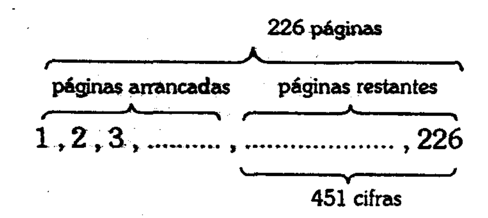


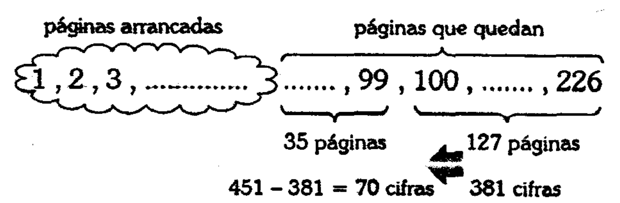
La última página es 1008

Como la última página es 1008 entonces el libro tiene 1008 páginas.

PROBLEMA 33
De un libro de 226 páginas se han arrancado cierto número de páginas del principio, observandose que en las páginas que quedan se utilizaron 451 cifras. ¿Cuántas hojas se arrancaron?

Resolución:





Se arrancó $226 - (127 + 35) = 64$ páginas

∴ Se arrancó 32 hojas

PROBLEMA 34

El número de tipos de imprenta utilizados en la enumeración de un libro excede al número de páginas en 160. Halle el número de hojas de dicho libro.

Resolución:

Recuerda que tipo de imprenta es sinónimo de cifra.

Es un N°de 3 cifras ↘

N° Pág.: 1;2;3;....9; 10;....99,100;101;102;103;...n

1;2;3;....9	10;....99	100;101;102;103;...n
9 páginas	90 páginas	(n – 99) páginas
9 cifras	180 cifras	3(n – 99) cifras

Por dato:

(número de cifras) – (número de páginas) = 160

$\Rightarrow 9 + 180 + 3(n - 99) - (9 + 90 + n - 99) = 160$

Resolviendo: $n = 134$

∴ El libro tiene 134 páginas, es decir 67 hojas.

PROBLEMA 35

Pepito se dedica a la venta de revistas. El primer día vende 6; el segundo día vende 9; el tercer día, 14; el cuarto día, 21 y así sucesivamente hasta que el último día vendió 630 revistas. ¿Cuántos días estuvo vendiendo?

Resolución:

Días → 1° 2° 3° 4° ... n°

Revistas → 6 9 14 21 ... 630

$t_n = n^2 + 5$

Luego:

$n^2 + 5 = 630$

$n = 25$

∴ Estuvo vendiendo 25 días.

PROBLEMA 36

Una máquina selectora recibe productos en grupos de 1, 4, 7, 10, 13 ..... y las seleccionadas van saliendo en grupos de 0, 2, 4, 6, 8, ... respectivamente. ¿Cuántos productos habrán sido desechados después que hayan ingresado 25 grupos?

Resolución:

Grupos →	1°	2°	3°	4°	5° ... 25°
Productos que entran →	1	4	7	10	13 ...
Productos seleccionados →	0	2	4	6	8 ...
Productos desechados →	1	2	3	4	5 ... 25

(Se deduce por el número de orden que ocupa).

Lo que nos piden es el total de productos desechados.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 25 = \frac{25 \times 26}{2} = 325$$

Rpta.

PROBLEMA 37

Los términos de la sucesión definidos por $t_n = 8n^2 - 6n + 3$ ocupan los lugares impares de una nueva sucesión y los términos de otra sucesión definidos por $t_n = 8n^2 + 2n + 2$ ocupan los lugares pares de la misma nueva sucesión. Calcule el término enésimo de la nueva sucesión formada.

Resolución:

En la primera expresión.

Para: n=1 n=2 n=3

$t_n = 8n^2 - 6n + 3 \{5, \quad 23, \quad 57, ...\}$

Estos términos ocupan los lugares impares (1°; 3°; 5°, ...) De la nueva sucesión.

Ahora, para: n=1 n=2 n=3

$t_n = 8n^2 + 2n + 2 \{12, \quad 38, \quad 80, ...\}$

Estos términos ocupan los lugares pares (2°, 4°, 6°, . . .) en la misma nueva sucesión.

Entonces la nueva sucesión es:

1°	2°	3°	4°	5°	6° .....
5,	12,	23,	38,	57,	80, ...

De donde tendríamos:

5 12 23 38
  7 11 15
    4   4

$t_n = 2n^2 + n + 2$

PROBLEMA 38

Se arranca las últimas $\overline{ab}$ páginas de un libro siendo algunas de 3 y otras de 4 cifras. En ellas se empleo 87 cifras. Halle la mayor cantidad de páginas arrancadas.

Resolución:

últimas $\overline{ab}$ páginas (de 3 y 4 cifras)

Págs. 1, 2, 3, 4, ... 999, 1000 ...

$(\overline{ab}-x)$ pag "x" páginas

87 cifras

$3(ab-x)+4(x)=87$

$\overline{ab}=\dfrac{87-x}{3}$ (debe ser mínimo; para que sea máximo)

para x = 1 ➡ No hay solución

para x = 2 ➡ No hay solución

para x = 3 ➡ $\overline{ab} = \dfrac{87-3}{3}$ ➡ $\overline{ab} = 28$

PROBLEMA 39

En un libro que tiene entre 1000 y 2000 páginas se ha utilizado 85 cifras para enumerar las 25 últimas páginas impares cuya cifra terminal es 3 ó 5. Si la suma de cifras de la última página es 13, indique el número de páginas que tiene el libro.

Resolución:

25 últimas pp. impares (.....3) (.....5)

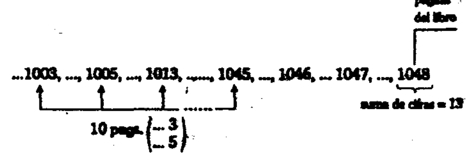
1, 2, 3,..

85 cifras

Si las 25 páginas fueran todas de 3 cifras, se habría utilizado 75 cifras (menos que el dato).

Si las 25 páginas fueran todas de 4 cifras, se habrán utilizado 100 cifras (más que el dato)

Se concluye que algunas deben ser de 3 cifras y el resto de 4 cifras.



Donde:

$3(25-x) + 4x = 85 \rightarrow x = 10$

...1003, ..., 1005, ... 1013, ... 1045, ... 1046, ... 1047, ... 1048

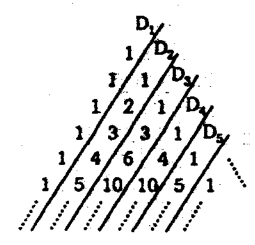
10 pags. (... 3 / ... 5)

última página del libro

suma de cifras = 13

PROBLEMA 40

Según el siguiente arreglo:



Calcule el valor del t_{15} en la diagonal número cuatro (D_4)

Resolución:

$$D_4 = \underset{t_1}{1},\ \underset{t_2}{4},\ \underset{t_3}{10},\ \ldots,\ \underset{t_{15}}{¿?}$$

$$\frac{1\times2\times3}{6},\ \frac{2\times3\times4}{6},\ \frac{3\times4\times5}{6},\ \ldots,\ \frac{15\times16\times17}{6} = 680$$

∴ En D_4 tendremos $t_{15} = 680$

Problemas Propuestos

1. Indique el término o letra que continúa en cada sucesión.

	Respuesta
a) A, C, F, J ...	Ñ
b) B, D, H, N ...	U
c) A, B, E, F, I, J, ...	M
d) D, C, S, O, D ...	D
e) E, F, M, A, M, ...	J
f) AB, BD, DG, GK, ...	KO
g) $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{I}$; $\overline{FD}$...	$\overline{FBE}$
h) 2, 3, 8, 17, 30...	47
i) 3, 3, 6, 2, 8 . . .	8/5
j) 1, 2, 4, 7, 28 ...	33
k) A, C, F, J, Ñ ...	T

2. Calcule el término enésimo de cada una de las sucesiones siguientes?

	Respuesta
a) 6, 10, 14, 18, 22, ...	$4n + 2$
b) 9, 14, 19, 24, 29, ...	$5n + 4$
c) –4, –7, –10, –13, ...	$-3n - 1$
d) $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{6}{9}, \frac{8}{11}, ...$	$\frac{2n}{2n+3}$
e) 5, 7, 11, 17, 25, ...	$n^2 - n + 5$

3. Calcule el valor de K + A

Si:

- $(2K + 1), 3K, (8K+11)$ es una sucesión de 1er. orden, y:
- $(2A + 1).(4A + 2).(7A + 5)$ es una progresión geométrica, donde $A \in N$

A) –2 B) 1 C) 3
D) –3 E) –1

4. Calcule x si:

$3a^{75}, 7a^{72}, 11a^{69}, 15a^{66}, \dots, (x+49)a^{(49-x)}$

A) 26 B) 30 C) 34
D) 33 E) 31

5. Calcule el tercer término de 3 cifras en la siguiente sucesión: 3, 6, 11, 18, . . .

A) 146 B) 140 C) 136
D) 165 E) 153

6. Dadas las siguientes sucesiones:

5, 8, 11, 14, ...

166, 462, 158, 154, ...

¿Cuál será el término común a ambas sabiendo que ocupan el mismo lugar?

A) 70 B) 73 C) 74
D) 80 E) 76

7. Se tiene una sucesión de primer orden cuya razón es 7. Dicha sucesión consta de 41 términos donde el término de lugar 21 es 145. Si la diferencia entre el último y el primero es 280, calcule la diferencia entre los términos de lugares 32 y 10

A) 100 B) 140 C) 154
D) 137 E) 156

8. Las sucesiones:

124 , 120, 112, . . . y

–2, 1, 4, 7, . . .

Tienen igual cantidad de términos y además sus últimos términos son iguales. El penúltimo término de la primera sucesión es:

A) 56 B) 59 C) 40
D) 60 E) 45

9. ¿Cuántos términos de tres cifras hay en la siguiente sucesión:

3, 4, 11, 30, 67, 128, ...

A) 8 B) 5 C) 4
D) 10 E) 6

10. Para imprimir un libro se emplean 255 cifras; luego se elimina el último capítulo que tenía 28 páginas y se suplanta por otro de 40 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el nuevo libro?

A) 140 B) 120 C) 121
D) 123 E) 133

11. Dadas las siguientes sucesiones:

S_1 : 11, 18, 25, 32, . . . , 844

S_2 : 4, 13, 22, 31, . . . , 1165

Halle cuántos términos son comunes a ambas.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 16 E) 14

12. Dada la siguiente sucesión de 21 términos calcule cuántos términos terminan en la cifra 5? 5, 11, 21, 35, 53, . . .

A) 7 B) 10 C) 11
D) 8 E) 9

13. En las 100 últimas páginas de un libro, se ha utilizado 350 cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 1 049 B) 1 050 C) 1 051
D) 1 048 E) 1 047

14. En la siguiente sucesión:

9, 14, 19, 24, ...

¿Cuántos de sus términos tienen 3 cifras?

A) 170 B) 190 C) 1 800
D) 169 E) 180

15. En el Triángulo de Pascal, calcule la suma de cifras del vigésimo término de la sucesión de números tetraédricos.

A) 1 420 B) 1 450 C) 1 520
D) 1 540 E) 1 550

16. En el siguiente triángulo numérico, halle la suma del primer y último término de la fila veinte.

$$
\begin{array}{c}
1 \rightarrow F_1 \\
3 \;\; 5 \rightarrow F_2 \\
7 \;\; 9 \;\; 11 \rightarrow F_3 \\
13 \;\; 15 \;\; 17 \;\; 19 \rightarrow F_4 \\
21 \;\; 23 \;\; 25 \;\; 27 \;\; 29 \rightarrow F_5 \\
\vdots
\end{array}
$$

A) 900 B) 450 C) 801
D) 702 E) 800

17. Calcule el término enésimo en la siguiente sucesión:

$-\frac{1}{2}, +1, -4, +25, 216 \ldots$

A) n^{-1} B) n^n C) 3n
D) $4n - n$ E) $(-1)^n.(n+1)^{(n-2)}$

18. ¿Cuántos términos de tres cifras que terminan en 5 presenta la siguiente sucesión terminan en 5?

13, 22, 31, 40, . . . , 904

A) 12 B) 11 C) 10
D) 13 E) 14

19. El 1er. día ahorró 3 soles; el segundo día, 6 soles; el 3er. día, 3 soles más que el 2do. día; el 4to. día, 15 soles; el 5to. día, 9 soles más que el día anterior y así sucesivamente. ¿Cuántos soles ahorró el 8vo. día?

A) 80 B) 99 C) 100
D) 98 E) 102

20. Si: $\overline{ab}$, $\overline{a7}$, $\overline{b9}$, es una sucesión lineal, calcule el término número (a+b)

A) 11 B) 10 C) 13
D) 12 E) 15

21. Calcule la diferencia de los términos enésimos en:

$$\frac{2}{3};\frac{6}{5};\frac{10}{7};\frac{14}{9};\ldots$$

$$\frac{1}{9};\frac{1}{2};\frac{11}{15};\frac{8}{9};\ldots$$

A) n^2 B) n^n C) $\frac{2n^2+21n-8}{6n^2+15n+6}$

D) $\frac{(n+1)}{2}$ E) $\frac{2n^2+7}{n+6}$

22. Si escribimos linealmente todos los números que terminan en 2, uno a continuación de otro, ¿qué cifra ocupará el lugar 880?

A) 6 B) 5 C) 3
D) 7 E) 1

23. Juan va a una tienda y compra un caramelo, regalándole el vendedor un caramelo por su compra. En una segunda vez compra 3 caramelos y le regala 2, en la tercera compra 6 y le regala 3, en la cuarta vez compra 10 y le regalan 4, en la quinta vez compra 15 y le regalan 5 y así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos recibirá en total cuando entre a la tienda a comprar por vigésima vez?

A) 160 B) 70 C) 200
D) 150 E) 230

24. En la siguiente sucesión existen 49 términos. ¿Cuántos términos habrá entre los términos 7a y 7b de dicha sucesión?

a, a+1, a+2, . . . , b−1, b

A) 301 B) 315 C) 324
D) 335 E) 306

25. En un laboratorio se tiene dos microbios: uno tipo A y otro tipo B. Para el primero se observa que luego, al final del 1er. día, se reproduce en 3 microbios del mismo tipo; luego, de dos días, son 7; después de 3 días son 13 y así sucesivamente. Para el del tipo B se observa que al final del mismo primer día son 10; luego del 2do día son 19; al cabo del 3er. día ya son 28 y así sucesivamente. ¿Al cabo de cuántos días el número de microbios de A y B son iguales?

A) 2 B) 6 C) 8
D) 4 E) 10

26. Halle x

0; 7; 33; 96; 220; $\overset{x}{\ldots}$

A) 530 B) 677 C) 726
D) 852 E) 932

27. Halle la diferencia entre el mayor y el menor de los términos de tres cifras de la siguiente sucesión: 7, 19, 37, 61, . . .

A) 711 B) 603 C) 792
D) 729 E) 600

28. Halle el segundo término negativo en la siguiente sucesión: 284, 278, 272, 266, . . .

A) –18 B) –6 C) –13
D) –10 E) –14

29. Calcule: $x+y$
1; 3; 8; 10; 15; 17; 22; x; y

A) 70 B) 53 C) 62
D) 48 E) 69

30. ¿Cuántos de los términos de la siguiente sucesión son múltiplo de diez?
5, 8, 13, 20, 29, . . . , 10004

A) 20 B) 21 C) 23
D) 37 E) 41

31. Si las sucesiones dadas tienen la misma ley de formación y la misma cantidad de términos, halle el primer término de la segunda sucesión:

5; 6; 9; 13; 65; 59
a_1; . . . 89

A) 7 B) 9 C) 10
D) 8 E) 11

32. Las edades de 4 hermanos están en progresión aritmética y suman 54. Si la edad del mayor duplica a la del menor, ¿cuál es la edad del tercero?

A) 10 B) 13 C) 15
D) 20 E) 16

33. Tres números cuya suma es 36 están en progresión aritmética. Si se les añade 1, 4 y 43 respectivamente, los resultados forman una progresión geométrica. ¿Cuáles son los números iniciales?

A) 5, 15, 28 B) 10, 20, 31
C) 3, 12, 21
D) 12, 21, 31 E) 3, 15, 22

34. Calcule la suma de las cifras del término 10
2, 33, 555, 7777, 111111111, . . .

A) 120 B) 110 C) 118
D) 139 E) 119

35. Los ángulos de un cuadrilátero forman una progresión geométrica y el último es 9 veces el segundo. Calcule el menor ángulo.

A) 8° B) 12° C) 9°
D) 11° E) 10°

36. Busque dos números x e y comprendidos entre 0 y 2, tales que 9, x, y están en progresión geométrica decreciente en ese orden y que el mayor es 27 veces el menor.

A) 1/3, $\sqrt{3}$ B) 1/3, 1/4 C) 1/4, $\sqrt{2}$
D) 1/4, $\sqrt{3}$ E) 1/3, $\sqrt{2}$

37. En la sucesión:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{10}{11}, \frac{17}{15}, \ldots\ldots\ldots$$

Calcule la suma de los términos de la fracción que ocupa el lugar veinte.

A) 301 B) 310 C) 415
D) 217 E) 480

38. En un laboratorio, se estudian dos tipos de bacterias por separado. Las del tipo A, el 1er. día, son 3; el 2do. día aumenta a 6; el 3er. día son 11; el 4to. día son 18 y así sucesivamente. Las del tipo B, el mismo 1er. día son 10; el 2do. día son 11; el 3er. día son 13; el 4to. día son 16 y así sucesivamente. Halle el día en que las bacterias del tipo A son el doble de las del tipo B.

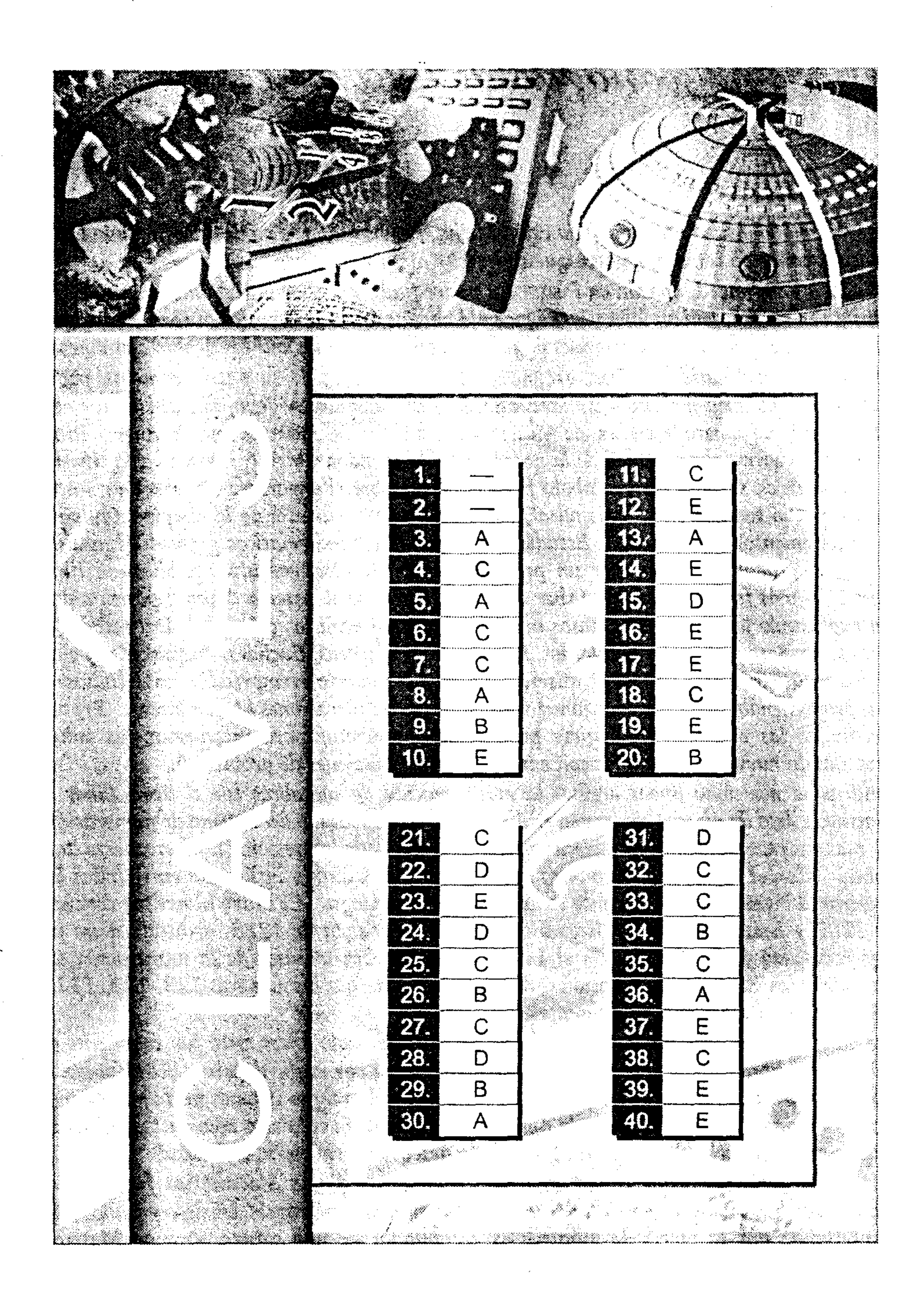
A) 11 B) 13 C) 18
D) 23 E) 15

39. Un millonario extravagante hace lo siguiente: El 1ro. de enero compra 16 televisores y regala 4; el 2 de enero, 18 televisores y regala 8; el día siguiente, 22 y regala 14; luego compra 28 y regala 22; y así sucesivamente. Hasta que cierto día compró cierta cantidad de televisores y los regaló todos. ¿Qué día fue ese?

A) 8 enero B) 10 enero C) 11 enero
D) 19 enero E) 7 enero

40. En una sucesión aritmética se tiene que el segundo, el cuarto y el octavo término forman una sucesión geométrica. Si el segundo término es la cuarta parte del octavo y la razón de la sucesión aritmética es 3, halle el décimo término de la sucesión aritmética.

A) 39 B) 37 C) 50
D) 45 E) 54



1.	—	11.	C	21.	C	31.	D
2.	—	12.	E	22.	D	32.	C
3.	A	13.	A	23.	E	33.	C
4.	C	14.	E	24.	D	34.	B
5.	A	15.	D	25.	C	35.	C
6.	C	16.	E	26.	B	36.	A
7.	C	17.	E	27.	C	37.	E
8.	A	18.	C	28.	D	38.	C
9.	B	19.	E	29.	B	39.	E
10.	E	20.	B	30.	A	40.	E

Leonardo de Pisa

Entre los matemáticos europeos de la Edad Media, el más grande de todos fue sin duda Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, que significa "hijo de Bonaccio"

En 1179, nace Leonardo en Pisa. Su padre funcionario de la República Pisana, lo lleva consigo en sus frecuentes viajes y ya de joven lo hace asistir a las escuelas árabes, pues quiere que el muchacho llegue a dominar las técnicas de cálculo comercial en las que los árabes son maestros.

A pesar de haber nacido en Pisa, recibió su formación lejos de su patria como su padre era empleado en una factoría mercantil italiana asentada en Bouguie, Argelia, fue allí donde el joven Leonardo recibió su primera lecciones de Matemática, a cargo de maestros musulmanes. Pronto se dio cuenta de la enorme superioridad de la notación decimal indoarábiga (provista ya de cifras cuyos valores dependen de su posición y símbolo para el cero) sobre el engorroso sistema de numeración romana, empleado todavía en su país natal, así Leonardo va más allá de la simple adquisición de nuevos procedimientos aritméticos. Estudia las obras de los matemáticos griegos e hindúes con espíritu nuevo y aporta a Occidente un precioso bagaje de conocimientos, publicando libros de Matemática, el más famoso, titulado ***Liber abaci*** *que expone el sistema decimal posicional de los números explicando las notables ventajas que ello comporta para los cálculos. Del estudio de las ecuaciones se ocuparon los asirio-babilonios, los egipcios, Pitágoras, Euclides, Arquímedes y entre los últimos matemáticos alejandrinos, el mismo Diofanto. Leonardo reemprendió los estudios de los antiguos, proponiendo originales cuestiones con elegantes consideraciones Matemáticas. Profundiza en la teoría de las ecuaciones y sugiere posibilidades concretas para interpretar las soluciones negativas, dando numerosos ejemplos con enunciados y resoluciones de problemas.*

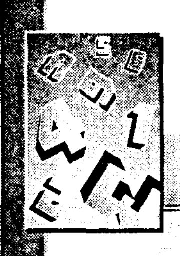
Como ya se mencionó líneas arriba, la más conocida de sus obras fue el libro ***Liber abaci*** *(literalmente,* ***Libro de ábaco****) que era en realidad un amplio tratado del sistema de numeración indo arábigo, mas sus razonamientos no parecieron causar demasiada impresión a los mercaderes italianos de la época. Con el tiempo, su libro llegó a ser la obra de máxima influencia entre todas las que contribuyeron a introducir en Occidente la notación indo-arábiga. El* ***Liber abaci*** *fue concluido en Pisa en 1202 y hasta nosotros ha llegado una edición revisada de 1228, dedicada a un famoso astrólogo cortesano de la época. En el* ***Liber abaci****, explicó los usos de la numeración árabe. También aclaró los valores de la notación ordinal, lo cual hizo que los números 213, 123, 132, 321, 231 y 312 tuvieran todos valores diferentes.*

Esto ya había sido anticipado por Abelardo de Bath un siglo antes, pero fue solamente tras la aparición de este libro cuando el antiguo sistema de notación por medio de letras del alfabeto, usado por griegos y romanos, recibió un golpe mortal (con todo, el antiguo sistema tardó varios siglos en desaparecer y todavía hoy en día se usa la numeración romana en ocasiones solemnes, debiendo parte de su importancia al hecho de que poca gente pueda descifrarla sin cierta dificultad.

No deja de ser irónico que Leonardo, cuyas aportaciones a la Matemática fueron de tanta importancia, sea hoy conocido sobre todo a causa de un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, interesado por la teoría de números (y recopilador de una clásica obra de Matemáticas recreativas, en cuatro volúmenes), quien encadenó el nombre de Fibonacci a una sucesión numérica que forma parte de un problema trivial del ***Liber abaci****: "El problema de los conejos" siendo la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ....., Leonardo murió hacia el año 1250.*

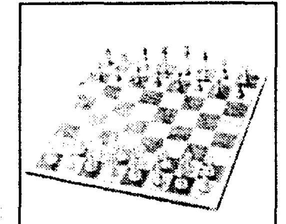
SERIES
SUMATORIA

Leamos un pensamiento de Abel: "Me parece que si uno desea hacer progresos en matemática, debe estudiar a los maestros y no a los discípulos". En la actualidad maestro y discípulo construyen juntos el conocimiento.



Lectura 14

Sobre el Origen del Ajedrez



La práctica del ajedrez potencia nuestro pensamiento creativo.

Un tablero cuadrado, dividido en 64 casillas negras y blancas, se utiliza en un interesante juego que un hindú, llamado Lahur Sessa, inventó hace muchos siglos. El descubrimiento del juego de ajedrez se encuentra ligado a una leyenda que encierra cálculos y números: El Príncipe Iadava, dueño de la provincia de Taligana en la India, al frente de un ejército se enfrento al brutal ataque de Varangul que se decía príncipe de Calian. El triunfo sobre este le costo la vida de su hijo el príncipe Adjamir quien se sacrifico en el instante más duro de la lucha, para salvar la posición que dio a los suyos la victoria final.

Sumido en una profunda tristeza Iadava recibe la visita de Sessa, joven brahman, quien manifiesta traer un nuevo juego que sacara al rey de su melancolía: "Participan dos personas y cada uno dispone de ocho piezas pequeñas, llamadas peones y representan la infantería, secundado por los elefantes de guerra (hoy en día torres); la caballería, aparece, simbolizada por dos piezas que pueden saltar como dos corceles, sobre las otras; y para intensificar el ataque, se incluyen dos visirres (alfiles) del rey. Otra pieza, la más fuerte de todas, representará el espíritu patriótico del pueblo y será llamada la reina. Termina la colección una pieza que aislada poco vale, pero que amparada por las otras se torna muy fuerte: es el rey".

Aprendió Iadava rapidamente y en una partida, en la que protegía mucho una pieza, Sessa comenta:

- "Mirad señor, que para conseguir la victoria es imprescindible el sacrificio del visir, así el sacrificio de un príncipe es a veces necesario para que de el resulten la paz y la libertad de un pueblo". El rey admirado ofrece al inventor darle como recompensa lo que el pida.

- "Dadme granos de trigo: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así duplicando sucesivamente hasta la última casilla del tablero". Riose el rey del extraño pedido y desconfiando de la indiferencia del joven por la fortuna exclamo:"¡Insensato! con dos o tres puñados llenare el tablero". Llamó el monarca a los algebristas más hábiles de la Corte y les ordenó calcular la porción de trigo que Sessa pedía. Esta equivalía a calcular el valor de la serie: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots\ldots$ *(64 sumandos)*

Al cabo de algunas horas los calculistas dieron su respuesta:

- Rey magnánimo, calculamos el número de granos de trigo que constituirá la recompensa elegida por Sessa, y obtuvimos un número cuya magnitud es inconcebible para la imaginación humana.

Además encontramos a cuántas "ceiras" (unidad de capacidad y de peso usada en la India) correspondería ese número total de granos, y concluimos que la cantidad de trigo que debe entregarse a Sessa equivale a una montaña, que teniendo por base la ciudad de Taligana, fuese 100 veces más alta que el Himalaya. La india entera, sembrados todos sus campos, y destruida todas sus ciudades, no produciría en un siglo la cantidad de trigo que, por vuestra promesa, debe entregarse. Ese número tiene 20 cifras y se obtiene restando 1 a la potencia 64 de 2, es decir:
$S = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$ *¡Impresionante!*

FUENTE: El hombre que calculaba

SERIES Y SUMATORIAS

Objetivos

1. *Afianzar al alumno en el estudio teórico-práctico de las series numéricas, reconociendo su estrecha relación con las sucesiones numéricas.*
2. *Deducir y aplicar, a partir de los ejercicios,* ***reglas prácticas*** *que nos permitan calcular la suma de algunas series importantes.*
3. *Conocer la noción de sumatoria (Σ) y su relación con las series numéricas, así como sus aplicaciones y propiedades.*

Introducción

Habiendo estudiado las principales sucesiones numéricas nos interesa, ahora, conocer la suma de los términos de las mismas y, para ello, desarrollaremos el presente capítulo que será de gran utilidad para seguir estudios de matemática superior.

El matemático alemán Kari Fiedrich Gauss (1777–1855) fue llamado "el Príncipe de las Matemáticas" por su dominio en el siglo XIX, de esta rama del saber. Desde niño demostró una poderosa habilidad con los números y la potencia de su genio lindó con lo increíble. Según la leyenda, a los 3 años de edad corrigió un error que su padre había hecho en el cálculo de los salarios de unos albañiles que trabajaban para él. A los 6 años su maestro de escuela, que reclamaba paz en la clase, ordenó a todos que sumaran los números del 1 al 100. Gauss inmediatamente escribió el resultado en su pizarra: 5050 y se lo mostró al profesor. Impresionado por la proeza del niño y desconfiando, quizá, de su habilidad le preguntó por el proceso que había seguido para llegar al resultado. Karl Fiedrich le indicó entonces, muy cortésmente, a su maestro lo que mentalmente había realizado.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 2S &= 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 \\ 2S &= 100(101) \\ S &= 50 \times 101 = 5050 \end{aligned}$$

Iniciamos con esta nota curiosa el estudio de un capítulo sumamente importante por ser la base para proseguir estudios de cálculo integral, ecuaciones diferenciales y otros temas de nivel superior. Se recomienda revisar los fundamentos teóricos planteados en el capítulo de sucesiones, para abordar mejor el presente tema.

Una de las aplicaciones prácticas de este capítulo en el curso de razonamiento matemático se verá cuando estudiemos el capítulo sobre conteo de figuras.

SERIE NUMÉRICA

¿Qué es una serie numérica?

Se denomina "serie numérica" a la adición indicada de los términos de una sucesión numérica llamándose al resultado de la adición **valor de la serie**. Veamos:

N° ordinal:	1°	2°	3°	4°	5°	6° . . .	12°
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Sucesión :	1,	1,	2,	3,	5,	8 . . . ,	144

Serie : 1 +1+ 2 + 3 + 5 +8+. . .+144

En general:

Sea: $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ → **"Sucesión numérica"**

⇛ $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$ → "Serie asociada a la sucesión numérica dada"

Observación:

Una forma abreviada de escribir la serie numérica es utilizando la siguiente notación:

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n = \sum_{k=1}^{k=n} t_k$$

La letra griega "$\sum$" se llama **sigma** y denota **sumatoria**. La expresión $\sum_{k=1}^{k=n} t_k$ se lee:

"Sumatoria de los números de la forma t_k desde k=1 hasta k = n"

En adelante escribiremos $\sum_{k=1}^{k=n} t_k$ como sigue: $\sum_{k=1}^{n} t_k$

entendiéndose en este caso que el subíndice k varía así: $1 \leq k \leq n$

Como podemos apreciar el índice k va tomando valores enteros positivos en forma consecutiva desde la unidad hasta el número n.

Ejemplo:

Consideremos la sucesión: {1, 4, 7, 10, 13} la serie asociada a ella es:

$$\underbrace{1 + 4 + 7 + 10 + 13}_{\text{serie numérica}} = \underbrace{35}_{\text{valor de la serie}}$$

Ahora como la sucesión finita: 1, 4, 7, 10, 13 tiene por término enésimo: $t_n = 3n-2$ para: $1 \leq n \leq 5$ podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{n=5} t_n = \sum_{n=1}^{5} (3n-2) = 1+4+7+10+13 = 35$$

Observación:

Como podemos apreciar en este último ejemplo, la idea es reemplazar los valores que va asumiendo n (n=1; 2; 3; 4; 5) en la fórmula del término enésimo de la sucesión).

Ejemplo:

Expresar las siguientes series utilizando la notación de sumatoria.

a. $\underbrace{t_4^2 + t_5^2 + t_6^2 + t_7^2 + t_8^2 + t_9^2 + t_{10}^2}_{} = \sum_{k=4}^{10} t_k^2$

Número de sumandos: 7

b. $\underbrace{\frac{a}{b}t_7 + \frac{a}{b}t_8 + \frac{a}{b}t_9 + \ldots + \frac{a}{b}t_{20}}_{} = \sum_{k=7}^{20} \frac{a}{b} t_k$

Número de sumandos: 14

c. $\underbrace{5+8+11+14\ldots}_{\text{20 sumandos}} = \sum_{n=1}^{20} (3n+2)$

Notamos que la sucesión asociada a esta serie es la P.A.: 5, 8, 11, 14, . . . cuyo término enésimo es $t_n = 3n+2$ y como vamos a sumar 20 términos diremos que n varía desde 1 hasta 20, es decir $1 \leq n \leq 20$; luego:

$$\underbrace{5+8+11+14+\ldots}_{20\text{ sumandos}} = \sum_{n=1}^{20} t_n = \sum_{n=1}^{20}(3n+2)$$

d. $S = 66+59+52+45+....+3$

Primero calcularemos el término enésimo de la P.A. asociada y luego la cantidad de sumandos.

$66\ ;\ 59\ ;\ 52\ ;\ 45\ ;\ ....\ ;\ 3 \Rightarrow t_n = -7n + 73$ (diferencias: -7, -7, -7)

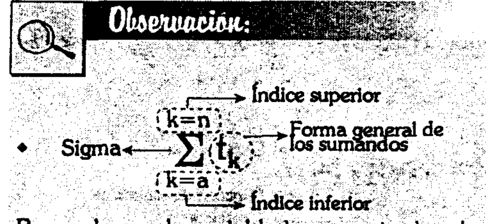
Para hallar la cantidad de términos planteamos:

$$t_n = 73-7n = 3 \Rightarrow \boxed{n=10}$$

La sucesión tiene 10 términos y por ende la serie también (pues fue construida con los 10 términos de la sucesión). Esto indica que n varía desde 1 hasta 10 ($1 \le n \le 10$)

luego:

$$66+59+52+45+\ldots+3 = \sum_{n=1}^{10}(73-7n)$$



Recuerde que la variable k va asumiendo valores enteros consecutivos desde "a" hasta "n".

Consideremos la serie:

$$\sum_{k=3}^{7} t_k = t_3+t_4+t_5+t_6+t_7$$

Podemos apreciar rápidamente que la cantidad de sumandos es 5. ¿Cómo llegamos a calcular el número de sumandos a partir de los datos que nos proporciona la notación de sumatoria?.

Veamos:

Observa los subíndices resaltados de los siguientes sumandos: $t_{③}$; t_4 ; t_5 ; t_6 ; $t_{⑦}$ y mira, ahora, el siguiente esquema:

7 términos

1 ; 2 ; ③; 4 ; 5 ; 6 ; ⑦

2 términos — 5 términos

Luego:

\# de sumandos: $5 = 7 - 2$

$= 7 - (3 - 1)$

$= ⑦ - ③ + 1$

Índice superior (7) — Índice inferior (3)

A partir de este sencillo ejemplo podemos establecer una regla para calcular el número de sumandos de una sumatoria como sigue.

Si tenemos la expresión: $\sum_{k=a}^{n} t_k$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{N° sumandos} \\ \text{de la serie}\end{matrix} = n-a+1;\ \ a\ ;n \in \mathbb{Z}^+}$$

Ejemplo 1

¿Cuántos sumandos tiene la serie desarrollada a partir de: $\sum_{k=5}^{30}(2k-7)$?

Resolución:

No hace falta desarrollar la sumatoria para calcular el número de sumandos, aplicaremos la regla práctica.

Número de sumandos: $30-5+1 = 26$

Ejemplo 2

Hallar la cantidad de sumandos de: $\sum_{k=7}^{k=15} t_k$

Resolución:

Aplicando la regla práctica tendremos:

Número de sumandos: $15-7+1 = 9$

ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS

- $\boxed{\sum_{k=a}^{n} C = (n-a+1)\times C;\ \text{donde C es constante}}$

Ejemplo 1

$$\sum_{k=3}^{11} 7 = (11-3+1)\times 7 = 9(7) = 63$$

En particular cuando a=1 tendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} C = n \times C$$

Ejemplo 2

$$\sum_{k=1}^{9} 10 = 9(10) = 90$$

- $$\sum_{k=a}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{a-1} t_k$$

Ejemplo 3

$$\sum_{k=7}^{15} k^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^{6} k^2$$

- $$\sum_{k=a}^{n} (at_k \pm bP_k) = a\sum_{k=a}^{n} t_k \pm b\sum_{k=a}^{n} P_k$$

Ejemplo 4

$$\sum_{k=5}^{12} (3k^2 - 7k) = 3\sum_{k=5}^{12} k^2 - 7\sum_{k=5}^{12} k$$

Propiedad Telescópica

- $$\sum_{k=1}^{n} (t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1$$

Ejemplo 5

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{11} - 1 = \frac{-10}{11}$$

SERIE ARITMÉTICA

¿Qué es una serie aritmética?

Es la adición indicada de los términos de una sucesión aritmética.

Ejemplo 1

Calcular el valor de la siguiente serie:
S = 4+7+10+13+16+19+22+25+28+31+34

Resolución:
Como la cantidad de sumandos es reducida podríamos efectuar la adición directamente, pero como deseamos hallar una expresión general que nos permita calcular el valor de una serie aritmética cualquiera, procederemos del siguiente modo: sabemos que la adición de una cantidad finita de sumandos es siempre conmutativa; es decir, el orden de los sumandos no altera la suma total; entonces vamos a invertir el orden de los sumandos de la expresión dada y luego sumaremos término a término, veamos:

	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°
S =	4	+7	+10	+13	+16	+19	+22	+25	+28	+31	+34
Invirtiendo: S =	34	+31	+28	+25	+22	+19	+16	+13	+10	+7	+4
Sumando término a término: 2S =	38	+38	+38	+38	+38	+38	+38	+38	+38	+38	+38

(11 sumandos)

$$S = 38(11) \Rightarrow S = \frac{38(11)}{2} = \frac{(4+34)11}{2} = 209$$

luego: $S = \frac{(4+34)\,11}{2}$

- 4 → 1er. sumando
- 34 → Último sumando
- 11 → Cantidad de sumandos
- 2 → Constante

Ejemplo 2

Calcular el valor de la siguiente serie:
S = 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + ... + 38

Resolución:

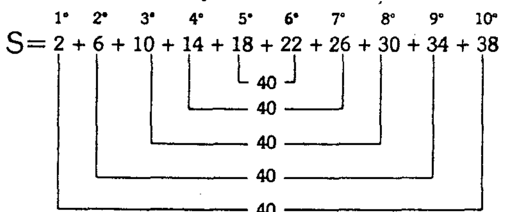
Para calcular el valor de la serie es necesario conocer la cantidad de sumandos. Entonces como primer paso calcularemos la cantidad de sumandos:

Cálculo de la cantidad de sumandos: La serie dada tiene como sucesión asociada a la progresión aritmética:

PA: 2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; . . . . ; 38 cuyo término enésimo es:

$$t_n = 4n - 2$$

Ahora hacemos $4n-2 = 38$
resolviendo: $n = 10$
Lo cual nos indica que el número de términos de la sucesión es diez; y por ende la cantidad de sumandos de la serie formada con dichos términos es diez.
De acuerdo a esto planteamos:



Observa que en esta oportunidad hemos procedido de manera distinta al ejemplo anterior pues, hemos formado parejas y como eran 10 sumandos se formarán 5 parejas siendo la suma de cada una de ellas, 40. Luego:

$S = 40+40+40+40+40$ (5 Sumandos)

$S = 40\,(5)$ dando forma: $S = \dfrac{(2+38)(10)}{2}$

Así: $S = \dfrac{(2+38)\,(10)}{2}$ → (2): 1er. sumando; (38): Último sumando; (10): Cantidad de Sumandos; 2: Constante

De los ejemplos (1) y (2) podemos concluir que para hallar el valor de una serie aritmética finita basta con emplear:

$$S = \left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)n$$

donde:
t_1 : 1er. sumando
t_n : último sumando
n : cantidad de sumandos

Sin embargo no podemos basarnos únicamente en estos dos casos estudiados para afirmar lo anterior, tenemos que demostrar necesariamente que la expresión deducida siempre se podrá utilizar para calcular el valor de una serie aritmética finita.

Afirmación: Dada la PA finita: t_1 ; t_2 ; t_3 ; . . . ; t_n
y la serie aritmética asociada a ella:

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

El valor de la serie aritmética viene dada por la expresión:

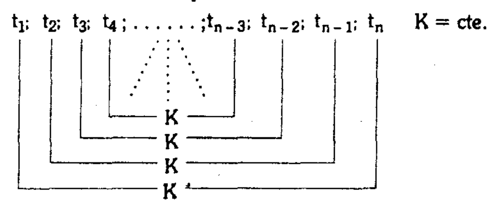
$$S = \sum_{k=1}^{n} t_k = \left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)n$$

donde: t_1 : 1er. sumando
t_n : último sumando
n : cantidad de sumandos

Prueba:
Consideremos la PA.:

t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 .... ; t_n
(r r r ....)

Recordemos una observación hecha en el capítulo de sucesiones sobre las progresiones aritméticas: "**En una progresión aritmética la suma de los términos equidistantes de los extremos es siempre constante**", así en la progresión aritmética se cumple:



Luego:
$K = t_1+t_n = t_2+t_{n-1} = t_3+t_{n-2} = \ldots$
Ahora, escribiendo la serie aritmética asociada a esta progresión aritmética como se muestra a continuación, y sumando término a término tendremos:

$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$
Invirtiendo: $S = t_n + t_{n-1} + t_{n-2} + \ldots + t_3 + t_2 + t_1$ (+)
Sumando término a término: $2S = K + K + K + \ldots + K + K + K$

Despejando "S":

$$S = \frac{k.n}{2} \Rightarrow S = \left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)n$$

Hemos probado entonces que $S = \left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)n$

adicionalmente podemos también utilizar:

$S = \left(t_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right)n$ (Demuéstralo!!)

Observación:

Una de las formas de obtener la razón aritmética es:

$$r = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = ...$$

Ejemplo 3

Hallar el valor de la siguiente serie:
$S = 4+7+10+ ...... + 61$

Resolución:

Cálculo del número de sumandos:

Como la P.A. asociada es:
$4 ; 7; 10; 13; ......; 61 \Rightarrow t_n = 3n+1$

$\therefore\ 3n + 1 = 61$

$n = 20$

Lo cual indica que hay 20 sumandos:

Cálculo del valor de la serie: $S = \left(\frac{4+61}{2}\right)20$

$\therefore$ $\boxed{S = 650}$

Ejemplo 4

Calcular:

$A = \underbrace{17 + 21 + 25 + ...}_{\text{20 sumandos}}$

Resolución:

No hace falta conocer el último término para hallar el valor de esta serie pues podemos utilizar la expresión:

$$S = \left(t_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right)n$$

Luego: $A = \left(17 + \frac{(20-1)4}{2}\right)20$

$\Rightarrow A = (55)20 \quad \therefore\ A = 1100$

Ejemplo 5

Calcular: $R = 2+5+8+11+.... + 119$

Resolución:

P.A asociada: 2 ; 5; 8 ; 11; .....; 119
$t_n = 3n-1 \Rightarrow 3n-1 = 119 \Rightarrow n= 40$

Hay 40 sumandos.

Luego: $R = \left(\frac{2+119}{2}\right)40$

$\boxed{R = 2420}$

Ejemplo 6

El segundo término de una P.A. es 7 y el séptimo término es 22. Hallar la suma de los 100 primeros términos de la P. A.

Resolución:

Según el enunciado:

+5r

t_1 t_2 .... t_7 t_8 .... t_{100}
○; 7; .... ;22; ○....... ○

15

Luego: $5r = 15$, $\therefore r = 3$ } deducimos de aquí que $t_1 = 4$

luego: $S = \underbrace{4 + 7 + 10 + ...}_{\text{100 términos}}$

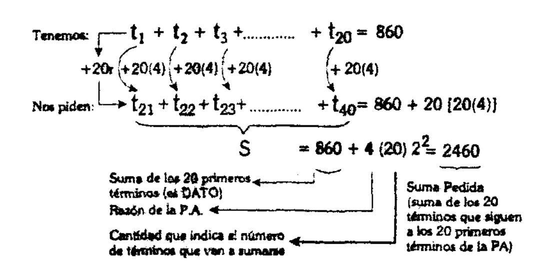
$\Rightarrow S = \left(4 + \frac{(100-1)3}{2}\right)100 \quad \therefore \boxed{S = 15250}$

Ejemplo 7

La suma de los 20 primeros términos de una P.A. de razón 4 es 860. Calcular la suma de los siguientes 20 términos de dicha P.A.

Resolución:

Según el enunciado:



Tienes que reparar en el hecho siguiente: nos dan como dato: "**la suma de los 20 primeros términos**" y nos piden calcular "**la suma de los 20 siguientes términos**" es decir que la cantidad de términos –en este caso veinte– es la misma tanto en el dato como en lo que nos piden. ¿Nos ayudará este hecho a realizar una generalización?

Para entenderlo mejor veamos otro ejemplo:

Ejemplo 8

La suma de los 40 primeros términos de una PA de razón 7 es 5580.

Calcular la suma de los 40 términos siguientes:

Resolución:

Tenemos: $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_{40} = 5580$

+40r +40(7) +40(7) +40(7) +40(7)

Nos piden: $\underbrace{t_{41} + t_{42} + t_{43} + \ldots + t_{80}}_{S} = 5580 + 40\,[40(7)]$

$= 5580 + 7(40)^2$

$$\boxed{S = 16780}$$

En general:

Si la suma de los n primeros términos de una PA de razón **r** es **S** entonces la suma de los **n** siguientes términos de dicha PA viene dado por:

$$\boxed{S_n = S + r.n^2} \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Donde: S_n : suma de los n siguientes términos

Ejemplo 9

La suma de los 30 primeros términos de una PA de razón 3 es 1665. Calcular el triple de la suma de los 30 siguientes términos de dicha PA

Resolución:

Dato: La suma de los 30 primeros términos de la PA es 1665

Nos piden el triple de la suma de los 30 siguientes términos de la PA y de acuerdo al resultado obtenido en (α) tendremos: $1665 + 3(30)^2 = 4365$

Luego, el triple de la cantidad hallada, será $3(4365) = 13095$

$\therefore$ $\boxed{13095}$

Ejemplo 10

La suma de 20 números enteros consecutivos es 430. ¿cuál es la suma de los 20 siguientes números enteros consecutivos?

Resolución:

Como son enteros consecutivos, la razón es 1, luego:

Dato: suma de 20 enteros consecutivos: 430

Piden: suma de 20 enteros siguientes: $430 + 1(20)^2 = 830$

$\therefore$ $\boxed{830}$

Ejemplo 11

La suma de "n" números pares consecutivos es S. ¿Cuál es la suma de los "n" siguientes números pares consecutivos?

Resolución:

Como los números sumados son pares consecutivos la razón es 2, entonces:

Dato:

Suma de "n" números pares consecutivos: S

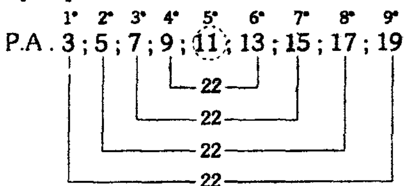
Nos piden: Suma de "n" siguientes números pares consecutivos: $S + 2n^2$

$\therefore$ $\boxed{S + 2n^2}$

Observación:

Recordemos que si una progresión aritmética tiene una cantidad impar de términos, entonces existe un único término central, el cual denotamos por t_c. Además si "n" es el número impar que indica la cantidad de términos de la PA entonces el lugar que ocupa el t_c viene dado por: $\frac{n+1}{2}$.

Ejemplo:



En este ejemplo, como n=9 entonces el lugar que ocupa el t_c es: $\frac{9+1}{2} = 5$.

Es decir, el quinto lugar.

Valor de una serie aritmética empleando el término central

Sabemos que el término central es la semisuma de los términos equidistantes de los extremos, así; del ejemplo anterior:

$$t_c = 11 = \frac{3+19}{2} = \frac{5+17}{2} = \frac{7+15}{2} = \frac{9+13}{2}$$

En general, para una cantidad impar de términos se tendrá;

$$\text{P.A.: } \underbrace{t_1;\ t_2;\ t_3;\ \ldots\ t_c;\ \ldots\ t_{n-2};\ t_{n-1};\ t_n}_{\text{"n" términos (N° impar)}}$$

$$\Rightarrow t_c = \frac{t_1+t_n}{2} = \frac{t_2+t_{n-1}}{2} = \frac{t_3+t_{n-2}}{2} = \ldots$$

Ahora:

$S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_c + \ldots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n$

Además, como el valor de la serie viene dada por:

$S = \underbrace{\left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)}_{t_c} n$ entonces $S = t_c \times n$

Luego; en una serie con una cantidad impar de términos de la cual conocemos su término central, la suma es:

$$S = t_c \times n$$

Ejemplo 12

Calcular el valor de una serie aritmética de 19 términos cuyo término central es 17

Resolución:

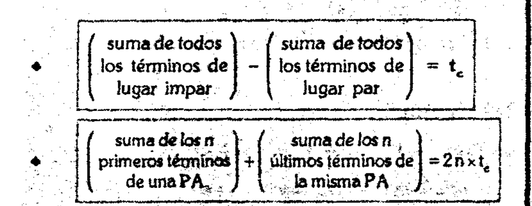
Datos: $\begin{cases} t_c = 17 \\ n = 19 \end{cases}$

como: $S = t_c \times n$

Entonces: $S = 17 \times 19 = 323$

Observación:

En toda progresión aritmética con una cantidad impar de términos se cumple:



- $\left(\begin{array}{c}\text{suma de todos}\\ \text{los términos de}\\ \text{lugar impar}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{suma de todos}\\ \text{los términos de}\\ \text{lugar par}\end{array}\right) = t_c$
- $\left(\begin{array}{c}\text{suma de los n}\\ \text{primeros términos}\\ \text{de una PA}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{suma de los n}\\ \text{últimos términos de}\\ \text{la misma PA}\end{array}\right) = 2n \times t_c$

Ejemplo 13

Una PA posee una cantidad impar de términos. Se sabe que la suma de los términos de lugar impar es 459 y que la suma de los términos de lugar par es 442. Calcule el t_c.

Resolución:

Suma de términos de lugar impar : 459

Suma de términos de lugar par : 442 (–)

∴ De la observación anterior: $t_c = 17$

Ejemplo 14

La suma de los 5 primeros términos de una PA creciente de 17 términos es 35 y la suma de los 5 últimos términos de la misma PA es: 215. Hallar el noveno término.

Resolución:

Como la PA tiene 17 términos entonces n = 17 y el lugar que ocupa el término central será: $\frac{17+1}{2} = 9$

Así, vemos que el t_c ocupa el 9no. lugar; luego al pedirnos que calculemos el noveno término en realidad nos están pidiendo hallar el término central.

Entonces:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{Suma de los 5}\\ \text{primeros términos}\end{array}\right)}_{35} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{Suma de los 5}\\ \text{últimos términos}\end{array}\right)}_{215} = 2(5) \times t_c$$

$$250 = 10 \times t_c$$

$$\therefore t_c = 25$$

SERIE GEOMÉTRICA

¿Qué es una serie geométrica?

Es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica. Ahora, la serie geométrica puede ser finita ó infinita según sea la naturaleza de la sucesión asociada a ella. Estudiaremos ambos tipos.

A. SERIE GEOMÉTRICA FINITA

La serie geométrica finita se origina a partir de la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica finita.

Ejemplo 1

Dada la PG finita: 2; 6 ; 18; 54; 162; 486; 1458 expresar la serie asociada a ella.

Resolución:

notamos que la PG tiene 7 términos.

La serie geométrica finita asociada a la PG dada será:

$$\underbrace{2 \overset{\times 3}{+} 6 \overset{\times 3}{+} 18 \overset{\times 3}{+} 54 \overset{\times 3}{+} 162 \overset{\times 3}{+} 486 \overset{\times 3}{+} 1458}_{\text{7 sumandos}}$$

Observa que la razón geométrica de la progresión es q=3. Este valor que también va a intervenir en el cálculo de la suma de la serie geométrica.

Ejemplo 2

Calcular el valor de la serie geométrica finita dada en el ejemplo anterior.

Resolución:

Podemos apreciar por simple inspección que la cantidad de términos de la PG determina también la cantidad de sumandos de la serie, siendo en el ejemplo dado n=7

Así: 1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°

$$S = 2+6+18+54+162+486+1458$$

dando forma adecuada:

$$S=2+2\times3^1+2\times3^2+2\times3^3+2\times3^4+2\times3^5+2\times3^6$$

Multiplicamos por la razón (q=3):

$$-\begin{cases} 3S = 2\times3^1+2\times3^2+2\times3^3+2\times3^4+2\times3^5+2\times3^6+2\times3^7 \\ S = 2+2\times3+2\times3^2+2\times3^3+2\times3^4+2\times3^5+2\times3^6 \end{cases}$$

$$3S-1S=-2+ / + / + / + / + / + / +2\times3^7$$

$$(3-1)S = 2\times3^7-2 \Rightarrow S = \frac{2(3^7-1)}{3-1}$$

Luego:

$$S = ②\left(\frac{③^{⑦}-1}{③-1}\right)$$

(2: 1er. término; 3: Razón geométrica; 7: Cantidad de sumandos)

Es evidente que la suma se pudo realizar de manera directa con los 7 números dados, lo cual es más sencillo en comparación con el procedimiento mostrado. Esto ocurre por que la cantidad de sumandos es pequeña (¡apenas 7 sumandos!) Pero si fuera mucho mayor, digamos 20 o más sumandos, ya no sería tan "**sencillo**" efectuar la suma directamente ¿no crees?

Por éllo el procedimiento mostrado tiene la ventaja de indicar como intervienen los datos en el cálculo de la suma obteniéndose al final una expresión que nos permite calcular el valor de la serie en forma relativamente fácil. Apreciaremos mejor lo dicho en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Calcular S = 3+6+12+24+48+. . . . . + 1536

Resolución:

S = 3+6+12+24+48+ . . . . . + 1536

Recordemos que la PG asociada es:

3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; ..... ; 1536,
×2 ×2 ×2 ×2

cuyo término enésimo es: $t_n = 3\times2^{n-1}$

Haciendo uso del término enésimo calculamos la cantidad de términos:

$t_n = 3\times2^{n-1} = 1536 \Rightarrow 2^{n-1} = 512 = 2^9 \Rightarrow n-1=9$

$\therefore$ n=10

Luego, la serie geométrica tiene 10 sumandos pues se ha construido con los 10 términos de la PG asociada:

Así:

	1°	2°	3°	4° ...	9°	10°
S =	3 +	6 +	12 +	24 + . . . +	768 +	1536
S =	3 +	3×2^1 +	3×2^2 +	3×2^3 + . . .	3×2^8 +	3×2^9

Multiplicamos por la razón: q=2 (¿por qué?) y si restamos término a término se cancelan expresiones iguales, luego:

$$-\begin{cases} 2S = \quad 3\times2^1 + 3\times2^2 + 3\times2^3 + \ldots + 3\times2^9 + 3\times2^{10} \\ S = 3 + 3\times2^1 + 3\times2^2 + 3\times2^3 + \ldots + 3\times2^9 \end{cases}$$

$$2S - S = -3 + \;/\; + \;/\; + \;/\; + \ldots + \;/\; + 3\times2^{10}$$

$(2-1)S = 3\times2^{10}-3$

Dando forma: $S = \dfrac{3(2^{10}-1)}{2-1}$

Luego:

$$S = \underset{\text{1er. término}}{3}\times\left(\frac{\overset{\text{Razón}}{2}^{\overset{\text{Cantidad de sumandos}}{10}}-1}{\underset{\text{Razón}}{2}-1}\right)$$

Podemos deducir de los ejemplos anteriores:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n-1)}{q-1}}$$

donde:

t_1 = 1er. término

q = razón geométrica

n = cantidad de sumandos

Después de apreciar bien lo realizado quizás hayas encontrado la respuesta a las preguntas hechas en el texto (¿por qué multiplicamos por 3 y por qué multiplicamos por 2?). Corrobora ahora tu respuesta: el objetivo de multiplicar por la razón respectiva es la de minimizar la expresión dada pues al restar las expresiones indicadas se cancelan términos iguales reduciendo la cantidad de sumandos a tan solo dos.

Observación:

Una de las formas de obtener la razón geométrica es:

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{t_4}{t_3} = \ldots\ldots$$

Ejemplo 4

Halle S en:

$S = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{15}$

Resolución:

Observando los exponentes deducimos la cantidad de términos: n = 16 .

Además: q = 2 $\wedge$ $t_1 = 1$

luego: $S = 1\left(\dfrac{2^{16}-1}{2-1}\right) \Rightarrow S = 65535$

Otra forma de expresar la serie geométrica finita es utilizando la notación de sumatoria:

$$S=\underbrace{t_1+t_1q^1+t_1q^2+t_1q^3+\ldots+t_1q^{n-1}}_{n \text{ sumandos}}=\sum_{k=0}^{n-1} t_1q^k=t_1\sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

Luego:

$$S=t_1\sum_{K=0}^{n-1} q^K=t_1\sum_{K=1}^{n} q^{K-1}=t_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)=t_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

Ejemplo 5

Calcular la razón y la suma de los 7 términos de una PG si $t_1 = 36$ y $t_7 = 4/81$

Resolución:

Como $t_n = t_1 q^{n-1} \Rightarrow t_7 = 36(q)^{7-1} = \frac{4}{81}$

$q^6 = \frac{1}{9^3}$ de donde $q = \frac{1}{3}$

Luego: $S = 36\left(\frac{(1/3)^7-1}{(1/3)-1}\right) = \frac{4372}{81}$

Consideremos ahora la última expresión en la cadena de igualdades en la última línea de la observación anterior:

$S = t_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ efectuando nos queda:

$$S=\frac{t_1-\boxed{t_1q^n}}{1-q}$$

Sabemos que en una PG $t_n = t_1 q^{n-1}$
luego: $qt_n = t_1q^n$ . . . . (α)
Reemplazamos (α) en el numerador de la fracción: (en aquella expresión encerrada por la línea punteada)

$$\boxed{S = \frac{t_1-q.t_n}{1-q}}$$

También podemos usar esta expresión para calcular la suma de una serie geométrica finita:

Ejemplo 6

Dada la PG: 10 términos: 2; . . . . ., –1024
Calcular la suma de dichos términos.
Resolución:
Cálculo de la razón: $t_n = t_1q^{n-1}$

$t_{10} = 2\times q^{10-1} \rightarrow -1024 = 2\times q^9 \quad \therefore q = -2$
Entonces:

$$S = \frac{2-(-2)(-1024)}{1-(-2)} = \frac{-2046}{3} = -682$$

$\therefore \quad S = -682$

Ejemplo 7

Calcular:
$A = 4+12+36+108+324+\ldots$ (20 sumandos)

Resolución:

$\left.\begin{array}{l} t_1=4 \\ q=3 \\ n=20 \end{array}\right\} \Rightarrow S = 4\left(\frac{3^{20}-1}{3-1}\right)$

$\therefore S = 2(3^{20}-1)$

Ejemplo 8

Calcular:

$$A = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{20 \text{ cifras}}$$

Resolución:
Podemos escribir cada sumando de A utilizando potencias de 10. Así:
$A = (10^1-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\ldots+(10^{20}-1)$
Observa que el exponente de la base 10 de cada sumando coincide con el número de cifras nueve del sumando correspondiente.
Luego el número de términos es: $n = 20$
Agrupando:

$$A=(10^1+10^2+10^3+\ldots+10^{20})-(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{20 \text{ sumandos}})$$

$$A = 10\left(\frac{10^{20}-1}{10-1}\right)-20 \Rightarrow A = \frac{10^{21}-190}{9}$$

Ejemplo 9

Hallar la suma S en:

$$S = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots + \underbrace{777\ldots777}_{20\text{ cifras}}$$

Resolución:

Vamos a darle forma adecuada a la expresión dada para convertirla en algo más sencillo de manejar. En este caso multiplicamos por 9/7 para obtener:

$$\frac{9}{7}S = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{20\text{ cifras}}$$

Del ejemplo anterior:

$$\frac{9}{7}S = \frac{10^{21}-190}{9} \qquad \therefore\ S = \frac{7}{81}(10^{21}-190)$$

Ejemplo 10

La suma de los seis primeros términos de una P.G. es igual a nueve veces la suma de los 3 primeros términos. Hallar la razón:

Resolución:

$$\underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}_{} = 9(t_1 + t_2 + t_3)$$

$$\frac{\cancel{t_1}(q^6-1)}{\cancel{q-1}} = 9\left[\frac{\cancel{t_1}(q^3-1)}{\cancel{q-1}}\right] \longrightarrow q^6 - 1 = 9(q^3-1)$$

$$\cancel{(q^3-1)}(q^3+1) = 9\cancel{(q^3-1)} \longrightarrow q^3 + 1 = 9$$

$$\therefore\ q = 2$$

Ejemplo 11

Se contrata a un vendedor para la venta de autos prometiéndosele pagar una comisión por el primer auto que venda y luego se le irá duplicando dicha suma por cada nuevo auto vendido. Si vende 12 autos y recibe por ellos S/. 12285 soles, ¿cuánto le pagaron por el quinto auto vendido?

Resolución:

Sea S/. x lo que recibe como comisión por el primer auto vendido. Planteamos:

Auto N°: 1° 2° 3° 4° 5° ... 12°

$$x\ ;\ 2x\ ;\ 4x\ ;\ 8x\ ;\ 16x\ ;\ \ldots\ ;\ \square$$

(×2 ×2 ×2 ×2)

Notamos que: $t_1 = x$; $q = 2$; $n = 12$

Entonces, en total recibe:

$$\underbrace{x + 2x + 4x + \ldots + \bigcirc}_{12\text{ sumandos}} = 12285$$

$$x\left(\frac{2^{12}-1}{2-1}\right) = 12285$$

$$x(4095) = 12285 \Rightarrow x = 3$$

Ahora, por el 5° auto recibió:

$$16x = 16(3) = S/.\ 48$$

Ejemplo 12

Calcular A = 32+16+8+4+. . . (20 sumandos)

Resolución:

Observamos que: $t_1 = 32$; $q = 1/2$; $n = 20$

$$A = 32 + 16 + 8 + 4 + \ldots\ldots (20\text{ sumados})$$

$$\times\frac{1}{2}\quad \times\frac{1}{2}\quad \times\frac{1}{2}$$

$$A = 32\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}\right) \Rightarrow A = 32\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

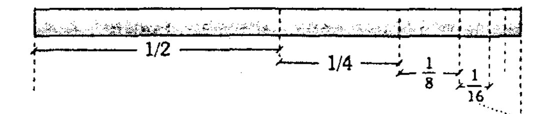
$$A = \frac{32}{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) \Rightarrow A = 64\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right)$$

$$\therefore\ A = 64\left(\frac{2^{20}-1}{2^{20}}\right) = \frac{1048575}{16384}$$

B. SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE DE INFINITOS TÉRMINOS ($|q| < 1$)

Ejemplo 1

Supongamos que tenemos una regla de madera y en ella hacemos una marca en la mitad de la misma, otra marca en su cuarta parte; otra indicando su octava parte y así sucesivamente. Para entenderlo mejor veamos el siguiente gráfico:



Sumemos ahora las partes:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots$$

($\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$ ...)

Podemos apreciar la suma de 1; 2; 3 y 4 términos respectivamente. Cabe preguntarse ¿cuánto será la suma de los 20 primeros términos? y ¿de los 1000 primeros? Y en general ¿la suma de los "n" primeros?. Son casos ya vistos en el apartado anterior sobre series geométricas finitas. En el gráfico se observa que la suma se va acercando hasta el extremo de la regla "**sin llegar**"; claro está, a dicho extremo. Si vamos sumando así una cantidad sumamente grande de términos, estaremos tan cerca del extremo como queramos, siendo la suma "un número aproximado a 1" es decir "casi toda la regla". Diremos que la suma límite será S=1 (es decir, toda la regla) cuando la cantidad de sumandos sea infinita.

Luego:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\infty \Rightarrow S_{\text{límite}} = 1$$

Pero, calcularemos la suma de otra forma, como:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\infty$$

Multiplicando por 1/2 a ambos miembros queda:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\infty$$

Ahora restamos $S - \frac{1}{2}S$:

$$\begin{aligned} S: &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\infty \\ (-)\quad \frac{1}{2}S &= 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\infty \end{aligned}$$

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}$$

¡¡Se cancelan los infinitos términos!! **(Claro está, excepto el que se muestra)**

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)S = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

y aquí se puede notar que:

$$\Rightarrow S = \frac{\overset{\text{1er. término}}{\frac{1}{2}}}{1 - \underset{\text{Razón geométrica}}{\frac{1}{2}}}$$

Ejemplo 2

Calcular $S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \ldots\infty$

Resolución:

$$S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \ldots\infty$$

($\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$)

Si multiplicamos por la razón $q = \frac{1}{2} < 1$

Tendremos:

$$\frac{1}{2}S = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \ldots\infty$$

Restamos: $S - \frac{1}{2}S$

$$S: \quad = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 \ldots\ldots \infty$$

(-)

$$\frac{1}{2}S = 0 + 16 + 8 + 4 + 2 \ldots\ldots \infty$$

$$S - \frac{1}{2}S = 32$$

Como notaras, hemos acomodado convenientemente los términos de ambas expresiones de tal manera que al restar se cancelan términos iguales.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)S = 32 \Rightarrow S = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 64$$

Podemos observar que:

$$S = \frac{32}{1-\frac{1}{2}}$$

32 → 1er. término

$\frac{1}{2}$ → Razón geométrica

De aquí concluimos que:

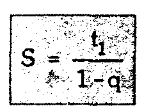
Dada la P.G. infinita:

$$t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; \ldots \infty$$

$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q$

donde $0 < |q| < 1$, recordemos que la serie asociada a ella es: $S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots \infty$

El valor de esta serie geométrica infinita es:



$$S = \frac{t_1}{1-q}$$

No debemos olvidar que "la suma de infinitos sumandos" por sí misma carece de sentido y por lo tanto lo que estamos haciendo es calcular una suma límite; es decir; hallar un número hacia el cual se van acercando (**van convergiendo**) las sumas de una cantidad de sumandos cada vez mayor (**sumas parciales**). Entonces, a medida que vayamos aumentando la cantidad de sumandos y que dicha cantidad sea tan grande como queramos los números que indican las sumas parciales irán formando una sucesión numérica que va a converger a un número dado el cual será la "**suma límite**".

Podemos también afirmar que este número (la suma límite) es una cota para todas las sumas parciales; es decir; aunque tomemos una gran cantidad de sumandos, la suma nunca "rebasará" dicho número y a lo más "cuando la cantidad de sumandos sea infinita" la suma será igual a dicho número.

Matemáticamente hablando: Recordemos que en la página 575 tenemos la siguiente expresión:

$$S = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} \ldots (\beta)$$

La cual proporciona el valor de una serie geométrica finita, solo que en nuestro caso $0<|q|<1$.

Ahora, desdoblando la expresión (β) tendremos:

$$S = \frac{t_1 - t_1 q^n}{1-q} = \left(\frac{t_1}{1-q}\right) - \left(\frac{t_1}{1-q}\right) q^n \ldots (\Delta)$$

En particular para una sucesión asociada a una serie, el número: $\frac{t_1}{1-q}$ es una constante:

Luego; si en la expresión Δ; hacemos variar "n" (la cantidad de sumandos de la serie) entonces la única expresión que se ve afectada por esta variación es q^n. Como estamos considerando $0<|q|<1$ entonces $|q^n|$ decrece al crecer "n" de manera que: $\left|\frac{t_1}{1-q}\right| \cdot |q^n|$ se vuelve muy pequeño al tomar "n" valores suficientemente grandes.

Entonces:

$\left|\frac{t_1}{1-q}\right| \cdot |q^n| \to 0$; esto significa que "la expresión tiende a cero"; es decir se hace tan pequeña como se quiera para valores de "n" suficientemente grandes.

Esto se denota así: $(n \to \infty)$. En consecuencia; cuando $n \to \infty$ ("n" tiende al infinito) la expresión: $S = \left(\frac{t_1}{1-q}\right) - \left(\frac{t_1}{1-q}\right) q^n$

se transformaría en:

$$\underbrace{\text{Suma límite}}_{S_L} = \frac{t_1}{1-q}$$

pues: $\left(\dfrac{t_1}{1-q}\right).q^n$ "**se hace cero**" si $n \to \infty$

Podemos escribir lo anterior así:

$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{t_1}{1-q}\right) - \left(\frac{t_1}{1-q}\right).q^n\right]$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} S = \overbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t_1}{1-q}\right)}^{\text{cte.}} - \overbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{t_1}{1-q}\right).q^n}^{\text{tiende a cero}}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S = \frac{t_1}{1-q} - 0 = \frac{t_1}{1-q}$$

Luego:

$$\boxed{\underbrace{\text{Suma límite}}_{S_L} = \frac{t_1}{1-q} \quad \text{para: } 0<|q|<1}$$

la desigualdad : $0<|q|<1$ nos indica que $-1<q<0$ ó $0<q<1$

Observación

En adelante "S_L lo denotaremos simplemente como S".

Ejemplo 3

Calcular el valor de la suma límite en:

$$S = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$$

Resolución:

Observamos que:

$$S = \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}}_{\times\frac{2}{3}\ \times\frac{2}{3}\ \times\frac{2}{3}\ \times\frac{2}{3}} + \ldots\ldots \qquad q = \frac{2}{3} < 1$$

$$\text{Luego: } S = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}} \rightarrow S = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 4

Dada la PG infinita: $\dfrac{3}{5}; \dfrac{-9}{20}; \dfrac{27}{80}; \dfrac{-81}{320}; \ldots\ldots$

Calcular el valor de la su suma límite de sus términos:

Resolución:

Primero calcularemos la razón y a continuación la suma límite.

$$\frac{3}{5}; \frac{-9}{20}; \frac{27}{80}; \frac{-81}{320}; \ldots\ldots$$
$$\times\left(\frac{-3}{4}\right)\ \times\left(\frac{-3}{4}\right)\ \times\left(\frac{-3}{4}\right)$$

$$|q| = \left|-\frac{3}{4}\right| < 1$$

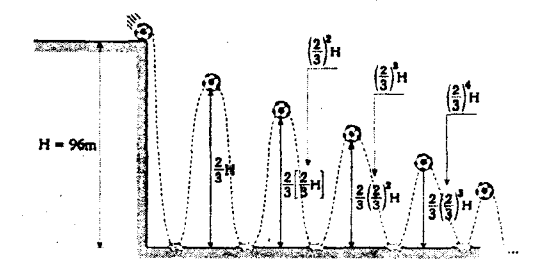
$$\text{entonces: } S = \frac{3}{5} - \frac{9}{20} + \frac{27}{80} - \frac{81}{320} + \ldots$$

$$\text{luego: } S = \frac{\frac{3}{5}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}} \quad \therefore \quad S = \frac{12}{35}$$

Ejemplo 5

Dejamos caer una pelota, desde una altura de 96m y en cada rebote se eleva hasta los 2/3 de la altura desde la cual cae. Calcular el recorrido total de la pelota hasta que se detiene.

Resolución:



Según el gráfico notamos que el recorrido total es:

$$S = H+2\left(\frac{2}{3}H\right)+2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2H\right)+2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3H\right)+\ldots\infty$$

$$S = H+2H\underbrace{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right)}$$

Calculamos la suma límite

$$S = H+2H\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow S = H + 2H(2) = 5H$$

Luego: como H = 96 m tendremos:

S = 5(96 m)

∴ Recorrido total: 480m

Nota:

La expresión:

$$A = \frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\ldots\infty$$

Podemos también calcularla así: Factorizamos la razón a partir del 2do. término y tendremos:

$$A = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\ldots\infty\right)}_{A}$$

$$A = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}(A) \Rightarrow \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}$$

∴ A = 2 y reemplazando en S tendremos :

S = H+2H(2)=5H

Finalmente S = 5(96) = 480

PRINCIPALES SERIES Y SUMAS NOTABLES

Suma de los "n" Primeros Números Naturales

$$\sum_{k=1}^{n} K = \underbrace{1+2+3+4+5+\ldots+n}_{\text{"n" sumandos}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo:
En el siguiente arreglo triangular, hallar la suma de las 20 primeras filas.

F_1 → 1
F_2 → 2 3
F_3 → 4 5 6
F_4 → 7 8 9 10
. . . .

Resolución:

Nos piden:

$$S = \underbrace{F_1}_{1} + \underbrace{F_2}_{2+3} + \underbrace{F_3}_{4+5+6} + \ldots + \underbrace{F_{20}}_{\boxed{}\ \text{20 Sumandos}}$$

Como F_1 tiene un sumando
F_2 tiene dos sumandos
F_3 tiene tres sumandos
⋮ ⋮ ⋮ ⋮
y F_{20} tiene 20 sumandos

Entonces el número total de sumandos será:

$$1+2+3+\ldots+20=\frac{20(21)}{2}=210 \text{ sumandos}$$

$$\text{Luego } S=\frac{210(211)}{2} \therefore S=22155$$

Otra forma:

Observa que los últimos números de las filas son: 1, 3, 6, 10, ... (sucesión de números triangulares) luego el último número de F_{20} será:

$$\frac{20(21)}{2}=210$$

Entonces:

$$S=1+2+3+\ldots+210=\frac{210(211)}{2}=22155$$

Suma de los "n" Primeros Números Pares Naturales

$$\sum_{K=1}^{n} 2K=\underbrace{2+4+6+8+\ldots\ldots 2n}_{\text{"n" sumandos}}=n(n+1)$$

Ejemplo 1

Hallar el valor de "S":

$$S=\underbrace{2+4+6+8+\ldots\ldots}_{20 \text{ sumandos}}$$

Resolución:

$$S=\underbrace{2+4+6+8+\ldots\ldots\ldots}_{20 \text{ sumandos}}=20(21)$$

$\therefore\ S=420$

Ejemplo 2

Dino camina entre dos puntos A y B de la siguiente manera. Avanza 3m y retrocede 1m; luego avanza 5m, 7m, 9m y así sucesivamente, retrocediendo siempre 1m cada vez que avanza. Si la última vez que caminó hacia adelante avanzó 41m y ya no retrocedió, calcular AB.

Resolución:

Según el enunciado:

	1°	2°	3°	4°		19°	20°	
Avances:	3	5	7	9	....	39	41	← último avance
− Retrocesos:	1	1	1	1		1	0	→ ya no retrocede
Avance real:	2	4	6	8		38	41	

Luego; la distancia AB vendría dada por:

$$S=\underbrace{2+4+6+8+\ldots+38}_{19 \text{ sumandos}}+41$$

$S=19(20)+41$

$\Rightarrow\ S=421$

$\therefore\ AB=421m$

Suma de los "n" Primeros Impares Naturales

$$\sum_{K=1}^{n}(2K-1)=\underbrace{1+3+5+7+\ldots\ldots+(2n-1)}_{\text{"n" sumandos}}=n^2$$

Ejemplo 1

Hallar el valor de "A".

$$A=\sqrt{1+3+5+7+\ldots\ldots+79}$$

Resolución:

Calculamos la cantidad de sumandos:

como $t_n=2n-1 \rightarrow 2n-1=79 \Rightarrow n=40$

la serie bajo el signo radical tiene 40 sumandos, así:

$$\underbrace{1+3+5+7+\ldots\ldots+79}_{40 \text{ Sumandos}}=(40)^2$$

Entonces:

$$A=\sqrt{1+3+5+\ldots\ldots+79}$$

$$A=\sqrt{40^2}$$

$\therefore\ A=40$

Ejemplo 2

Hallar la suma de los 25 primeros términos, de la sucesión determinada por la diferencia de los respectivos términos de las sucesiones definidas por:

$$t_n = 2n^2 - n \text{ y } t_n = 2n^2 - 3n + 1$$

Nota: Los términos de la nueva sucesión pertenecen a $\mathbb{Z}^+$

Resolución:

Para n:	→	1	2	3	4	25
$t = 2n^2 - n$	→	1	6	15	28	1225
$t = 2n^2 - 3n + 1$	→	0	3	10	21	1176
diferencia:	→	1	3	5	7	49

(⊖)

Luego:

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 49}_{25 \text{ Sumandos}} = (25)^2$$

$\therefore \quad S = 625$

Suma de los "n" Primeros Números Cuadrados Perfectos

$$\sum_{k=1}^{n} K^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{\text{"n" sumandos}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo 1

En el siguiente arreglo triangular, hallar la suma de las 20 primeras filas.

$F_1 \rightarrow 1$
$F_2 \rightarrow 2 \ 2$
$F_3 \rightarrow 3 \ 3 \ 3$
$F_4 \rightarrow 4 \ 4 \ 4 \ 4$
. . . .
. . . .
. . . .

Resolución:

Sumando los números que conforman cada fila tendremos:

$$S = \underbrace{\overset{F_1}{1^2} + \overset{F_2}{2^2} + \overset{F_3}{3^2} + \overset{F_4}{4^2} + \dots + \overset{F_{20}}{20^2}}_{20 \text{ Sumandos}} = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$$

Luego: S = 2870

Suma de los "n" primeros números cubos perfectos

$$\sum_{K=1}^{n} K^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

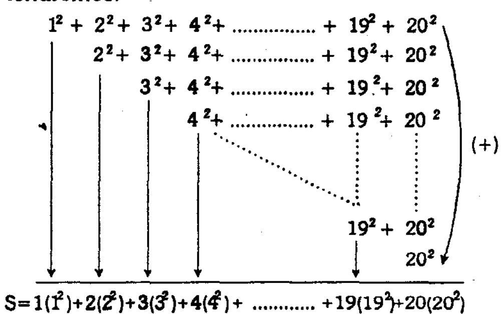
Ejemplo 1

Hallar el resultado de sumar:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \dots + 20^2$
$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 20^2$
$3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 20^2$
$4^2 + 5^2 + \dots + 20^2$
⋮
$19^2 + 20^2$
20^2

Resolución:

Ordenando adecuadamente y sumando tendremos:



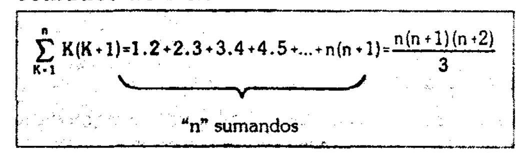
$S = 1(1^2) + 2(2^2) + 3(3^2) + 4(4^2) + \dots + 19(19^2) + 20(20^2)$

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 20^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = (210)^2$$

$\therefore S = 44100$

Suma de los "n" Primeros Productos Consecutivos

Tomados de 2 en 2



$$\sum_{K=1}^{n} K(K+1)=\underbrace{1.2+2.3+3.4+4.5+...+n(n+1)}_{\text{"n" sumandos}}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Ejemplo:
Calcular:

$$S = 2+6+12+20+.......+110$$

Resolución:
Podemos escribir la serie así:

$$S = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + 4\times5 + ... + 10\times11$$

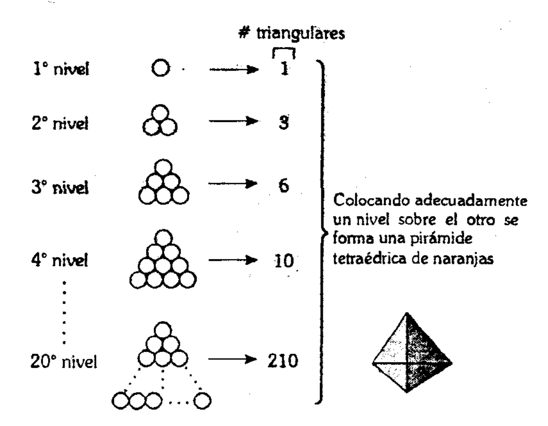
Aplicando ahora la expresión dada tendremos:

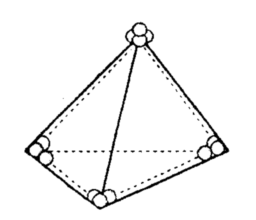
$$S = \frac{10\times11\times12}{3}$$

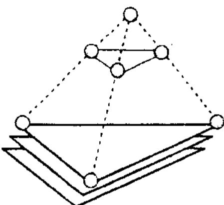
$\therefore$ $S = 440$

Ejemplo 2
Un frutero está apilando naranjas con la intención de formar dos pirámides tetraédricas iguales. Si desea que cada pirámide tenga 20 niveles, ¿cuántas naranjas debe tener como mínimo?

Resolución:







Como deseamos determinar la mínima cantidad de naranjas, dichas naranjas formarán exactamente a las dos pirámides.

Como son 2 pirámides tendremos:

$$2(1+3+6+...+210)$$

luego: $S = 2+6+12+........+420$

$$S = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + ...+20\times21$$

$$S = \frac{20(21)(22)}{3}$$

$\therefore$ $S = 3080$

Tomados de 3 en 3

$$S=\underbrace{1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+...+n(n+1)(n+2)}_{\text{n sumandos}}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Ejemplo:
Calcular $S = 6 + 24 + 60 + ... + 1320$

Resolución:
Dando forma ordenada tendremos:

$$S=1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+...+10\times11\times12$$

$$S= \frac{10\times11\times12\times13}{4}$$

$\therefore$ $S = 4290$

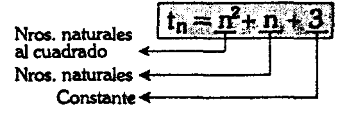
Suma de Términos de una Serie Conociendo su Término Enésimo

Ejemplo 1

Calcular la suma de los n primeros términos de la sucesión: 5, 9, 15, 23, ...

Resolución:

Calculando el t_n:



$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n}$$

La expresión anterior se obtiene al calcular la sumatoria de los términos de la sucesión de la siguiente manera:

Como $t_n = n^2 + n + 3$ utilizamos la notación $\sum$ de sumatoria visto al inicio del capítulo y planteamos:

$$\sum_{k=1}^{n} t_K = \sum_{k=1}^{n} (K^2 + K + 3)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} K^2 + \sum_{k=1}^{n} K + \sum_{k=1}^{n} 3$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

Para n=20; por ejemplo; tendríamos:

$$\sum_{k=1}^{20} t_K = \sum_{k=1}^{20} (K^2 + K + 3) = \frac{20(21)(41)}{6} + \frac{20(21)}{2} + 3(20) =$$

$$= 2870 + 210 + 60 = 3140$$

Ejemplo 2

Calcular la suma de los 30 primeros términos de la sucesión cuyo término enésimo es:

$t_n = 5n^3 + 3n^2 + 8$

Resolución:

Aplicando sumatorias:

$$\sum_{n=1}^{30} t_n = \sum_{n=1}^{30} (5n^3 + 3n^2 + 8) = 5\left[\sum_{n=1}^{30} n^3\right] + 3\left[\sum_{n=1}^{30} n^2\right] + \sum_{n=1}^{30} 8$$

$$= 5\left[\frac{30(31)}{2}\right]^2 + 3\left[\frac{30(31)(61)}{6}\right] + 30(8)$$

$$= 5(465)^2 + 3(9455) + 240 = 1109730$$

Ejemplo 3

Calcular la suma de los "k" primeros términos de una sucesión cuyo término enésimo es:

$$t_n = 8n^2 + 5n - 3$$

Resolución:

Utilizando la notación de sumatoria sobre el término enésimo tendremos:

$$\sum_{n=1}^{k} t_n = \sum_{n=1}^{k} (8n^2 + 5n - 3) = 8 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n$$

Ejemplo 4

Calcular la suma de los veinte primeros términos de: S = 4+11+22+37+56+. . .

Resolución:

La sucesión asociada es 4, 11, 22, 37, 56, . . . cuyo término enésimo viene dado por:

$t_n = 2n^2 + n + 1$

luego:

$$\sum_{n=1}^{20} (2n^2 + n + 1) = 2\sum_{n=1}^{20} n^2 + \sum_{n=1}^{20} n + \sum_{n=1}^{20} 1 =$$

$$= 2\left(\frac{20(21)(41)}{6}\right) + \frac{20(21)}{2} + 20(1) = 5970$$

Cálculo de la Suma de una Serie Asociada a una Sucesión Polinomial de orden n Utilizando Números Combinatorios

Analizaremosu la sucesión polinomial de orden 4.

Dada la sucesión polinomial: $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n$ efectuamos:

1° 2° 3° 4° 5° 6° .... n°

$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \ldots\ldots, t_n$

$r_1 \; r_2 \; r_3 \; r_4 \; r_5$

$P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4$

$v_1 \; v_2 \; v_3$

$z \; z$ ⟵ cte.

Entonces la suma de sus términos:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\ldots + t_n$$

Se obtiene a partir de:

$$\boxed{S_n = t_1 C_1^n + r_1 C_2^n + p_1 C_3^n + v_1 C_4^n + z C_5^n}$$

Observación:

Para muchos, hasta esta parte, les debe ser desconocido la notación C_k^n, la cual recién la veremos en el capítulo XX.

Pero como es necesario para el desarrollo de esta parte, le daremos un enfoque práctico, además mencionaremos algunas propiedades, que serán demostradas en su capítulo respectivo.

- $C_{③}^{⑩} = \dfrac{⑩ \times 9 \times 8}{③ \times 2 \times 1} = 120$
- $C_4^{30} = \dfrac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
- $C_{95}^{100} = C_5^{100} = \dfrac{100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$ (95 (+) 5 = 100)
- $C_0^n = 1 ; C_1^n = n ; C_n^n = 1$

Ejemplo 1

Hallar el valor de la serie en:

$$S = \underbrace{4 + 5 + 8 + 18 + 43 + 94 + 185 + \ldots}_{20 \text{ términos}}$$

Resolución:

Aplicando números combinatorios:

1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	.....
④	5	8	18	43	94	185	.....
①	3	10	25	51	91		
②	7	15	26	40			
⑤	8	11	14				
③	3	3					

$$\Rightarrow \therefore \quad S_n = 4C_1^n + 1C_2^n + 2C_3^n + 5C_4^n + 3C_5^n$$

Luego:

para n=20 tendremos:

$$S_{20} = 4C_1^{20} + 1C_2^{20} + 2C_3^{20} + 5C_4^{20} + 3C_5^{20}$$

$$S_{20} = 4(20) + 1\left[\frac{20(19)}{2}\right] + 2\left[\frac{20(19)(18)}{1 \times 2 \times 3}\right] + 5\left[\frac{20(19)(18)(17)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\right] + 3\left[\frac{20(19)(18)(17)(16)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}\right]$$

Efectuando y reduciendo:

$$S_{20} = 80 + 190 + 2(1140) + 5(4845) + 3(15504)$$

$$\therefore S_{20} = 73287$$

SERIES NOTABLES

- **Suma de números enteros consecutivos**

$$p + (p+1) + (p+2) + \ldots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

- **Suma de los cuadrados de los "n" primeros números pares naturales**

$$\sum_{k=1}^{n}(2K)^2=2^2+4^2+6^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{(2n)(2n+1)(2n+2)}{6}$$

- **Suma de los cuadrados de los "n" primeros números impares naturales**

$$\sum_{k=1}^{n}(2K-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n}{3}(4n^2-1)=\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

- **Suma de los cubos de los "n" primeros números pares naturales**

$$2^3+4^3+6^3+8^3+\ldots\ldots+(2n)^3=2[n(n+1)]^2$$

- **Suma de los cubos de los "n" primeros números impares naturales**

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

- **Suma de los "n" primeros números naturales a la cuarta potencia**

$$1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

- **Suma de potencias**

$$K^1+K^2+K^3+K^4+\ldots+K^n=\frac{K^{n+1}-K}{K-1}=\frac{K(K^n-1)}{K-1}$$

- **Suma de las inversas de los productos de números consecutivos:**

De 2 en 2:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

De 3 en 3:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

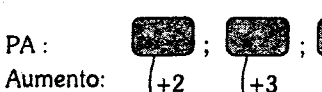
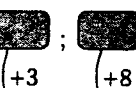
Se tiene 3 números en PA y al aumentarlos en 2, 3, 8 respectivamente, se obtienen números proporcionales a 10, 25 y 50. Determinar la suma de los 10 primeros términos de dicha progresión aritmética.

Resolución:

Consideremos la PA como sigue:

PA :

Aumento:

Se obtiene: 10 K ; 25K ; 50K

Entonces, la PA original es:

$$10K-2\ ;\ 25K-3\ ;\ 50K-8$$

Como: $$t_{central}=\frac{(1^{\circ}\text{ término})+\left(\begin{matrix}\text{último}\\\text{término}\end{matrix}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow t_c=25K-3=\frac{(10K-2)+(50K-8)}{2}$$

Resolviendo: $10K=4$

Reemplazando en la P.A. tendremos:

$$\underbrace{2\ ;\ 7}_{+5}\ ;\ \underbrace{\ 12}_{+5}\ ;\ \underbrace{\ldots}_{+5}$$

Nos piden: $S=\underbrace{2+7+12+\ldots}_{10\text{ sumandos}}$

Calculando el último término:

$$t_n=5n-3\Rightarrow t_{10}=47$$

Entonces:

$$S=\frac{(2+47)10}{2}$$

$$\therefore S=245$$

PROBLEMA 2

Un comerciante compra el día de hoy 21 cajas de tomates y ordena que cada día que transcurra se compre una caja más que el día anterior. ¿Cuántas cajas compró en total, si el penúltimo día, se compraron 39 cajas?

Resolución:

N° día:	1°	2°	3°		(n–1)°	n°
N° cajas:	21 ;	22 ;	23 ;	. . . . ;	39 ;	40

$$S=\underbrace{21+22+23+\ldots+39+40}_{40-21+1=20\text{ sumandos}}$$

$$S=\left(\frac{21+40}{2}\right)20$$

$$\therefore S=610$$

PROBLEMA 3

A las nueve de la noche terminó una de las sesiones del sindicato en huelga y en el tiempo que duró la sesión dio el reloj 48 campanadas. ¿A qué hora empezó la reunión si el reloj indica la hora con igual número de campanadas y las medias horas con una campanada?

Resolución:

					Hora de Inicio
Hora:	9:00	8:30	8:00	7:30 . . .	(10–n):00
N° camp:	9	1	8	1 . . .	(10–n).

Luego:

Total de campanadas:

$$\underbrace{9+8+7+\ldots+(10-n)}_{n\text{ sumandos}}+\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{n-1\text{ sumandos}}=48$$

$$N^{\circ}\text{ camp.}=\left[\frac{9+(10-n)}{2}\right]n+(n-1)=48$$

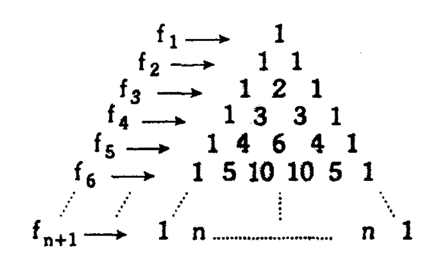
$(19-n)n + 2n = (49)2$

Resolviendo $n = 7$

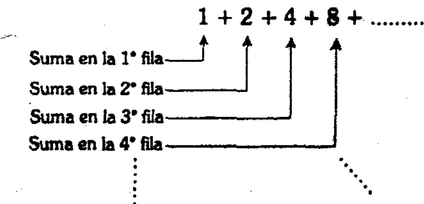
Luego: Hora de inicio: $10 - 7 = 3$ pm.

PROBLEMA 4

Calcular la suma de todos los términos de:



Resolución:



Luego la suma de términos es:

$$S = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n}_{\text{"n+1" sumandos}}$$

entonces: $S = 2^0\left[\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}\right] = 2^{n+1} - 1$

Otra forma:

Por inducción sobre el número de filas:

Suma:

1	$1 = 2^1 - 1$ → 1° fila
1 1①	$3 = 2^2 - 1$ → 2° fila
1 1 1 1②1	$7 = 2^3 - 1$ → 3° fila
1 1 1 1 2 1 1③3 1	$15 = 2^4 - 1$ → 4° fila
1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1④6 4 1	$31 = 2^5 - 1$ → 5° fila
⋮	⋮
1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1ⓝ...... n 1	$2^{n+1} - 1$ → (n+1)° fila

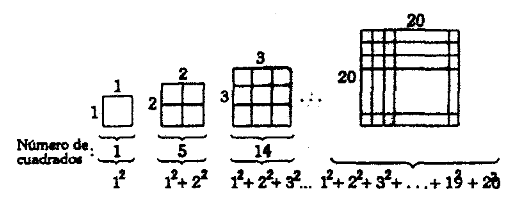
$\therefore \quad S = 2^{n+1} - 1$

PROBLEMA 5

¿Cuántos cuadrados hay en una superficie cuadriculada de 20 cuadraditos por lado?

Resolución:

Por inducción sobre el número de cuadraditos



Luego:

$$\# \text{ cuadrados} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+20^2 = \frac{20(21)(41)}{6}$$

$$= 2870$$

PROBLEMA 6

Un campeonato va a durar 39 días. Si cada día se jugaran 4 partidos, ¿cuántos equipos participan sabiendo que se jugaran 2 ruedas? (Todos contra todos).

Resolución:

Por inducción sobre el número de equipos.

N° total de partidos: 39(4) = 156

N° de equipos	N° partidos (en una rueda)
2:	1
3:	3 = 1 + 2
4:	6 = 1 + 2 + 3
⋮	⋮
n	1 + 2 + 3 + . . . + (n−1)

Luego:

N° partidos: 156 = 2(1+2+3+............+(n−1))   (por ser 2 ruedas)

$$\therefore\ 156 = 2\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)$$

Así: n = 13

PROBLEMA 7

La suma de los 20 términos de una PA creciente es 650. Si el producto de los términos extremos es 244, hallar la razón.

Resolución:

Dato: $t_1 + t_2 + \dots + t_{20} = 650$

Es decir:

$$\left(\frac{t_1+t_{20}}{2}\right)20 = 650 \Rightarrow t_1 + t_{20} = 65 \quad \dots\dots (1)$$

además: $t_1 \times t_{20} = 244$ . . . . (2)

Resolviendo (1) y (2):

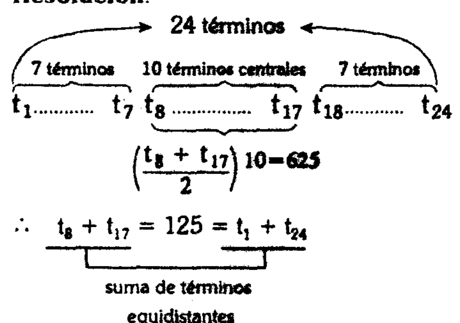
$$\left.\begin{matrix} t_1 = 4 \\ t_{20} = 61 \end{matrix}\right\} \text{como } t_{20} = t_1 + 19r \Rightarrow 61 = 4 + 19r$$

$\therefore\ r = 3$

PROBLEMA 8

La suma de los 10 términos centrales de una P.A. creciente de 24 términos es 625 y el producto de los extremos es 600. ¿Qué lugar ocupa aquel término cuyo valor es igual a 5 veces la razón?

Resolución:



Luego: $t_1 + t_{24} = 125$
además: $t_1 \times t_{24} = 600$ } Resolviendo $t_1 = 5$, $t_{24} = 120$

$\Rightarrow\ t_{24} = t_1 + 23r$

$120 = 5 + 23r$

$r = 5$

En base a esto:

la PA es: 5 ; 10 ; 15; 20 ; 25 ; . . . ;120

Podemos apreciar que 25 es el término de la PA que es igual a 5 veces la razón y ocupa el quinto lugar.

PROBLEMA 9

Hallar la suma de los 78 términos de la siguiente serie aritmética:

$\overline{1ba} + \overline{1ab} + \dots + \overline{ab1}$

Resolución:

$$S = \underbrace{\overline{1ba} + \overline{1ab} + \dots + \overline{ab1}}_{78 \text{ términos}}$$

Buscamos la razón: $r = \overline{1ab} - \overline{1ba}$

también: $t_{78} = t_1 + 77r$

Reemplazando:

$\overline{ab1} = \overline{1ba} + 77r$

luego:

$\overline{ab1} = \overline{1ba} + 77(\overline{1ab} - \overline{1ba})$

$100a + 10b + 1 = 100 + 10b + a + 77(9a-9b)$

Simplificando:

$99a-99 = 77(9)(a-b)$

$7b = 6a+1$

$b = 1 \quad a = 1$ (se descarta: $a \neq b$)

$b = 7 \quad a = 8$

$\therefore \quad S = \underbrace{178 + 187 + \ldots\ldots + 871}_{78 \text{ términos}}$

$\Rightarrow S = \left(\dfrac{178+871}{2}\right)78 \Rightarrow S = 40911$

PROBLEMA 10

En una PA la suma de todos los términos en función del número de términos es:

$$S_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2}$$

Halle el término 400

Resolución:

$n=1 \Rightarrow S_1 = \dfrac{3(1)^2+13(1)}{2} = 8 = t_1$

$n=2 \Rightarrow S_2 = \dfrac{3(2)^2+13(2)}{2} = 19 = t_1 + t_2$

$\} \; t_2 = 11$

luego, la PA será: $\overset{t_1}{8}; \overset{t_2}{11}; \overset{t_3}{14}; \ldots$ (razón 3) $\Rightarrow t_n = 3n + 5$

$t_{400} = 3(400) + 5 = 1205$

PROBLEMA 11

La siguiente sucesión es aritmética y creciente.

$\overline{aaa}, \overline{ab4}, \overline{ac1}, \ldots$

Hallar S:

$S = \underbrace{a + b + c + 10 + \ldots\ldots}_{(2c-b) \text{ términos}}$

Resolución:

Dato: la PA es creciente y como la razón es constante entonces:

$\overline{aaa}; \overline{ab4}; \overline{ac1}; \ldots$ (razones: ...7, ...7, ...7)

Luego la razón es 7 o un número que termina en 7 (esto se deduce pues el tercer término termina en cifra 1 y como el segundo término termina en cifra 4 a este hay que sumarle 7 o un número terminado en cifra 7 para que resulte un número que termine en cifra 1).

Ahora; como r = ...7 entonces el valor de "a" deberá ser necesariamente 7 para que al sumarse con la razón nos dé el segundo término que acaba en cifra 4.

$\therefore \quad a = 7$

Luego:

PA : 777 ; $\overline{7b4}$; $\overline{7c1}$

$\Rightarrow$ PA : 777; 784; 791

La razón deberá ser obligatoriamente 7 pues si r=17 el tercer término sería mayor que 800 y no $\overline{7c1}$. El caso empeora si r>17.

$\therefore$ r=7 y de aquí b=8 $\wedge$ c=9

Nos piden: $S = \underbrace{7 + 8 + 9 + 10 + \ldots}_{(2(9)-8) = 10 \text{ términos}}$

$\Rightarrow S = \left(7 + \dfrac{9(1)}{2}\right)10 \quad \therefore S = 115$

PROBLEMA 12

Calcular el valor de "n" si se cumple que:

$$\frac{1+3+5+7+\ldots(\text{n términos})}{4+7+10+13+\ldots(\text{n términos})} = \frac{40}{7n}$$

Resolución:

Calculando el valor de la serie del numerador y del denominador tendremos:

$$\frac{n^2}{\left[4+\frac{(n-1)3}{2}\right]n}=\frac{40}{7n}$$

Reduciendo: $\dfrac{2n^2}{5+3n}=\dfrac{40}{7}$

$7n^2-60n-100=0$

7n   +10
n   -10

$n=-10/7$ ⇒ se descarta pues la cantidad
$n=10$ de términos es un número
$\therefore\ n=10$ entero positivo

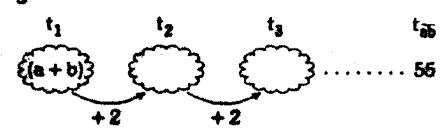
PROBLEMA 13

El primer término de una PA creciente de razón par menor que 4 es igual a "a+b" y el $\overline{ab}$-ésimo término es 55. Hallar la suma de los $\overline{ba}$ primeros términos.

Resolución:

Como la razón es par y menor que 4 dicha razón debe de ser 2, pues si fuera "0" no sería PA creciente.

Luego:



Aplicando: $t_1+r(n-1)=t_n$

$a+b+2(\overline{ab}-1)=55$

$21a+3b=57$

$7a+b=19$

↓ ↓

2 5

Resolvemos la ecuación diofántica para valores enteros y positivos

$\therefore\ a=2 \wedge b=5 \rightarrow \overline{ab}=25$

$t_1\ \ t_2\ \ t_3\ \ t_4\ \ ......t_{25}$

La PA sería: 7, 9, 11, 13, ...55

Nos piden:

$S=7+9+11+13+\ldots$ (52 términos)

$$S=\left(7+\frac{51(2)}{2}\right)52$$

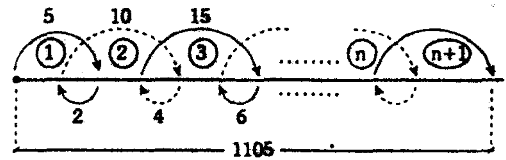
$\therefore\ S=3016$

PROBLEMA 14

Angélica camina cinco pasos hacia adelante y dos hacia atrás, luego da 10 hacia adelante y cuatro hacia atrás; y así sucesivamente en PA ¿Cuántos pasos habrá dado en total hasta el momento en que por primera vez se encuentra a 1105 pasos del punto de partida?

Resolución:

De acuerdo al enunciado del problema planteamos el siguiente esquema:



Para que este por primera vez, en el último avance no debe haber retroceso.

Entonces:

Adelante:	5	10	15	...	5n	(5n + 5)
Atrás:	2	4	6	...	2n	↓
Avance real:	3	6	9	...	3n	5n + 5

(–)

Nos piden:

total de pasos = # de pasos de avances + # de pasos de retroceso

$=7+14+21+\ldots+7n+(5n+5)$ .... (1)

Por dato:

$3+6+9+\ldots+3n+(5n+5)=1105$

Entonces: $\dfrac{3n(n+1)}{2}+5n=1100$

Resolviendo: n=25

Reemplazando en (1)

total de pasos = $7(1+2+3+...+25)+5(25)+5$

$$= 7\left(\frac{25(26)}{2}\right)+130$$

$$= 2405$$

∴ En total dio 2405 pasos

PROBLEMA 15

En la siguiente igualdad, ambas series tienen el número de términos dependientes de "n".

$$\underbrace{1+3+5+7+...+x}_{\text{"n" términos}} = \underbrace{40+38+36+...+y}_{\text{(n-4) términos}}$$

Hallar $x + y$

Resolución:

Como x es un número impar será:

$x = 2n-1$ (término enésimo de los números impares)

En el 2do. miembro de la igualdad tenemos:

PA : 40; 38; 36 ; . . .

$\Rightarrow t_n = 42-2n$

En el término enésimo calculamos para n–4 y simplificando obtenemos:

$\therefore t_{n-4} = 50-2n$

luego:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2n-1 \\ y &= 50-2n \end{aligned}\right\} x+y = 49$$

∴ $x+y=49$

PROBLEMA 16

Un tren salió de su paradero inicial con 7 pasajeros y en cada estación suben dos pasajeros más de los que subieron en la estación anterior. Si al llegar a su paradero final se contaron 616 pasajeros, ¿en cuántas estaciones se detuvo a recoger pasajeros?

Resolución:

Inicio:	1°	2°	3°	....	n°	Final
7	9	11	13	....	◌	616

Total de pasajeros: $7+\underbrace{9+11+13+...+◌}_{\text{"n" términos}}=616$

Luego: $\left(9+\frac{(n-1)2}{2}\right)n = 609$

Resolviendo:

∴ n = 21

PROBLEMA 17

Un obrero ha ahorrado este mes 178 soles y tiene con esto S/. 1410 en la caja de ahorros, habiendo economizado cada mes S/. 12 más que el mes anterior. ¿Cuánto ahorró el primer mes?

Resolución:

1°	2°	3°	...	n°
Mes	Mes	Mes	...	1° mes
actual	pasado	antepasado	...	de ahorro

$$\underbrace{178 + 166 + 154 +...+ 190-12n}_{\text{"n" sumandos}} = 1410$$

$$\left[178+\frac{(n-1)(-12)}{2}\right]n = 1410$$

Resolviendo: n = 15

∴ El 1° mes ahorró: 190–12(15) = 10

PROBLEMA 18

La "reyna" y el "rey" de un reino salen a pasear por los bosques de sus dominios; mientras la "reyna" da 20 pasos en forma constante por cada minuto, el "rey" avanza 1 paso en el primer minuto, 2 pasos en el segundo minuto, 3 pasos en el tercer minuto, y así sucesivamente.

Si al final ambos han dado la misma cantidad de pasos, ¿cuántos pasos han dado en total cada uno?

*(**Obs:** Los pasos del rey de la reyna son de igual longitud)*

Resolución:

	1°	2°	3°	.....	n	**Suma**
Reyna :	20 +	20 +	20 +	..... +	20 =	20n
Rey :	1 +	2 +	3 +	..... +	n =	$\frac{n(n+1)}{2}$

Como han dado la misma cantidad de pasos:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 20n \Rightarrow n = 39$$

Número de pasos: 20(39) = 780

∴ Cada uno ha dado 780 pasos.

PROBLEMA 19

Hallar la suma de la serie siguiente:

$$S = 1+2+7+7+13+12 + \ldots + 42$$

Resolución:

La sucesión asociada es:

$$1 ; 2 ; 7 ; 7 ; 13 ; 12 ; \ldots ; 42$$

Puede apreciarse claramente que hay dos subsucesiones:

S_1 : 1; 7 ; 13 ; . . . $t_n = 6n - 5$

S_2 : 2; 7 ; 12 ; . . . $t_n = 5n - 3$

El último término de la sucesión es 42 y debe de pertenecer a S_2 pues S_1 está formado sólo por números impares. Este hecho nos permite deducir que ambas subsucesiones tienen igual cantidad de términos pues al formar parejas empezamos con un término de S_1 y lo acompaña un término de S_2. La última pareja está integrada por un término de S_1, y por el número 42 que pertenece a S_2.

Luego:

$S_2 = 2, 7, 12, \ldots\ldots, 42$

y como $t_n = 5n - 3$ planteamos:

$42 = 5n - 3$

Resolviendo: n = 9

De lo cual se concluye que: S_2 tiene 9 términos:

∴ S_1 también tiene 9 términos → t_9 de S_1 es:

$t_9 = 6(9) - 5 = 49$

Entonces la serie se puede escribir así:

$$S = \underbrace{\overbrace{1+7+13+19+\ldots+49}^{S_1}}_{9 \text{ sumandos}} + \underbrace{\overbrace{2+7+12+17+\ldots+42}^{S_2}}_{9 \text{ sumandos}}$$

Calculando el valor de cada serie tendremos:

$$S = \left(\frac{1+49}{2}\right)9 + \left(\frac{2+42}{2}\right)9$$

$S = 225 + 198$

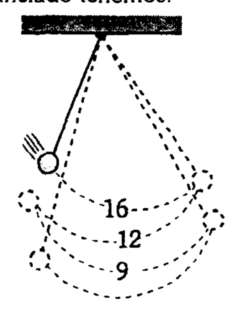
$\therefore S = 423$

PROBLEMA 20

La masa de un péndulo recorre 16 cm durante la primera oscilación. En cada una de las oscilaciones siguientes la masa recorre 3/4 de lo recorrido en la oscilación anterior. Calcular el espacio total recorrido por la masa hasta el momento de detenerse.

Resolución:

Según el enunciado tenemos:



Luego:

El recorrido total es: $16 + 12 + 9 + \frac{27}{4} + \ldots$

Como es una serie geométrica decreciente ilimitada empleamos:

$$\boxed{S = \frac{t_1}{1-q}}$$ donde: $q \neq 0$ y además: $0 < |q| < 1$

$$\Rightarrow S = \frac{16}{1-\frac{3}{4}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64 \text{ cm}$$

PROBLEMA 21

Calcular el valor de E en:

$$E = 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + \underbrace{1000\ldots01}_{100 \text{ cifras}}$$

Resolución:

Rescribiendo convenientemente tendremos:

$$E = (10+1) + (100+1) + (1000+1) + \ldots + (\overbrace{100\ldots00}^{100 \text{ cifras}}+1)$$

Reagrupando y sumando las unidades nos queda:

$$E = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots 10^{99} + 99$$

Suma de todas las unidades (99)

Aplicando serie geométrica:

$$E = 10\left(\frac{10^{99}-1}{10-1}\right) + 99$$

$$\therefore E = \frac{10}{9}(10^{99}-1) + 99$$

PROBLEMA 22

Nano, un veterano judoka, recibe como recompensa 1 céntimo por el primer competidor al que venció en las olimpiadas; 2 por el segundo; 4 por el tercero; y así sucesivamente. Cuando se hizo el recuento, Nano resultó recompensado con 655 soles y 35 céntimos. ¿A cuántos competidores venció?

Resolución:

Según el enunciado recibió:

655 soles con 35 céntimos <> 65535 céntimos

N° contrincantes:	1°	2°	3°	4° ...	n°
Por cada uno recibe:	1	2	4	8 ...	⋯

Por todo recibe:

$$\underbrace{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}}_{\text{"n" sumandos}} = 65535$$

Luego:

$$1\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) = 65535$$

$$2^n = 65536 = 2^{16}$$

$$\therefore \quad n = 16$$

PROBLEMA 23

Hallar la razón de una PG decreciente ilimitada cuya suma es dos veces más que la suma de sus "k" primeros términos.

Resolución:

Suma de términos de una PG ilimitada: $\frac{t_1}{1-q}$

Suma de los "k" primeros términos de la PG limitada: $t_1\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)$

$$\frac{t_1}{1-q} = 3 \times t_1\left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)$$

Simplificando:

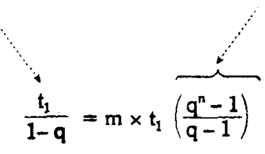
$$-1 = 3(q^k - 1)$$

$$-\frac{1}{3} = q^k - 1 \Rightarrow \frac{2}{3} = q^k \quad \therefore \quad q = \sqrt[k]{\frac{2}{3}}$$

PROBLEMA 24

La suma límite de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es "m" veces la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón de la PG.

Resolución:



$$\frac{t_1}{1-q} = m \times t_1 \left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

Reduciendo: $-1 = m(q^n-1)$

$$\frac{-1}{m} = q^n - 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} = q^n$$

$$\therefore \quad q = \sqrt[n]{\frac{m-1}{m}}$$

PROBLEMA 25

Hallar S en:

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{50\times 51}$$

Resolución:

Desdoblando cada término adecuadamente tendremos:

$$S = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right) + \left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$$

Cancelando queda: $S = 1 - \frac{1}{51} \quad \therefore \quad S = \frac{50}{51}$

PROBLEMA 26

¿Cuál es el valor de la serie?

$$S = \frac{1}{2\times 4\times 6} + \frac{1}{4\times 6\times 8} + \frac{1}{6\times 8\times 10} + \ldots + \frac{1}{40\times 42\times 44}$$

Resolución:

Factorizando convenientemente el denominador (en este caso 8)

$$S = \frac{1}{8(1\times 2\times 3)} + \frac{1}{8(2\times 3\times 4)} + \frac{1}{8(3\times 4\times 5)} + \ldots + \frac{1}{8(20\times 21\times 22)}$$

$$\Rightarrow 8S = \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \ldots + \frac{1}{20\times 21\times 22}$$

Para poder desdoblar cada fracción en la diferencia de dos fracciones (como en el problema anterior), se tiene que verificar que la diferencia de los factores extremos en cada denominador debe aparecer en el numerador.

Entonces:

$$2\times(8S) = \frac{2}{1\times 2\times 3} + \frac{2}{2\times 3\times 4} + \frac{2}{3\times 4\times 5} + \ldots + \frac{2}{20\times 21\times 22}$$

$$16S = \left(\frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{2\times 3}\right) + \left(\frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{3\times 4}\right) + \left(\frac{1}{3\times 4} - \frac{1}{4\times 5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{20\times 21}\right.$$

$$16S = \frac{1}{1\times 2} - \frac{1}{21\times 22} = \frac{460}{2\times 21\times 22}$$

$$\therefore \ S = \frac{165}{3696}$$

$$8S = \frac{20\times(23)}{4[21\times(22)]} \text{ ¿Por qué?}$$

Luego:

$$S = \frac{115}{3696}$$

PROBLEMA 27

Hallar la suma de la siguiente serie:

$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots\ldots\ldots + 20\times 21$

Resolución:

Aplicando la suma de los n primeros productos consecutivos tomados de 2 en 2 tendremos:

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + 20\times 21 = \frac{20\times 21\times 22}{3} = 3080$$

PROBLEMA 28

Hallar el valor de S:

$$S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots$$

Resolución:

Escribiremos algunos sumandos más para apreciar mejor la serie:

$$S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \ldots$$

Si agrupamos de tres en tres y reducimos tendremos:

$$S = \frac{5}{4} + \frac{5}{32} + \frac{5}{256} + \ldots$$

Apreciamos que la serie es infinita y de razón $q = 1/8$ luego:

$$S = \frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{10}{7}$$

$$\therefore S = \frac{10}{7}$$

PROBLEMA 29

Calcule:

$$S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} + \ldots$$

Resolución:

Multiplicaremos por 5 a la expresión dada, restaremos de este producto la serie original y tendremos:

$$(-)\begin{cases} 5S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} + \frac{6}{5^5} + \ldots \\ S = \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} + \ldots \end{cases}$$

$$4S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots$$

$$4S = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \quad \therefore \quad S = \frac{5}{16}$$

$$\therefore \quad S = \frac{5}{16}.$$

PROBLEMA 30

Calcule:

$$S = \underbrace{\frac{1}{2\times 3} + \frac{2}{3\times 5} + \frac{3}{5\times 8} + \frac{4}{8\times 12} + \ldots}_{\text{"20" sumandos}}$$

Resolución:

Expresaremos cada fracción como diferencia de dos fracciones; veamos:

$$S = \overbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}^{1^\circ} + \overbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}^{2^\circ} + \overbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{8}}^{3^\circ} + \overbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{12}}^{4^\circ} \ldots\ldots + \overbrace{\frac{1}{192} - \frac{1}{212}}^{20^\circ}$$

(+1, +2, +3, +4, …, +20)

$$t_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 2$$

Cancelando términos semejantes nos queda:

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{212} \quad \therefore \quad S = \frac{105}{212}$$

De seguro te preguntarás como obtuvimos la última diferencia; pues observa los números encerrados en las líneas punteadas, ellos forman una sucesión de 2do. orden. ¿Te diste cuenta?

$c = 2;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \ldots$
$b = -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$
$a = \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 1$

Cálculo del término enésimo de la sucesión de 2° orden

$$t_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2$$

para $n = 20$ se tiene $t_{20} = 192$

PROBLEMA 31

Calcular S

$$S = \frac{1}{5\times 10} + \frac{1}{10\times 15} + \frac{1}{15\times 20} + \ldots + \frac{1}{100\times 105}$$

Resolución:

Multiplicaremos la expresión por 5 (¿por qué?)

$$5S = \frac{5}{5\times 10} + \frac{5}{10\times 15} + \frac{5}{15\times 20} + \ldots + \frac{5}{100\times 105}$$

$$5S = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{105}$$

Cancelando términos semejantes nos queda:

$$5S = \frac{1}{5} - \frac{1}{105}$$

$$5S = \frac{20}{105} \quad \therefore \quad S = \frac{4}{105}$$

PROBLEMA 32

Hallar la suma de:

$$S = \frac{1}{1024} + \frac{2}{512} + \frac{3}{256} + \ldots + \frac{10}{2}$$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros por 2 y restando obtendremos:

$$S = \frac{1}{2^{10}} + \frac{2}{2^9} + \frac{3}{2^8} + \frac{4}{2^7} + \ldots + \frac{9}{2^2} + \frac{10}{2}$$

$$2S = \frac{1}{2^9} + \frac{2}{2^8} + \frac{3}{2^7} + \frac{4}{2^6} + \ldots + \frac{9}{2} + 10$$

$$S-2S = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^1} - 10$$

$$-S = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}\right) - 10$$

$$\Rightarrow S = 10 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1-2^{10}}{2^{10}}}{\frac{1-2}{2}}\right)$$

$$S = 10 - \frac{1}{2}\left(\frac{2^{10}-1}{2^9}\right) \Rightarrow S = \frac{9(2^{10})+1}{2^{10}}$$

$$\therefore S = \frac{9217}{1024}$$

PROBLEMA 33

Halle :

$$S = \frac{9}{20} + \frac{18}{80} + \frac{36}{320} + \frac{72}{1280} + \ldots \infty$$

Resolución:

Notamos que la razón de la P.G. asociada es $q = \frac{2}{4}$

además la serie geométrica es infinita, luego:

$$S = \frac{\frac{9}{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore S = \frac{9}{10}$$

PROBLEMA 34

En la siguiente serie:

$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(n+1)x^n\,;\ 0<x<1$

Calcular la suma de todos sus términos:

Resolución:

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n \quad \ldots (I)$$

$$\times x: \quad xS = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + (n+1)x^{n+1} \ldots (II)$$

Efectuamos (I) – (II):

$$S - xS = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

$$S(1-x) = 1\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right) - (n+1)x^{n+1}$$

$$\therefore S = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

PROBLEMA 35

Calcule:

$$S = \frac{1}{8} + \frac{2}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \frac{4}{8^4} + \ldots \infty$$

Resolución:

Multiplicando por 8 y restando:

$$\ominus \quad 8S = 1 + \frac{2}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{8^3} + \ldots$$

$$S = \frac{1}{8} + \frac{2}{8^2} + \frac{3}{8^3} + \ldots$$

Debajo de esta expresión escribimos de manera conveniente S:

$$8S - S = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \ldots$$

$$7S = \frac{1}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$\therefore \quad S = \frac{8}{49}$$

PROBLEMA 36

Calcular la suma límite de:

$$A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{2}{7^6} + \ldots$$

Resolución:

Agrupamos en parejas y homogenizamos sus denominadores:

$$A = \overbrace{\frac{7}{7^2} + \frac{2}{7^2}} + \overbrace{\frac{7}{7^4} + \frac{2}{7^4}} + \overbrace{\frac{7}{7^6} + \frac{2}{7^6}} + \ldots$$

$$A = \frac{9}{7^2} + \frac{9}{7^4} + \frac{9}{7^6} + \ldots$$

$$\Rightarrow A = 9\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} + \ldots\right)$$

$$A = 9\left(\frac{\frac{1}{7^2}}{1 - \frac{1}{7^2}}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{9}{48} \qquad \therefore \quad A = \frac{3}{16}$$

PROBLEMA 37

Calcular el valor de la siguiente sumatoria:

$$S = \sum_{K=1}^{n} \left(\frac{2k!}{(k-1)!}\right) \text{ para } n = 50$$

Resolución:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2 \times k!}{(k-1)!}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(k-1)!} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)! \times k}{(k-1)!} = 2\sum_{k=1}^{n} k$$

Luego:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$$

Entonces para n = 50 tendremos: 50 (51) = 2550

$$\therefore \quad S = 2550$$

PROBLEMA 38

Calcular:

$$S = \sum_{k=11}^{35} \left(3k^3 - 4k^2 - \frac{4}{5}k + 18\right)$$

Resolución:

Recordemos que: $\sum_{k=a}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{a-1} t_k$

luego:

$$S = \sum_{k=11}^{35} \left(3k^3 - 4k^2 - \frac{4}{5}k + 18\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{35} \left(3k^3 - 4k^2 - \frac{4}{5}k + 18\right) - \sum_{k=1}^{10} \left(3k^3 - 4k^2 - \frac{4}{5}k + 18\right)$$

$$= \left[3\sum_{k=1}^{35} k^3 - 4\sum_{k=1}^{35} k^2 - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{35} k + \sum_{k=1}^{35} 18\right] -$$

$$- \left[3\sum_{k=1}^{10} k^3 - 4\sum_{k=1}^{10} k^2 - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 18\right]$$

$$= 3\left[\frac{35(36)}{2}\right]^2 - 4\left[\frac{35(36)(71)}{6}\right] - \frac{4}{5}\left[\frac{35(36)}{2}\right] + 35(18) -$$

$$- \left[3\left(\frac{10(11)}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{10(11)(21)}{6}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{10(11)}{2}\right) + 10(18)\right]$$

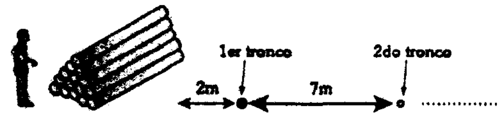
= 1190700 – 59640 – 504 + 630 – [9075 – 1540 – 44 + 180]

= 1131186 – [7671] = 1123515

$$\therefore \quad S = 1123515$$

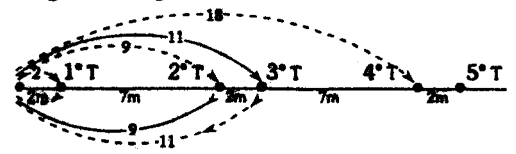
PROBLEMA 39

Un agricultor posee 10 troncos de árbol que los planta en línea recta, separados 7m y 2m alternadamente. Hallar el recorrido total a partir del instante que muestra la figura hasta que termina, si se sabe que sólo carga y planta un tronco cada vez.

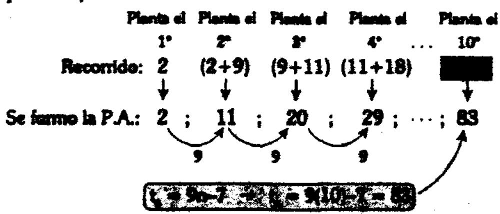


Resolución:

Hagamos un gráfico:



Su trabajo acaba cuando planta el último árbol (El texto no dice que deba regresar al punto de partida)



Recorrido total: $R=\underbrace{2+11+20+29+\ldots+83}_{10\ \text{sumandos}}$

$$\therefore\quad R=\left(\frac{2+83}{2}\right)10=425\text{ m}$$

PROBLEMA 40

Carlos, participa en el campeonato de basquet de ADUNI, anotando un punto en la 1ra. fecha, en la 2da. fecha 2 puntos más que en la anterior, en la 3ra. 5 más que en la primera fecha, 10 puntos en la 4ta. fecha y así sucesivamente.

Si en el último partido anotó 91 puntos y en las dos últimas fechas no incrementó su producción de puntos, calcular cuántos puntos anotó en todo el campeonato y cuántos puntos anotó en el partido que se jugó en la fecha que fue la mitad del campeonato.

Resolución:

N° fecha:	1°	2°	3°	4°	...	n°	(n+1)°	(n+2)°
	1	3	6	10	...	91	91	91

(no varía: (n+1)° y (n+2)°)

Los números que indican el puntaje hecho en cada fecha están formando la sucesión de números triangulares siendo los dos últimos que se repiten iguales al número que ocupa el lugar "n".

Luego el puntaje total será:

$$S=\underset{1°}{1}+\underset{2°}{3}+\underset{3°}{6}+\ldots+\underset{n°}{91}+\underset{(n+1)°}{91}+\underset{(n+2)°}{91}$$

$$S=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\ldots+\frac{13(14)}{2}+91+91$$

$$S=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+13\times14}{2}+182$$

El número de orden y el número encerrado por la circunferencia punteada coinciden, entonces: n = 13.

$$S=\frac{\frac{13(14)(15)}{3}}{2}+182$$

$$\therefore\quad S=637$$

Como n = 13 entonce el número de partidos fue: 13 + 2 = 15 (pues el último partido lleva por número de orden n+2)

Ahora; el número de orden del partido jugado en la mitad del campeonato es : $t_c=\frac{15+1}{2}=8$

Luego:

Número de puntos anotados en el 8° partido:

$$\frac{8(9)}{2}=36$$

Por lo tanto:

Puntaje total anotado: 637 puntos

Puntaje anotado en el octavo partido: 36 puntos

Problemas Propuestos

1. De un libro se arrancan 61 hojas de la parte final. Si se sabe que en la numeración de éstas (hojas arrancadas) se han usado 365 tipos. Hallar la cantidad total de hojas de dicho libro.

A) 120 B) 110 C) 210
D) 240 E) 180

2. Hallar el valor de "S" :

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \ldots \infty$$

A) 1 B) 1/2 C) 1/3
D) 1/5 E) 1/6

3. Hallar la suma de los 15 primeros términos de la serie:

$$S = 1 + 7 + 17 + 31 + \ldots$$

A) 1250 B) 940 C) 3500
D) 2360 E) 435

4. Calcular S en:

$S=5+5+20+50+95+\ldots$ (20 sumandos)

A) 15400 B) 24350 C) 17200
D) 3540 E) 44320

5. La suma de los terceros términos de dos P.A. cuyas razones se diferencian en 2 es 33. Hallar la suma de los 10 primeros términos de una nueva P.A., que se forma al sumar términos correspondientes de las dos P.A. antes mencionadas sabiendo además que la suma de los términos anteriores al primero de las primeras P.A. es –3.

A) 550 B) 620 C) 580
D) 630 E) 610

6. Cuando la suma de los 10 primeros términos de una P.A. es igual a cuatro veces la suma de los cinco primeros. ¿Cuál es la razón geométrica entre el primer término y la diferencia común?

A) 2/3 B) 1/5 C) 1/2
D) 2/7 E) 5/9

7. Calcular el valor de "S" :

$$S = 9 + 12 + 17 + 24 + \ldots + 177$$

A) 814 B) 910 C) 873
D) 913 E) 923

8. Se deben almacenar 810 postes cilíndricos en un espacio abierto, formando así el primer lecho horizontal de 50 postes y cada lecho sucesivo debe contener un poste menos que el precedente para no derrumbarse. Cuántos lechos pueden formarse?

A) 81 B) 27 C) 35
D) 44 E) 20

9. En el siguiente arreglo numérico hallar la suma de los términos de la fila veinte.

F_1 : 1
F_2 : 3 5
F_3 : 7 9 11
F_4 : 13 15 17 19
F_5 : 21 23 25 27 29

A) 7000 B) 8000 C) 1250
D) 4320 E) 3560

10. Calcular la suma de:

$S=7\times31+9\times29+11\times27+13\times25+\ldots+31\times7$

A) 3955 B) 3965 C) 3945
D) 3975 E) 3985

11. Hallar la suma de:

$$S = \underbrace{1\times 3 - 3\times 5 + 5\times 7 - 7\times 9 + \ldots}_{40 \text{ sumandos}}$$

A) 3280 B) 1570 C) 1250
D) 3500 E) –3280

12. Se tiene la siguiente sucesión:

1, 5, 15, 34, 65, 111, . . .

Hallar:

a. El término de número ordinal 20.
b. La suma de los 20 primeros términos.

A) 4010; 22155 B) 2050; 21215
C) 315; 1510
D) 7050; 180 E) 3290; 35710

13. Si:

$\overline{1ab} + \overline{2ab} + \overline{3ab} + \ldots + \overline{9ab} = \overline{4cd7}$; $a \neq b$

$\overline{n1n} + \overline{n2n} + \overline{n3n} + \ldots + \overline{n9n} = xyz4$

Calcular: c + d + a + b + x + y + z

A) 29 B) 73 C) 45
D) 38 E) 41

14. Calcular la suma de todos los términos unidos por línea demarcada hasta la fila 20.

```
              1  ——→ f1
             1 1  ——→ f2
            1 2 1  ——→ f3
           1∠3 3 1  ——→ f4
          1 4∠6 4 1  ——→ f5
        1 5 10∠10 5 1  ——→ f6
      1 6 15 20∠15 6 1  ——→ f7
    1 7 21 35 35∠21 7 1
              ⋮
```

A) 1320 B) 3150 C) 5985
D) 4270 E) 7250

15. Calcular el valor de S:

S = 3 + 10 + 29 + 66 + . . . + 1730

A) 3215 B) 6108 C) 4320
D) 8250 E) 1308

16. Ana va al cine durante tres días alternadamente en una semana, y lo hace al mes en tres semanas consecutivas. Si el segundo día de un cierto mes es jueves y la suma de las fechas de los días que fue al cine es ese mes es 198. ¿Qué fecha y día será la séptima vez que fue al cine en dicho mes, si asiste siempre los mismos días?

A) lunes 27 B) martes 12 C) jueves 7
D) sábado 15 E) lunes 8

17. En un torneo de fútbol de dos ruedas participaron 14 equipos. Al final del mismo se observó que cada equipo tenía un punto de menos que el que le antecedía en la tabla de puntuaciones, excepto con el último que hizo cero puntos. ¿Cuántos puntos hizo el campeón, si la puntuación por partido ganado es de 2 puntos?

A) 72 B) 28 C) 34
D) 57 E) 43

18. En una canasta hay 60 duraznos. Evelyn los va colocando por fila de la siguiente manera en la primera fila pone un durazno; luego toma 2 duraznos de la canasta y les pone en la segunda fila y así sucesivamente hasta donde le sea posible. ¿Cuántos duraznos sobrarán en la canasta?

A) 5 B) 7 C) 9
D) 1 E) 3

19. Anita llega al colegio con cierto retraso diariamente. El primer día llegó 1 minuto tarde, el segundo día 2 minutos tarde, el tercer día 3 minutos tarde y así sucesivamente; al cabo de 20 días de asistencia. ¿Cuánto tiempo ha perdido por las tardanzas?

A) 2,5 h B) 8 h C) 5 h
D) 1 h E) 3,5 h

20. La suma de los " n" primeros términos de una serie geométrica en donde los términos son números enteros es 31. Luego de calcular el primer término y " n" dar el número de soluciones.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

21. La suma de 81 números pares consecutivos es igual a 171 veces el primer número. Hallar la suma de las cifras del término central.

A) 5 B) 4 C) 9
D) 7 E) 8

22. Halle "S"

$$S = \frac{9}{20} + \frac{18}{80} + \frac{36}{320} + \frac{72}{1280} + \ldots\ldots\infty$$

A) 1/19 B) 5/19 C) 3/19
D) 7/19 E) 9/19

23. Halle el valor de "x":

$S = 69+67+65+63+ \ldots + x=1000$

A) –29 B) 39 C) 47
D) 29 E) –19

24. Si: $A = 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots\ldots$
$B = 2 + 4 + 7 + 11 + \ldots\ldots$
$C = 3 + 6 + 12 + 24 + \ldots\ldots$

cada serie posee 10 sumandos.
Halle A + B + C

A) 1250 B) 2578 C) 3474
D) 4512 E) 5218

25. Encontrar un número de 3 cifras divisible por 11 y tal que permutando la cifra de las decenas con la de unidades se obtiene un número cuyas tres cifras están en progresión aritmética. Indicar la suma de las cifras de dicho número.

A) 6; 12; 18 B) 3; 14; 15 C) 7; 11; 15
D) 9; 13; 17 E) 7; 12; 17

26. Halle:

$$S = \underbrace{3+33+333+3333+ \ldots + 333\ldots3}_{\text{"n" sumandos}}$$

A) $\frac{10^n-1}{9}$ B) $\frac{10^{n+1}-9n}{27}$

C) $\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

D) $\frac{10^n-9n}{27}$ E) $\frac{10^{n+1}+9n-10}{9}$

27. He repartido un total de 1900 caramelos entre los 25 sobrinos que tengo, dándole a cada uno 3 caramelos más que al anterior. ¿Cuántos caramelos les di a los 10 primeros?

A) 815 B) 420 C) 720
D) 535 E) 180

28. La suma de los cuadrados de los "n" primeros números enteros positivos, es igual a la suma de los primeros "2n" números enteros positivos. Halle "n".

A) 5 B) 4 C) 6
D) 9 E) 8

29. Se contrata a un obrero para cavar en busca de fósiles prometiéndole pagar una suma por el primer fósil que encuentre y que luego se le irá duplicando dicha suma por cada nuevo fósil encontrado.

Si encuentra 12 fósiles y recibe 12285 soles ¿cuánto le pagaron por el octavo fósil hallado que encontró?

A) 380 B) 384 C) 360
D) 400 E) 420

30. Dados:

$S_1 = 10\times11 + 11\times12 + 12\times13 + \ldots + 20\times21$

$S_2 = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \ldots + 20\times21$

Hallar: $S_2 \div S_1$

A) 28/33 B) 25/24 C) 25/27
D) 28/25 E) 28/27

31. La suma en el límite de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es "m" veces la suma de sus "n" primeros términos. Hallar la razón de la P.G.

A) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{m}}$ B) $\sqrt[n]{m-1}$ C) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{2m}}$

D) $\sqrt[n]{\dfrac{m+1}{m}}$ E) $\sqrt[n]{\dfrac{m-1}{m+1}}$

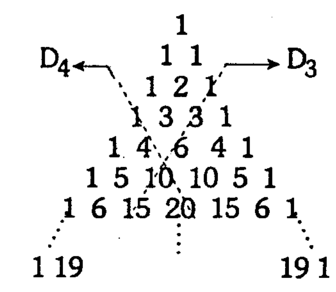
32. Augusto y Celia leen una novela de 3000 páginas. Augusto lee 100 páginas diarias y Celia lee 10 páginas el 1er. día, 20 el 2do. día, 30 el tercero y así sucesivamente. Si ambos comienzan el 22 de febrero de un año bisiesto. ¿En qué fecha coincidirán en leer la misma página por primera vez, y cuánta páginas, habrán leído hasta ese día?

A) 10 de febrero; 1800
B) 12 de febrero; 1600
C) 11 de febrero; 1600
D) 10 de febrero; 1900
E) 11 de febrero; 1900

33. Calcule "$S_1 + S_2$ siendo:

S_1 : la suma de términos de D_3

S_2 : la suma de términos de D_4



A) 5985 B) 5855 C) 5900
D) 6985 E) 5585

34. Calcule la suma de los 20 primeros términos de:

$-2 ; 0 ; 0 ; 0 ; 2 ; 8; \ldots\ldots$

A) 7730 B) 7570 C) 7700
D) 7750 E) 7755

35. Calcule:

$$S = 1 + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \frac{9}{24} + \ldots (20 \text{ sumandos})$$

A) $\frac{3\times 2^{21}-43}{3\times 2^{20}}$ B) $\frac{3\times 2^{20}-53}{3\times 2^{18}}$

C) $\frac{3\times 2^{20}-53}{3\times 2^{19}}$

D) $\frac{3\times 2^{21}-50}{3\times 2^{20}}$ E) $\frac{3\times 2^{21}-53}{3\times 2^{20}}$

36. La suma de los términos de la última fila del arreglo triangular mostrado es 9520 ¿cuántas filas tiene el arreglo?

Fila 1	4			
Fila 2	8	12		
Fila 3	12	16	20	
Fila 4	16	20	24	28
.	.	.	.	.

A) 40
B) 38
C) 35
D) 42
E) 50

37. Calcular la suma de los "n" términos de la sucesión:

0; 8; 52 ; 156; 344; 640; ......

A) n^4-n^2+2n B) n^4-3n^2+2n C) n^4+n^2+2n
D) n^4-3n^2+n E) n^4+3n^2

38. Calcule A en:

$$A = \sum_{J=1}^{10} \sum_{K=1}^{J} [n(3n-1)]$$

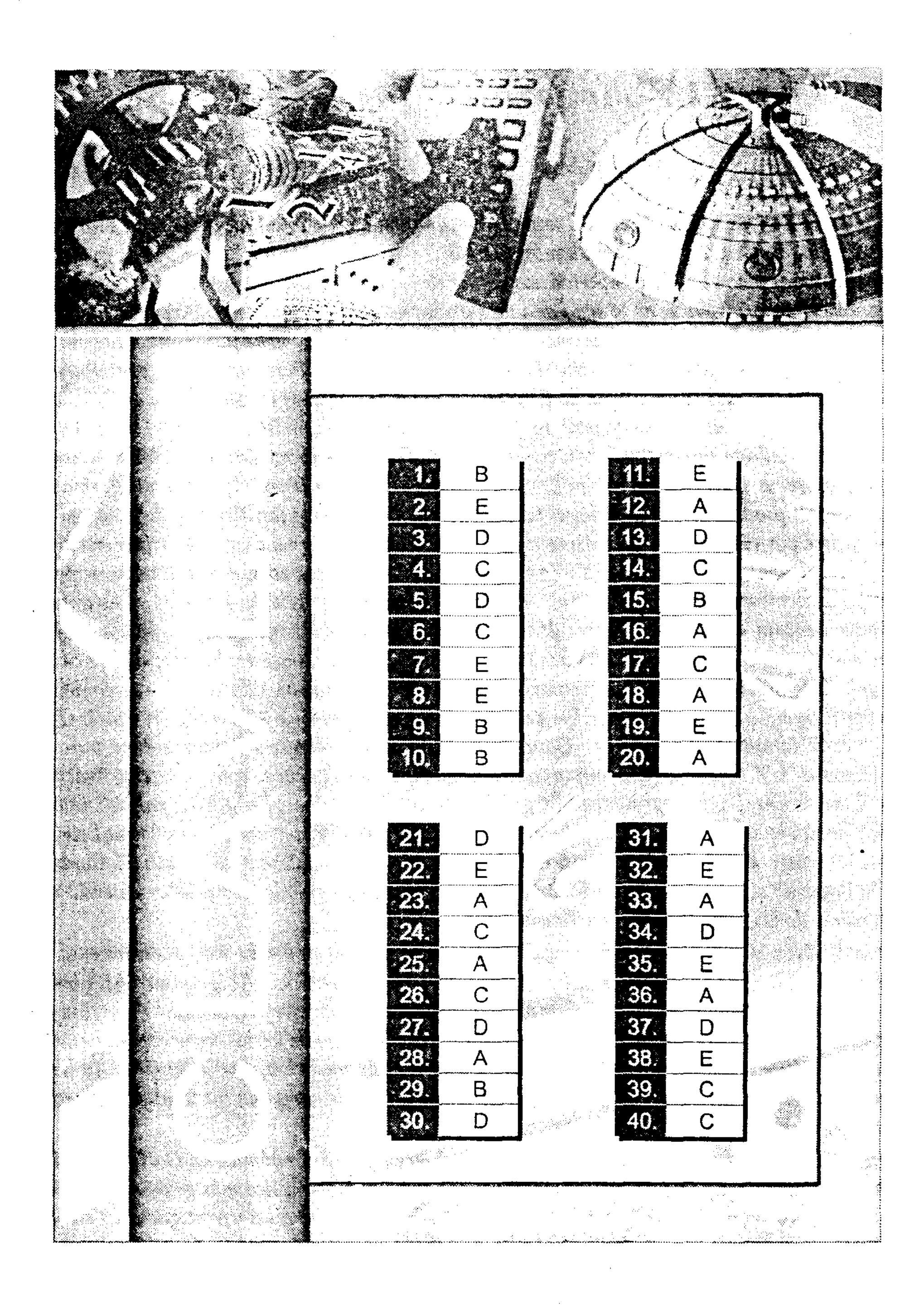
A) 3040 B) 3140 C) 3400
D) 3420 E) 3410

39. Una persona debe vaciar un balde de agua a cada uno de los 20 árboles que están sembrados en fila y separados uno del otro 8m. Si la persona en cada viaje sólo puede llevar un balde con agua y el pozo donde sacará el agua está a 10m. del primer árbol. ¿Qué distancia habrá recorrido después de haber terminado con su tarea y haber devuelto el balde al pozo?

A) 3420 B) 3500 C) 3440
D) 3400 E) 3600

40. Rebeca al ganarse el premio mayor lo reparte entre sus sobrinos de la siguiente manera: "al 1ro. S/. 100, al 2do. S/. 200, al 3ro. S/. 300, y así sucesivamente en P.A. teniendo en cuenta que cuando ya no se pueda continuar con los que siguen, se continuará repartiendo de la manera descrita anteriormente y así sucesivamente, hasta agotar todo el premio cuyo valor asciende a S/. 22900. ¿Cuántos sobrinos se beneficiaron?

A) 24 B) 26 C) 28
D) 27 E) 30



1.	B	11.	E
2.	E	12.	A
3.	D	13.	D
4.	C	14.	C
5.	D	15.	B
6.	C	16.	A
7.	E	17.	C
8.	E	18.	A
9.	B	19.	E
10.	B	20.	A

21.	D	31.	A
22.	E	32.	E
23.	A	33.	A
24.	C	34.	D
25.	A	35.	E
26.	C	36.	A
27.	D	37.	D
28.	A	38.	E
29.	B	39.	C
30.	D	40.	C

Carl Friedrich Gauss

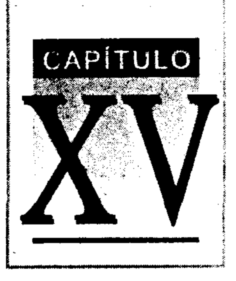
En el siglo XIX, en el que distintas ramas de la matemática habían alcanzado un alto nivel de desarrollo, destaca la figura del alemán Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855), a quien puede considerarse como el último matemático capaz de abarcar todas las ramas de esta ciencia.

Nació en Brunswick, en el seno de una familia humilde y sería conocido como "príncipe de las matemáticas". Pudo realizar sus primeros estudios gracias al apoyo de la familia materna frente a la intransigencia del padre, que se negaba a dejarlo estudiar. Pero quien más contribuyó a la educación del joven Gauss fue el duque de Brunswick quien le pagó los estudios en la Universidad de Gotinga y le protegió hasta que alcanzó la fama como gran matemático. Cuando tenía 18 años, descubrió la posibilidad de construir con regla y compás el polígono regular de 17 lados y, con ella, la relación entre la construcción de polígonos regulares y los números primos de Fermat. La admiración que le produjo este descubrimiento que vincula dos aspectos tan distintos de la matemática, le hizo decidirse por esta última. El mismo año, 1 796, Gauss inicia un diario científico en el que irá apuntando resultados y cálculos interesantes resueltos por él, aunque éstos sólo están enunciados sin ningún tipo de demostración o comentario. El último apunte está fechado en 1814. Durante estos años, Gauss llegaría a escribir 146 resultados, muchos de ellos completamente nuevos, pero, sin embargo, el autor nunca estuvo interesado en su publicación, pues, al parecer, la creación científica era para él una satisfacción personal, sin importarle demasiado la transmisión de sus conocimientos al mundo científico de su época. El diario fue descubierto y publicado en 1 898, es decir, cuarenta y tres años después de la muerte de su autor. Gauss se dedicó exclusivamente a la matemática pura hasta inicios del siglo XIX, consiguiendo importantes resultados en Álgebra, como la demostración del Teorema Fundamental y la representación gráfica de los complejos. En 1 801 publicó una obra dedicada principalmente a la teoría de números, "Disquisitiones aritbmeticae", con la cual eleva a la aritmética al rango de disciplina plenamente desarrollada de la matemática. Trabajó también en geometría llegando a importantes conclusiones sobre el quinto postulado de Euclides y siendo uno de los precursores de las geometrías no euclídeas.

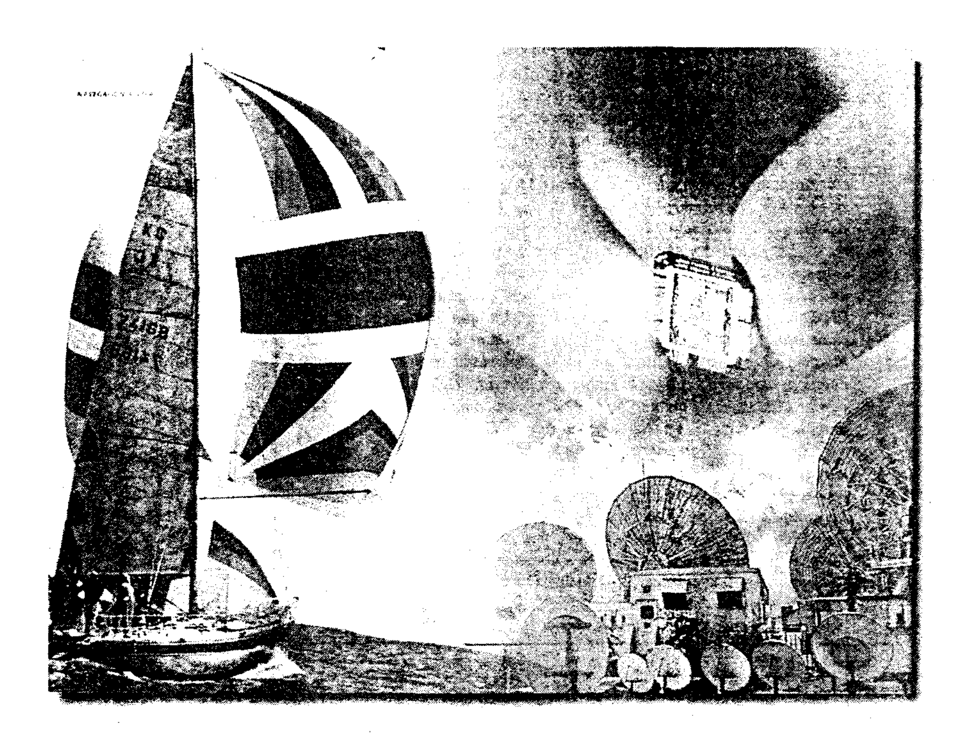
A partir de 1 800, Gauss, empezó a dedicarse a la ciencia aplicada más directamente. Son importantes sus estudios sobre astronomía, física y electromagnetismo. Al igual que Arquímedes y Newton, fabricó algunos de los instrumentos necesarios para sus investigaciones. Contribuyó con Weber a la construcción del primer telégrafo electromagnético. Uno de los instrumentos matemáticos, que lleva su nombre, nació de sus estudios sobre los errores de medición, que le llevaron, al hacer la representación gráfica de las frecuencias, a la curva en forma de campana, la llamada campana de Gauss, de gran importancia en estadística.

A partir de su nombramiento como director del observatorio astronómico de Gotinga, en 1 807, y del reconocimiento por parte de sus contemporáneos como el matemático más grande de su tiempo, su vida discurrió tranquila y sin preocupaciones económicas. Combinó las investigaciones científicas con los momentos de ocio, que dedicaba a la lectura de la literatura europea de su tiempo y de los clásicos. Tuvo un gran interés por el estudio de las lenguas, que según decía le servía para mantener la agilidad mental.

Matemática Visión Histórica
Arnoldo Mondadori



CONTEO DE FIGURAS



La observación y la habilidad para discriminar formas geométricas que encajan entre sí adecuadamente, son empleadas luego en el diseño y construcción de instrumentos cada vez más pequeños y prácticos. Estas capacidades se potencian mediante el conteo de figuras.

Lectura 15

Configuraciones Mágicas misceláneas

Las propiedades de los números no sólo se limitan a la geometría del cuadrado. En vez de éstos pueden construirse círculos que se intersecan, de modo que sus puntos de intersección puedan ser numerados mágicamente. Las figuras 1, 2 y 3 muestran 3 construcciones circulares mágicas; en cada una de ellos la suma de los enteros de cualquiera de los círculos es igual a la suma de los enteros de cualquiera de los otros. En la figura 2 la suma de los números 1, 8, 4, 12, 5 y 9, todos del mismo círculo, es igual a la suma de los números 6, 5, 3, 7, 8 y 10, todos situados en otro círculo.

Una sencilla estrella de cinco puntas puede utilizarse como diseño para disponer números mágicos, tal como se ve en la figura 4; en este caso se emplean los enteros del 1-12, omitiendo el 7 y el 11. La constante mágica de cada línea recta es 24, y es la menor posible para esta cantidad de números enteros. Este tipo de estrella mágica no tiene solución cuando se emplean 10 enteros consecutivos.

La figura 5 muestra un ejemplo simple de cubo mágico: su constante mágica es 42. Un cubo mágico de $n \times n \times n$ está formado por una serie de enteros dispuestos de manera tal que cualquier columna o fila de n enteros y las 4 diagonales principales, que contiene n enteros cada una y cruzan el centro del cubo, suman la misma constante mágica. La figura 6 muestra el cubo desarmado en sus tres planos componentes para explicar la estructura interna. Debe advertirse que, con la excepción de las diagonales del plano componente central, las diagonales principales de las caras no suman 42.

La figura 7 muestra una configuración mágica de enteros consecutivos verdaderamente única. La suma de los enteros situados en cualquier línea recta de los hexágonos unidos por un lado es 38. Se ha comprobado que, excluyendo reflexiones y rotaciones, éste es el único hexágono mágico posible. No hay solución para órdenes más altos, es decir, con más hexágonos colocados alrededor de la figura 7, ni tampoco para la siguiente configuración más pequeña, formada por 7 hexágonos.

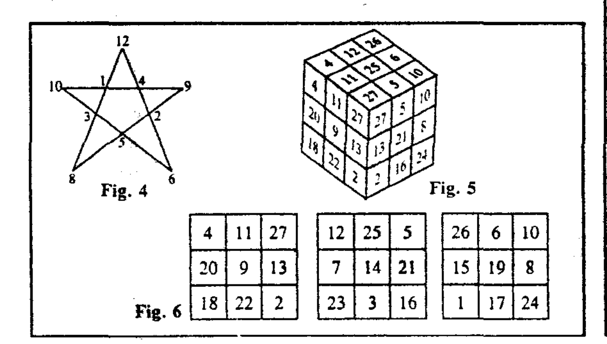


Fig. 4

Fig. 5

4	11	27
20	9	13
18	22	2

12	25	5
7	14	21
23	3	16

26	6	10
15	19	8
1	17	24

Fig. 6

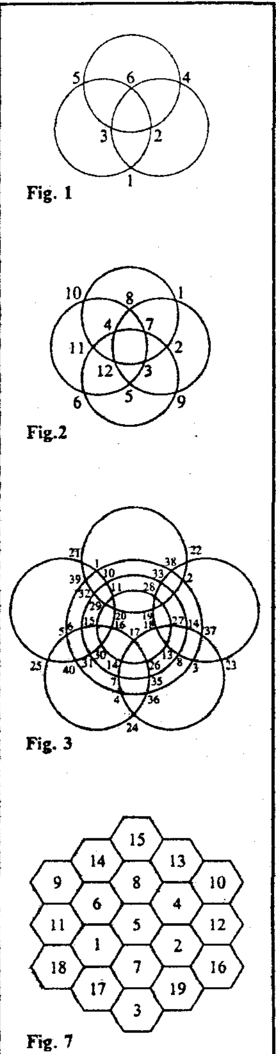


Fig. 1

Fig.2

Fig. 3

Fig. 7

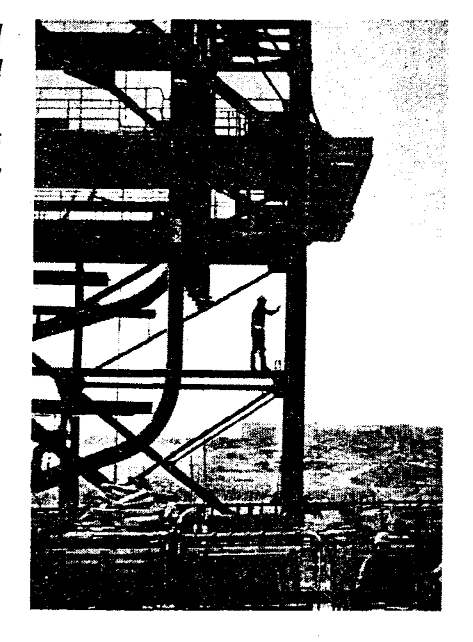
FUENTE: El hombre que calculaba

CONTEO
DE FIGURAS

Objetivos

1. *Ejercitar y potenciar la concentración en el área de la discriminación perceptual–visual.*
2. *Descubrir y aplicar métodos sencillos para realizar el conteo de las diversas figuras pedidas en un problema dado.*
3. *Reforzar los conocimientos adquiridos en los capítulos de sucesiones y series, mediante la aplicación de problemas afines y complementarios.*

Introducción



La imaginación juega un papel importante como facultad mental, porque nos permite relacionar el plano real con el abstracto. Haciendo un adecuado uso de ella, es posible ver, en la ilustración de la derecha, figuras geométricas representadas por triángulos de diversas clases y cuadriláteros, cuyas superficies están constituidas por el cielo, y cuyos lados están formados por los ejes metálicos de la construcción que se erige.

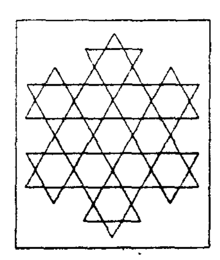
Así, la imaginación es una facultad maravillosa con la cual las matemáticas han alcanzado niveles insospechados. Actualmente las matemáticas son ilimitadas, han roto sus cadenas y cualquiera que sea la esencia de las matemáticas, reconocemos que son tan libres como la mente y tan prensiles como la imaginación. No es sorprendente que las matemáticas disfruten de un bien ganando prestigio no igualado por ninguna otra actividad del pensamiento humano, ya que son a la vez imprescindibles en los asuntos prácticos y en la obra maestra de la abstracción pura.

En el presente capítulo estudiaremos las técnicas básicas para determinar la cantidad de figuras de un determinado tipo presentes en una figura principal dada. Para lograrlo, es sumamente importante el interés que le des a cada uno de los ejemplos y ejercicios resueltos. La concentración y el uso adecuado del sentido de la vista son primordiales, por ello te aconsejamos practicar cuidadosamente y leer las nociones previas antes de estudiar los métodos de conteo de figuras.

CONTEMOS TRIÁNGULOS

El dibujo está hecho de triángulos.

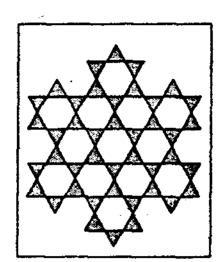
¡En total hay ochenta y ocho triángulos!



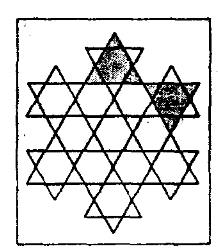
Vamos a descubrirlos todos.

Veamos:

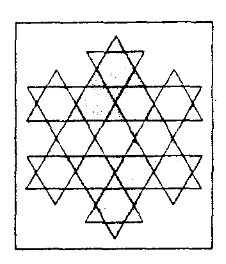
Hay 42 triángulos del siguiente tamaño (sombreados), apuntando en todas direcciones.



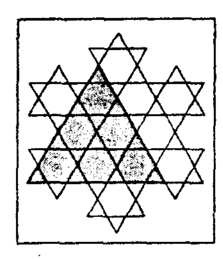
Hay 26 triángulos del siguiente tamaño (como los sombreados), 13 apuntando hacia arriba y 13 hacia abajo.



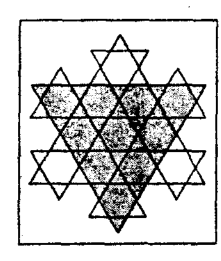
Hay 12 triángulos del siguiente tamaño (sombreados), 6 apuntando hacia arriba y 6 hacia abajo.



Hay 6 triángulos del siguiente tamaño (sombreado), 3 apuntando hacia arriba y 3 hacia abajo.



Y hay 2 triángulos del siguiente tamaño (sombreado), 1 apuntando hacia arriba y 1 hacia abajo.



Estos son en total 88 triángulos.

¿Ubicaste a todos? ¿O te sentiste mareado antes de terminar?

¿Te das cuenta de que has tenido que usar tu vista y tu atención para contar los triángulos? Seguramente has buscado formas triangulares de tamaños distintos, en consecuencia, pudiste identificar los triángulos dispuestos en diversas posiciones. Vamos a ejercitarnos para que la búsqueda de las formas sea más fácil.

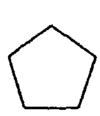
Fuente: El mundo de los niños. Tomo X

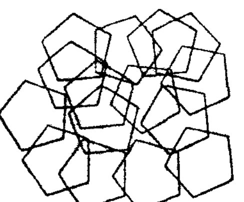
EN BUSCA DE LA FIGURA (Discriminación Perceptual)

Para llevar a cabo nuestra labor tendremos que hacer uso – en algunas ocasiones más y en otras menos – de nuestra visión y concentración, sobre todo cuando se trate de buscar y reconocer las figuras geométricas pedidas en un ejercicio. Ahora vamos a ejercitarnos un poco.

EJERCICIO 1

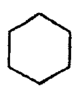
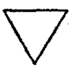
¿Cuántos pentágonos, como el que se muestra, existen en la figura de la derecha?

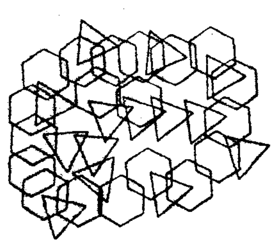




EJERCICIO 2

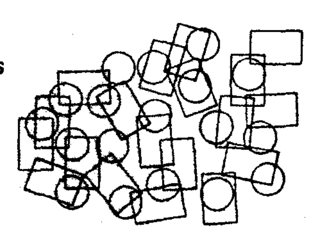
En la figura de la derecha hay exágonos y triángulos como los que se muestran en el de la izquierda. Indique cuántos triángulos y cuántos exágonos hay.



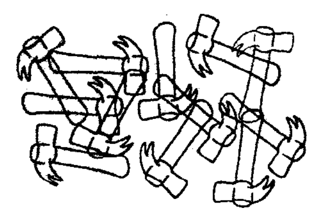
EJERCICIO 3

En la figura de la derecha se debe encontrar el número de circunferencias y de rectángulos, como los existentes en la izquierda.



EJERCICIO 4

¿Cuántos martillos se encuentra en total?

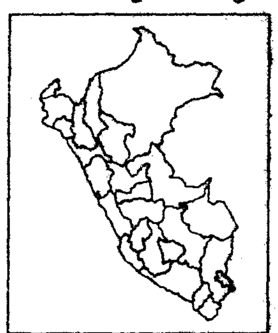


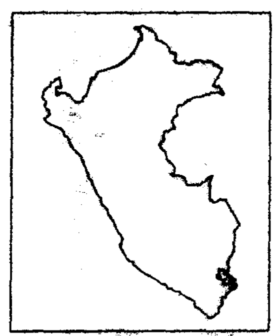
Respuestas

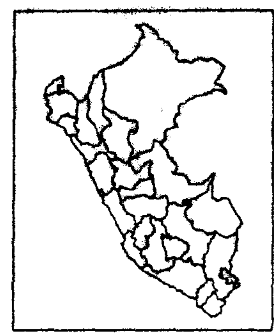
1) Hay 15 pentágonos.
2) Hay 14 triángulos y 19 exágonos.
3) Hay 18 circunferencias y 19 rectángulos.
4) Hay 12 martillos.

NOCIONES PREVIAS

Observa bien las siguientes figuras:


El mapa del Perú es una figura compuesta.


Contorno del mapa del Perú.


Cada una de las piezas del rompecabezas representa un departamento del Perú y es una figura simple.

En la primera de ellas se aprecia el mapa del Perú con sus departamentos. Imaginémonos que es un rompecabezas, le sacamos sus piezas y lo que nos queda es sólo *el contorno del* mapa, es decir, la segunda figura.

Una vez acomodadas convenientemente las piezas, éstas *forman* el mapa del Perú. Si consideramos al mapa completo como una ***figura compuesta***, entonces a cada una de las piezas que lo conforman (en este caso los departamentos) la consideramos como una ***figura simple***. Ambas expresiones, "***figura compuesta***" y "***figura simple***", adquieren importancia notable cuando se trata de buscar y contar figuras en un problema dado.

Según lo anterior, una figura puede ser simple o compuesta:

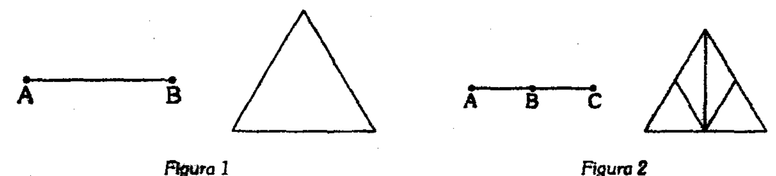


Figura 1 *Figura 2*

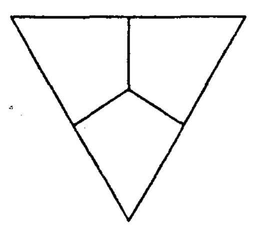
En la figura 1, apreciamos ejemplos de *figuras simples*, es decir, no contienen otras figuras en su interior. Mientras que en la figura 2, se observa un punto que parte al segmento AB, y líneas que dividen el triángulo mayor en otros más pequeños, es decir, aparecen otras figuras secundarias; por ello diremos que estamos ante *figuras compuestas*.

MÉTODOS DE CONTEO DE FIGURAS

Nuestro objetivo es averiguar el número exacto de figuras, por lo general, la máxima cantidad de ellas, que tienen ciertas características o son de un tipo determinado, que puedan identificarse en una figura principal. Dicha figura principal se encuentra dividida por puntos o líneas que determinan figuras secundarias de diversas formas y tamaños. Por ejemplo, observemos la siguiente figura:

Ejemplo 1

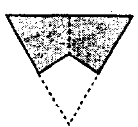
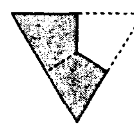
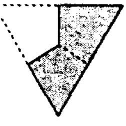
¿Cuántos pentágonos como máximo hay en la siguiente figura?



Resolución:

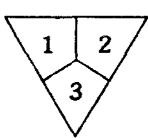
Para saberlo podríamos hacer lo siguiente:

1° Forma: Observamos con mucha atención la figura y buscamos en ella visualmente las formas de la figura pedida: "un pentágono". De seguro *veremos* los siguientes casos:

Por lo tanto, en la figura dada, encontraremos 3 pentágonos como máximo.

2° Forma: Imaginemos la figura principal como un rompecabezas de tres piezas (si miras la figura principal notarás que está "*dividida en tres partes*") y a cada una de ellas podemos asignarles una letra o un número. La nueva figura sería:



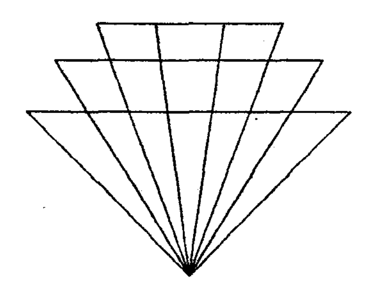
Recordemos que cada una de las partes o piezas es una **figura simple**. Ahora buscamos pentágonos combinando los números de las piezas; pero haciéndolo en estricto orden:

	N° de figuras	
Pentágonos formados por una sola pieza:	No hay ⇒ 0	0
Pentágonos formados por dos piezas:	(1, 2); (1, 3); (2, 3) ⇒ 3	3
Pentágonos formados por tres piezas:	No hay ⇒ 0	0

En conclusión, el número total de pentágonos es 0+3+0 = 3

Ejemplo 2

¿Cuántos triángulos en total hay en la siguiente figura? Intenta hacerlo como en el ejemplo anterior.



Salta a la vista rápidamente una cierta armonía en la figura mostrada, sin embargo, sospechamos ahora que el conteo de los triángulos no va a ser tan sencillo. Intuimos que *debe haber otra forma* distinta a las dos ya presentadas en el ejemplo anterior que nos permita encontrar, a la brevedad posible, la respuesta a la pregunta. ¿Existirá dicha forma? Pero antes de continuar con la lectura intenta determinarla.

Rpta: 49

Observación:

- En el primer ejemplo hemos realizado el conteo en forma directa (visualmente por simple inspección) y en la 2° forma enumerando las figuras simples. Ambas formas constituyen un método de conteo denominado ***conteo directo***.
- Si en el ejemplo 2, aplicamos el *conteo directo*, la solución sería larga y tediosa; por ello, haremos uso de otro método de conteo denominado ***Conteo por Inducción***.
- Hay problemas en los cuales se usa ambos métodos juntos o se aplica algunos criterios especiales empleados en determinados tipos de problemas. Conforme avancemos iremos anotándolos.

1° MÉTODO: CONTEO DIRECTO

Como se ha visto, el conteo directo **se realiza visualmente** o por "***simple inspección***" y enumerando las figuras simples que conforman la figura principal; en este caso se dice que estamos contando "***por combinación***".

Conteo por simple inspección

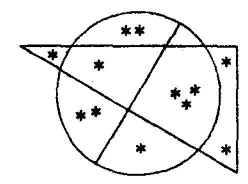
Hay problemas en los cuales basta observar minuciosamente la figura principal y las figuras simples que la componen buscando las características que satisfagan las condiciones requeridas por la pregunta. Veamos:

Ejemplo 1

En la figura mostrada:

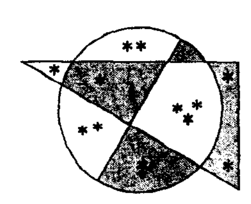
I. ¿Cuántas figuras simples hay?

II. ¿En cuántas figuras simples hay 2 asteriscos?



Resolución:

Observemos atentamente la figura principal y contemos cada una de las figuras simples que la componen. (Podemos ayudarnos con lápices de colores e ir delineando con un color los bordes o coloreando el interior de cada figura simple). Así, tenemos:

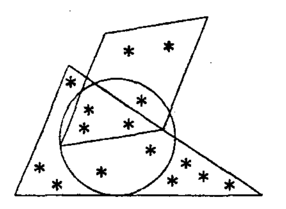


I. Como podemos apreciar, hay 3 regiones simples.

II. Hay 3 regiones simples en las cuales hay 2 asteriscos.

Ejemplo 2

Dada la siguiente figura:



I. ¿Cuántas figuras simples hay?

II. ¿En cuántas figuras simples hay a lo mucho 2 asteriscos?

III. ¿En cuántas figuras simples hay más de uno pero menos de 4 asteriscos?

Resolución:

I. Mira con mucha atención y encontrarás 9 regiones simples.

II. La frase "**... a lo mucho 2 asteriscos**" debemos entenderla bien.

Significa que tenemos que buscar figuras simples que tengan como máximo 2 asteriscos o un asterisco o ningún asterisco.

Luego:

Figuras simples con "0" asteriscos: 3
Figuras simples con "1" asteriscos: 1
Figuras simples con "2" asteriscos: 2

} Total: $3 + 1 + 2 = 6$ (Figuras donde hay a lo mucho 2 asteriscos).

III. Interpretando la frase: "***...más de uno pero menos de cuatro asteriscos***", concluiremos que el número de asteriscos cumple con la siguiente relación: $1 < \#$ asteriscos < 4.

Por lo tanto:

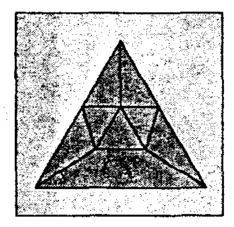
Figuras simples con "2" asteriscos: 2
Figuras simples con "3" asteriscos: 2

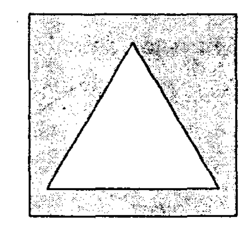
} Total: $2 + 2 = 4$ Figuras con más de uno pero menos de cuatro asteriscos

Por combinación

La figura que se muestra a continuación es un rompecabezas muy sencillo, conformado por 8 piezas; si sacamos estas piezas, lo que nos queda será la figura del centro.

Veamos:





8 piezas

¿Recuerdas el mapa del Perú con sus departamentos ubicado páginas atrás? Pues bien, estamos ante un caso análogo. El triángulo formado es la **figura principal** (figura compuesta) y cada una de las figuras secundarias que lo componen son **las figuras simples**.

Tomando en cuenta la figura que estamos estudiando en el dibujo mostrado, cada una de sus piezas ha sido enumerada.

En realidad, dada una figura compuesta, lo que hacemos es asignar letras y/o dígitos a todas las figuras simples y luego procederemos a anotar todas las combinaciones que correspondan a la formación de la figura solicitada o a la condición requerida por el ejercicio.

Se aconseja hacer esto de la manera más adecuada posible, es decir, tratando de que los dígitos y/o letras asignados estén dispuestos en forma secuencial y no muy alejados unos de otros en su ubicación de la gráfica, para que al momento de hacer el conteo la formación de la figura solicitada sea más sencilla. Ahora, cuando ya estemos en el proceso de conteo, éste debe ser realizado de manera muy ordenada y secuencialmente, así de acuerdo a lo solicitado contaremos primero figuras de 1 dígito y/o de una sola letra (es decir, las formadas por una figura simple), luego figuras de 2 dígitos y/o 2 letras (es decir las figuras compuestas por dos figuras simples); después buscamos las figuras solicitadas compuestas por tres figuras simples (3 dígitos y/o tres letras) y así sucesivamente.

Por ejemplo, en el esquema simplificado que representa a nuestro rompecabezas podríamos preguntar: ¿cuántos cuadriláteros hay? y lo que haríamos sería lo siguiente

Cuadriláteros formados por 1 figura simple: el (8) 1

Cuadriláteros formados por 2 figuras simples: (14); (26); (34); (45); (46); (67) 6

Cuadriláteros formados por 3 figuras simples: (134); (267); (456) 3

Cuadriláteros formados por 4 figuras simples: No hay 0

Cuadriláteros formados por 5 figuras simples: No hay 0

Cuadriláteros formados por 6 figuras simples: (345678) 1

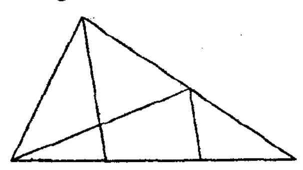
Cuadriláteros formados por 7 figuras simples: No hay 0

Cuadriláteros formados por 8 figuras simples: No hay .... 0 +

Luego, el número total de cuadriláteros es: 11

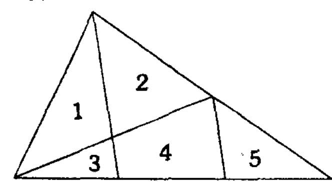
Ejemplo 1

¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?



Resolución:

Enumeramos la figura dada:

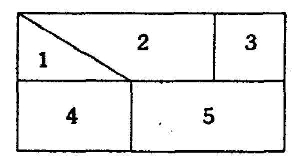


	Nº triángulos
Triángulos que se forman con 1 figura simple: 1; 2; 3; 5	4
Triángulos que se forman con 2 figuras simples: (12); (13); (34)	3
Triángulos que se forman con 3 figuras simples: (245); (345)	2
Triángulos que se forman con 4 figuras simples: No hay	0
Triángulos que se forman con 5 figuras simples: (12345)	1
+ Total	10

Luego, hay 10 triángulos en total

Ejemplo 2

Indique el número total de cuadriláteros que hay en la siguiente figura:



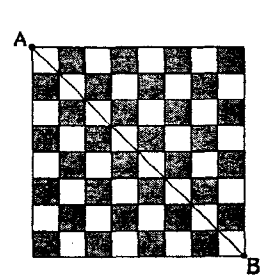
Resolución:

Luego de enumerar la figura, hay 5 regiones simples.

Cuadriláteros que se forman con 1 región simple: 2; 3; 4; 5	4
Cuadriláteros que se forman con 2 regiones simples: (12); (14); (23); (45) ...	4
Cuadriláteros que se forman con 3 regiones simples: (123)	1
Cuadriláteros que se forman con 4 regiones simples: No hay	0
Cuadriláteros que se forman con 5 regiones simples: (12345)	1
⊕ Total:	10

Luego, en la figura mostrada hay 10 cuadriláteros

2° MÉTODO: CONTEO POR INDUCCIÓN

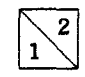


Observa la figura de la derecha. ¿Has jugado ajedrez o damas alguna vez?, seguro que sí; y habrás utilizado un tablero como el que se muestra en la figura.

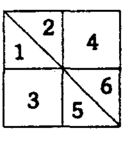
Podemos apreciar un tablero cuadrado con 8 cuadraditos por lado. Ahora tomemos un lápiz y tracemos una línea que una los puntos A y B del tablero, (hemos trazado *la diagonal* del tablero *cuadrado*), al hacerlo notamos que aparecen unos triángulos pequeños situados a ambos lados de la diagonal. ¿Serán los únicos o habrán más?, ¿cuántos triángulos tiene realmente la figura mostrada?

Para saberlo podríamos suponer que el tablero está formado *sólo por un cuadrado*, luego que está formado por *dos cuadraditos por lado* y así sucesivamente aumentamos el número de cuadriláteros por lado, ¿recuerdas como se llama a este proceso?

Lo que estamos sugiriendo es trabajar por *inducción*, es decir, reducimos el problema a un caso más sencillo y lo estudiamos; luego, complicamos poco a poco las situaciones y buscamos características notables que estarán presentes en todos los casos, analizamos dichos casos y finalmente generalizamos. Vamos a empezar con un *tablero de un cuadrado por lado* y le trazamos su diagonal. Veamos:

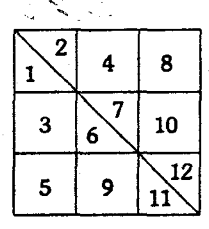


Aplicando el conteo por combinación que ya hemos estudiado, encontramos que hay **2 triángulos**: (1 y 2).



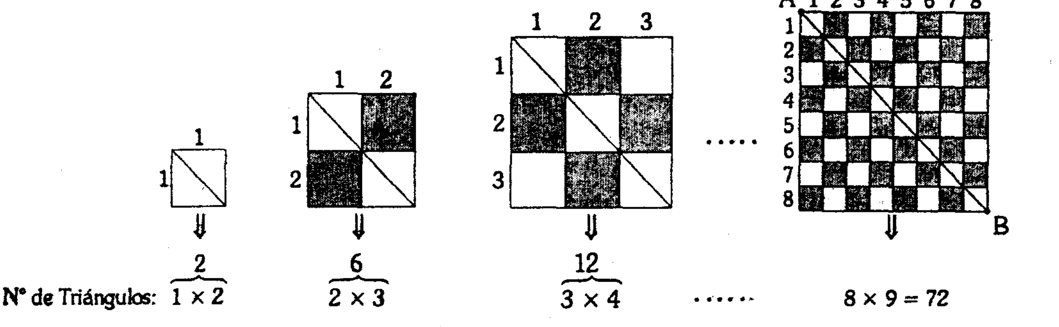
Ahora consideramos un tablero con 2 cuadrados por lado.

Otra vez contando por combinación hallaremos aquí: **6 triángulos**: 1; 2; 5; 6; 135; 246.



El tablero tiene 3 cuadrados por lado.

Procediendo en forma análoga a los anteriores casos obtenemos: **12 triángulos**, podríamos continuar así en los demás casos pero... hagamos un resumen y generalicemos.



Luego, en nuestro problema hemos encontrado que el número total de triángulos que se formarían al trazar la diagonal del tablero que une los puntos A y B sería: 72

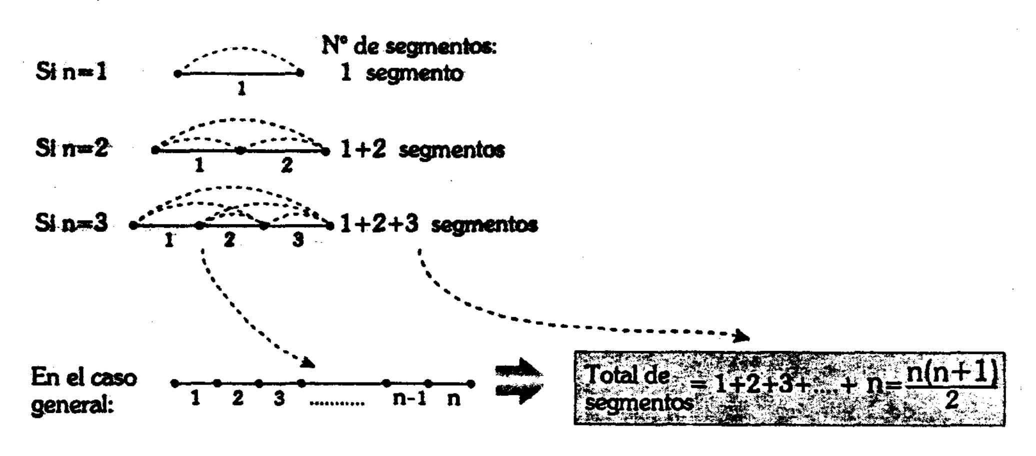
A continuación analicemos algunos "*problemas tipo*" de conteo de figuras que se resuelven por el método de inducción.

Conteo de segmentos

¿Cuántos segmentos hay en total en la siguiente figura?

Resolución:

Procederemos por inducción:



Ejemplo:

Indique cuántos segmentos hay en total en cada una de las siguientes figuras.

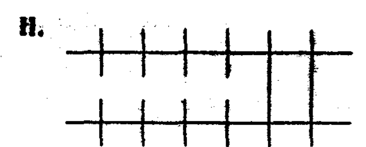
I. V A L L E J O C V

Resolución:

Numerando: V A L L E J O C V
1 2 3 4 5 6 7 8 9

N° segmentos: $\frac{9(10)}{2} = 45$

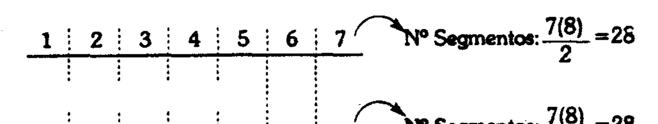
II.



Resolución:

Para una mejor comprensión resolveremos este ejercicio en 3 etapas, pero se entiende que al trabajar lo harás sobre la misma figura (tal vez usando lápices de colores). No hace falta que hagas todos los dibujos.

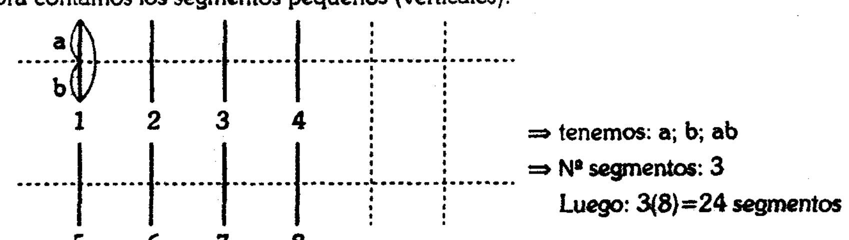
1° Paso: Numeramos la parte superior y en forma análoga la parte inferior:



Luego: 2(28) = 56 segmentos

2° Paso:

Ahora contamos los segmentos pequeños (verticales):



⇒ tenemos: a; b; ab

⇒ Nº segmentos: 3

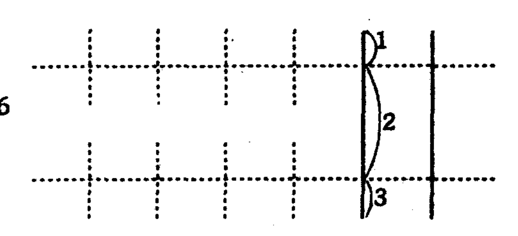
Luego: 3(8)=24 segmentos

3° Paso:

Finalmente contamos los grandes:

Tendremos:

de 1 número : 1; 2; 3
de 2 números: 12;23
de 3 números: 123
} Nº de segmentos=6

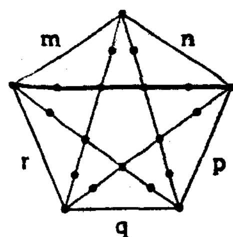


Luego: 6×2=12 segmentos

Ahora, el número total de segmentos que hay en la figura será:

$$28(2)+3(8)+6(2) = 92 \text{ segmentos}$$

III.



Resolución:

Observemos atentamente la línea horizontal en negrita y contemos en ella el número de segmentos (nota que hay puntos bien marcados sobre las líneas de la figura principal)

Tendremos: •—•—•—•—•—• (1 2 3 4 5)

Nº segmentos: $\frac{5(6)}{2}=15$

Ahora, ¿te has percatado que hay una estrella de cinco puntas encerrada en el pentágono? Pues esa estrella de 5 puntas ha sido construida con 5 líneas como la que está en negrita.

Luego, el Nº de segmentos: 15(5)=75.

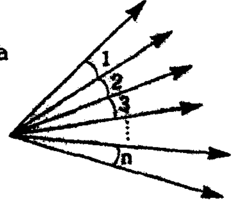
Pero aún falta contar los 5 lados del pentágono que también son segmentos. Así, tendremos finalmente:

N° total de segmentos: 75+5=80

Conteo de ángulos

Ejemplo 1

Indique cuántos ángulos agudos existen en la siguiente figura:



Resolución:

Si: (N° de ángulos)

$n = 1 \Rightarrow 1 = 1$

$n = 2 \Rightarrow 3 = 1 + 2$

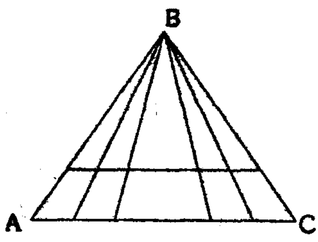
$n = 3 \Rightarrow 6 = 1 + 2 + 3$

$\vdots \qquad \vdots$

En general: **N° total de ángulos agudos = $1+2+3+......+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$**

Ejemplo 2

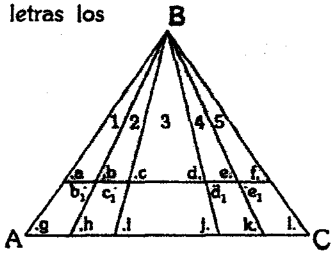
¿Cuántos ángulos agudos hay en total en la figura si el triángulo ABC es acutángulo?



Resolución:

Como puede apreciarse, hemos numerado y señalado con letras los ángulos pedidos; luego:

N° de ángulos enumerados en el vértice B $= \dfrac{5(6)}{2} = 15$



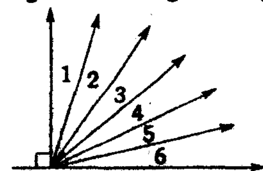
Contemos ahora los ángulos señalados con letras: a; b; c; d; e; f; b1;c1; d1; e1; g; h; i; j; k; l son 16 ángulos.

Por lo tanto:

N° total de ángulos: 15+16=31

Ejemplo 3

Indique el máximo número de ángulos agudos en la siguiente figura:



Resolución:

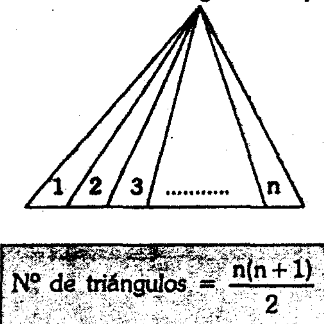
Enumerando tendremos: $\dfrac{6(7)}{2}=21$

Pero ¡cuidado!, porque hemos contado un ángulo formado por 123456, es decir, un ángulo recto.

$\therefore$ N° total de ángulos agudos: $21-1=20$

Conteo de triángulos

Si trabajas por inducción, comprobarás fácilmente la siguiente expresión:

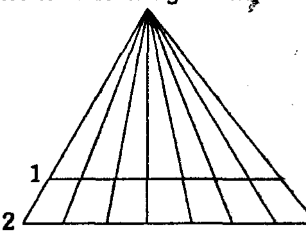


$$\text{N° de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde "n" es el número de triángulos numerados tal como se muestra en la figura dada.

Ejemplo 1

Halle el número total de triángulos en:



Observación:

Si miras la figura principal, notarás que hay 2 *líneas horizontales*; la 1ra determina los triángulos pequeños y la 2da, los triángulos grandes.

1 2 3 4 5 6 7

Resolución:

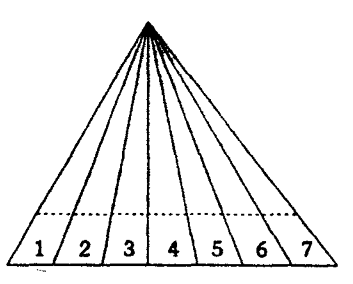
1° Paso:

$$\text{N° de triángulos pequeños} = \frac{7(8)}{2} = 28$$

2° Paso:

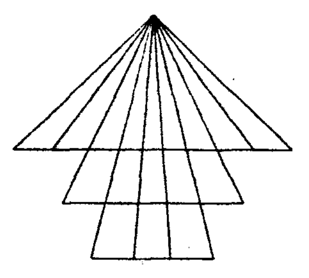
$$\text{N° de triángulos grandes} = \frac{7(8)}{2} = 28$$

∴ N° total de triángulos: $2 \times 28 = 56$



Ejemplo 2

Calcule el número total de triángulos en la figura mostrada a la derecha.

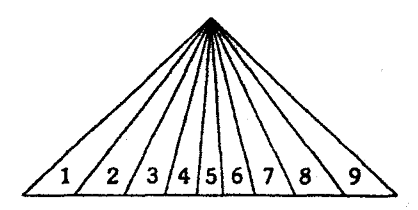


Resolución:

Primero contaremos los triángulos pequeños; luego, los medianos y finalmente, los grandes.

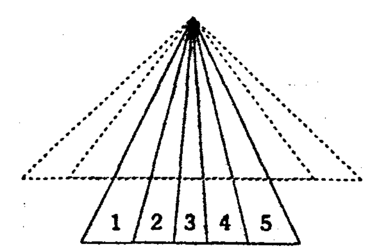
1° Paso:

$$\text{N° triángulos pequeños} = \frac{9(10)}{2} = 45$$



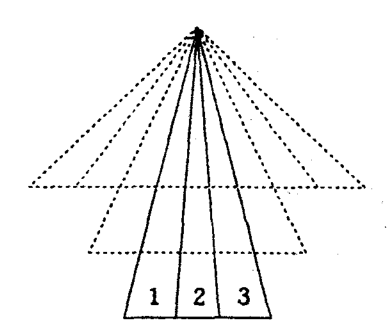
2° Paso:

$$\text{N° triángulos medianos} = \frac{5(6)}{2} = 15$$



3° Paso:

$$\text{N° triángulos grandes} = \frac{3(4)}{2} = 6$$

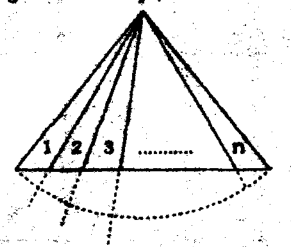


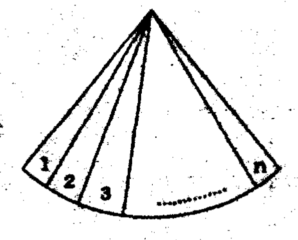
Luego:

N° total de triángulos: $45 + 15 + 6 = 66$

Observación:

Supongamos que el triángulo mostrado está hecho de un material elástico; es decir, puede deformarse tal como se aprecia en la figura de la izquierda. Si jalamos la base de la figura hacia abajo, tendríamos la figura de la derecha.





Ahora son triángulos cuyas bases son líneas curvas, es decir, se han convertido en ***sectores circulares***. ¿Crees que el número de *triángulos* ha variado con la transformación realizada? Es fácil ver que el número total de sectores circulares de la figura de la derecha es el mismo que el número de triángulos de la figura de la izquierda.

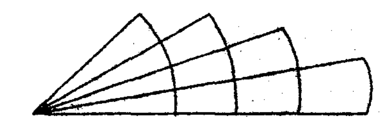
Luego:

$$\text{N}^\circ \text{ de sectores circulares} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Resolvamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

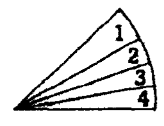
Calcule el número total de sectores circulares en:



Resolución:

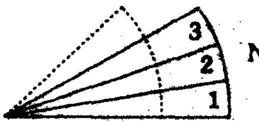
Otra vez procederemos con cuidado

1° Paso:



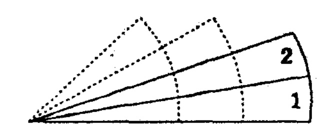
$$\text{N}^\circ \text{ sectores circulares} : \frac{4(5)}{2} = 10$$

2° Paso:



$$\text{N}^\circ \text{ sectores} : \frac{3(4)}{2} = 6$$

3° Paso:



$$\text{N}^\circ \text{ sectores} : \frac{2(3)}{2} = 3$$

4° Paso:

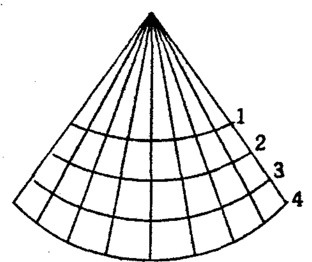
N° sectores: 1

Luego, el número total de sectores circulares es:

$10 + 6 + 3 + 1 = 20$

Ejemplo 2

Halle el número total de sectores circulares existentes en:

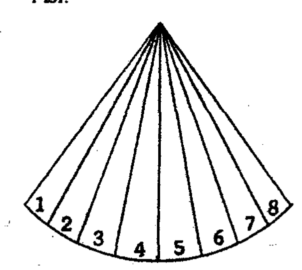


Resolución:

Contemos los sectores circulares pequeños y al resultado obtenido multipliquemos por 4. ¿Por qué?.

Es sencillo lo que sucede; ya que, hay 4 tamaños diferentes de sectores circulares correspondientes a cada una de las cuatro líneas curvas enumeradas en la figura principal.

Así:



N° sectores circulares pequeños : $\frac{8(9)}{2} = 36$

Luego:

N° total de sectores circulares: $4(36) = 144$

Conteo de cuadriláteros

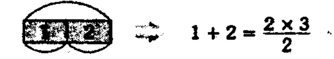
Aquí vamos a estudiar algunos casos importantes:

Ejemplo 1

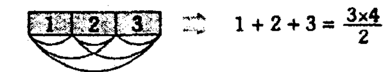
¿Cuántos cuadriláteros hay en total en la siguiente figura?

1	2	3	....	n

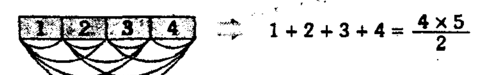
Resolución:



$\Rightarrow \quad 1 + 2 = \frac{2 \times 3}{2}$



$\Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 = \frac{3 \times 4}{2}$



$\Rightarrow \quad 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$

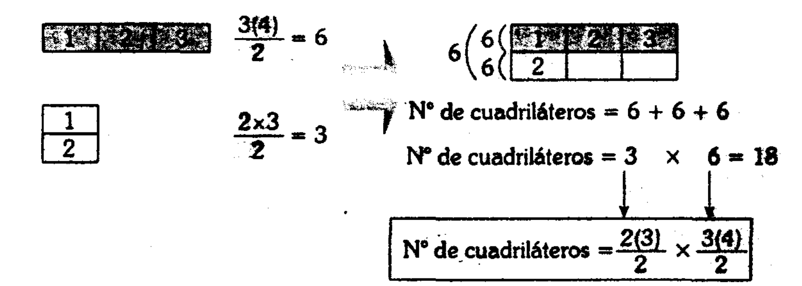
∴ En general: $\boxed{\text{N° de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}}$

Ejemplo 2

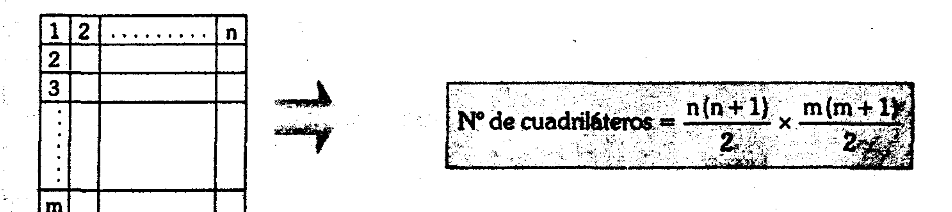
¿Cuántos cuadriláteros hay?

1	2	3
2		

Resolución:



En general:



Ejemplo 3

Calcule el número total de cuadriláteros que hay en la siguiente figura:

1	2	3	4	5	6
2					
3					
4					

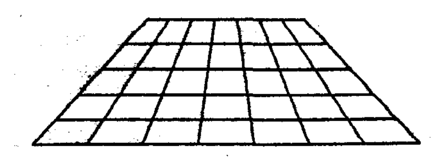
Resolución:

Enumerando adecuadamente tendremos: $\frac{6(7)}{2} \times \frac{4(5)}{2} = 210$

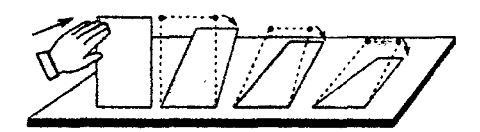
∴ Hay 210 cuadriláteros

Ejemplo 4

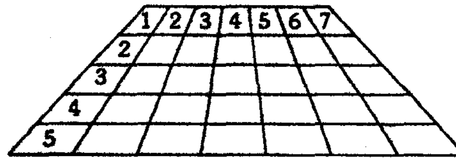
Un carpintero metálico ha elaborado una ventana de aluminio. Al echarla al piso (como se ve en la figura), ¿cuántos cuadriláteros en total se podrá encontrar?



Resolución:
Observe atentamente el siguiente gráfico:



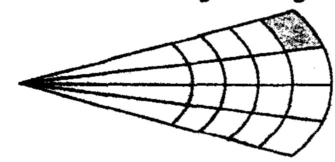
Se evidencia un rectángulo de pie ubicado perpendicularmente sobre una mesa. Dicho rectángulo es empujado, "*hacia atrás*", hasta que descansa completamente sobre el tablero. Así echado sobre el tablero da la impresión de haberse convertido en un trapecio; esto ocurre por efecto de la "perspectiva"; pero sigue siendo, como todos sabemos por experiencia, un rectángulo. Luego, podemos suponer, sin temor a equivocarnos; que la figura principal mostrada anteriormente puede ser un enrejado, es decir una puerta o una ventana de separaciones *rectangulares*, la cual ha sido colocada sobre el piso dando la impresión de que es un trapecio y que las figuras planas que lo componen también lo son. (De hecho en el problema planteado eso es lo que realmente está ocurriendo) entonces podemos enumerar adecuadamente como lo hicimos al principio y aplicar la expresión general para calcular el número de cuadriláteros. Veamos:



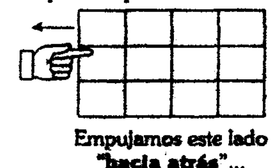
Número de cuadriláteros:

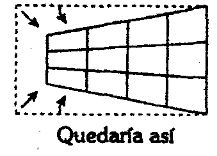
$$\frac{7(8)}{2} \times \frac{5(6)}{2} = 420$$

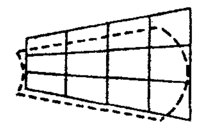
Ejemplo 5
Calcule el número total de trapecios circulares en la siguiente figura:

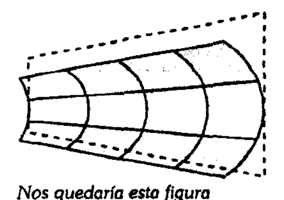


Resolución:
Imaginemos que la figura que se muestra a continuación es una hoja de material elástico, la cual va a ser deformada poco a poco. Veamos:


Empujamos este lado "hacia atrás"...


Quedaría así

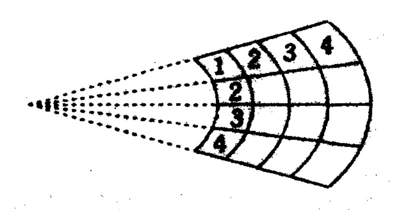

Ahora curvamos la hoja y entonces...


Nos quedaría esta figura

Como apreciamos queda una hoja curva, en ella se nota los *rectángulos* del principio pero curvados. Esta "*hoja curva*" se parece en *algo* al problema planteado –en realidad a una parte de la figura del problema –¿no es cierto?. Veamos la figura del problema, podemos enumerarla y trabajar con ella como si estuviera compuesta por rectángulos.

Número de trapecios circulares:

$$\frac{4\times 5}{2}\times\frac{4\times 5}{2} = 100$$

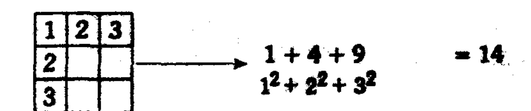


Conteo de cuadrados

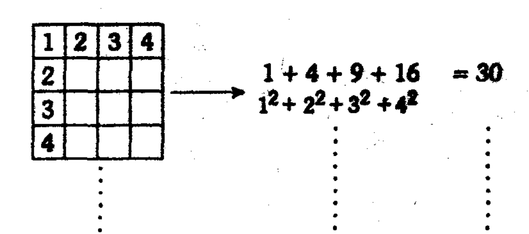
1° Caso (la figura principal es un cuadrado)

$\boxed{1}$ ⟶ 1 (1^2) $= 1$

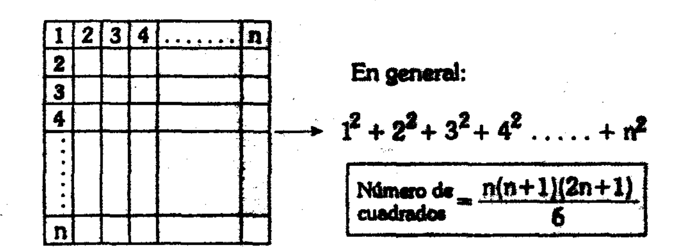
⟶ $1 + 4$ ($1^2 + 2^2$) $= 5$



$1 + 4 + 9$ ($1^2 + 2^2 + 3^2$) $= 14$



$1 + 4 + 9 + 16$ ($1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$) $= 30$



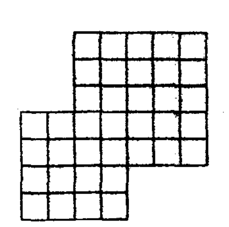
En general:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + n^2$$

$$\boxed{\text{Número de cuadrados} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Ejemplo:

Calcule el número total de cuadrados en:



Resolución:

1° Paso:

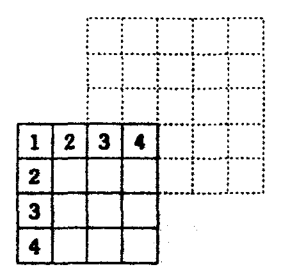
Número de cuadrados:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5(6)(11)}{6}$$

Al efectuar se tiene 55 cuadrados.

2° Paso:

Número de cuadrados : $\frac{4(5)(9)}{6} = 30$



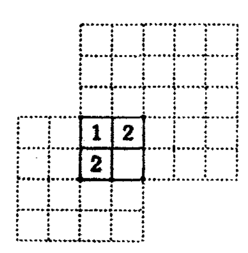
3° Paso:

Hay una parte de la figura que ha sido contada dos veces ¿Te has dado cuenta cuál? Si miras atentamente, verás que es la parte resaltada en la figura de la derecha.

Número de cuadrados: $1^2 + 2^2 = 5$

Tenemos que restar estos 5 cuadrados repetidos.

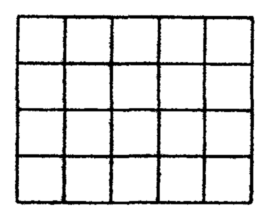
$\therefore$ Número total de cuadrados: $55 + 30 - 5 = 80$



2° Caso (la figura principal es un rectángulo)

Ejemplo:

¿Cuántos cuadrados en total hay en la figura mostrada?



Resolución:

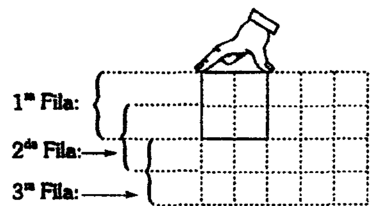
Enumeremos la figura y contamos cuadrados pequeños (una figura simple □):

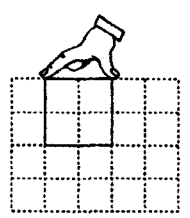
Número de cuadrados: $5 \times 4 = 20$

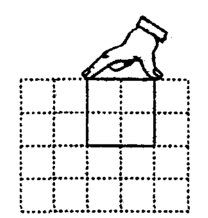
1	2	3	4	5
2				
3				
4				

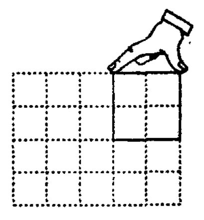
Ahora busquemos cuadrados formados por dos figuras simples por lado, es decir, ⊞.

Veamos:



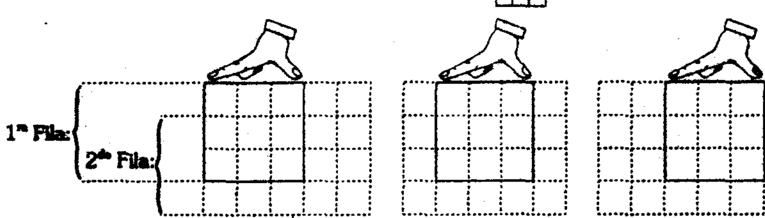






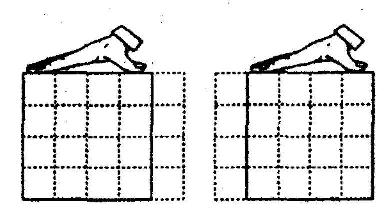
Podemos apreciar que en la primera fila hay 4 cuadrados y observamos 3 filas que presenta los cuadrados del tipo buscado. Luego, el número de cuadrados: $4 \times 3 = 12$

De forma análoga, buscamos cuadrados de 3 figuras simples por lado:



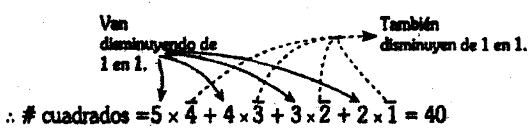
En la fila indicada (1° fila) hay 3 cuadrados del tipo que se busca y la figura principal tiene 2 filas con esa característica. Así, el número de cuadrados es: $3 \times 2 = 6$

Finalmente, podemos observar cuadrados formados con 4 figuras simples por lado:



Como verás, hay 2 cuadrados como el buscado y una sola fila que los contiene. Luego, el número de cuadrados será: $2 \times 1 = 2$

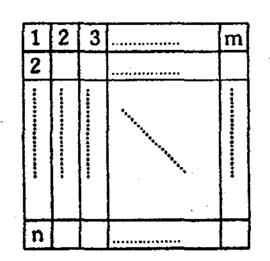
Por lo tanto, el total de cuadrados sería:



¡A esta última expresión queríamos llegar! ¿Puedes notar la interesante relación existente entre los sumandos?. Dicha relación, si se quiere, podría generalizarse. La solución mostrada se ve larga y tediosa; pero se entiende que todos los detalles deben llevarse a cabo sobre la misma figura del problema utilizando lapices de color porque después, con la práctica, ya no será necesario. Veamos un ejemplo en el cual aplicaremos de manera directa lo aprendido.

Primero la generalización:

Si tenemos:



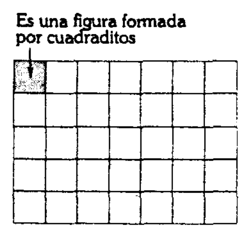
Entonces: $N° \text{ de cuadrados} = m.n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots$

Los puntos suspensivos indican que continúan apareciendo más sumandos hasta que uno de ellos presente como factor al número 1.

Ejemplo

En la siguiente figura:

a. ¿Cuántos cuadriláteros hay en total?
b. ¿Cuántos cuadrados hay en total?
c. ¿Cuántos cuadriláteros, que no son cuadrados, hay?



Resolución:

Haciendo uso de las relaciones obtenidas en los estudios anteriores, tenemos:

a. Cálculo del número total de cuadriláteros: $\frac{7 \times 8}{2} \times \frac{5 \times 6}{2} = 420$

b. Cálculo del número total de cuadrados: $7 \times 5 + 6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = 85$

c. Cálculo del número total de cuadriláteros que no son cuadrados.
En "**a**", al contar el número total de cuadriláteros, incluíamos ahí también a los cuadrados. Luego:

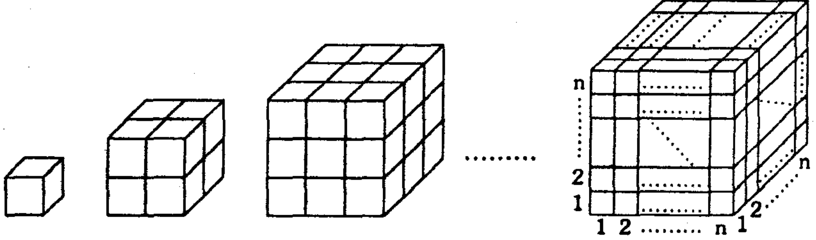
Nº total de cuadriláteros que no son cuadrados = Nº **total de cuadriláteros** – Nº **total de cuadrados**

En el problema, el número total de cuadriláteros que no son cuadrados es: $420 - 85 = 335$

Conteo de cubos y paralelepípedos

1° Caso: Conteo de cubos

Se presenta dos posibilidades: el *sólido es un cubo* formado por cubos simples. Así:



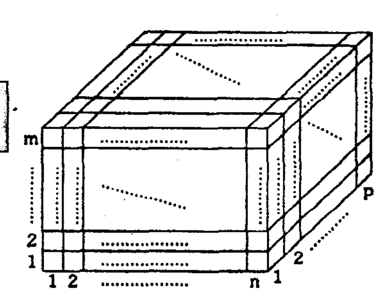
Número total de cubos: 1^3 $\quad 1^3+2^3$ $\quad 1^3+2^3+3^3$ $\quad \ldots\ldots\ 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

luego, generalizando: $$\text{Número total de cubos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Pero si el ***sólido es un paralelepípedo*** formado por cubos simples, como el de la figura de la derecha, entonces:

$$\text{N° total de cubos} = m \times n \times p + (m-1)(n-1)(p-1) + (m-2)(n-2)(p-2) + \ldots$$

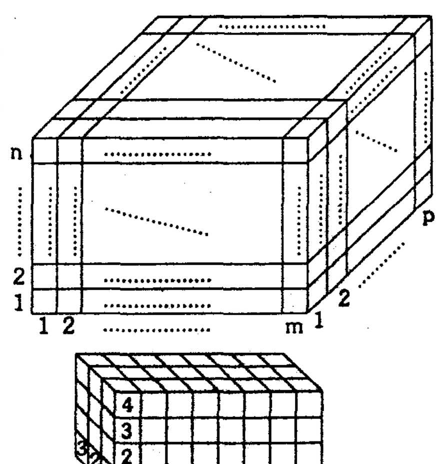
y se continúa hasta que uno de los factores sea 1. Con la experiencia de anteriores casos, estamos seguro de que puedes reconstruir el procedimiento por el cual se llegó a establecer las relaciones que aparecen en los recuadros anteriores.



2° Caso: Conteo de Paralelepípedos

En la figura se muestra un paralelepípedo que puede estar formado ya sea por cubos simples o por paralelepípedos simples. Procediendo por inducción, es sencillo demostrar que:

$$\text{Número de paralelepípedos} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$$



Ejemplo 1

En la siguiente figura:

a. ¿Cuántos paralelepípedos hay?
b. ¿Cuántos cubos hay?
c. ¿Cuántos paralelepípedos, que no son cubos, hay?

Resolución:

a. Número total de paralelepípedos: $\frac{8\times 9}{2} \times \frac{4\times 5}{2} \times \frac{3\times 4}{2} = 2160$

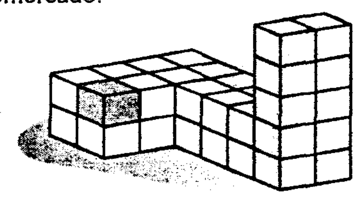
Aquí se están incluyendo también los cubos que hay en el sólido

b. Número total de cubos: $8\times 4\times 3+7\times 3\times 2+6\times 2\times 1 = 150$

c. Número total de paralelepípedos que no son cubos: $2160 - 150 = 2010$

Ejemplo 2

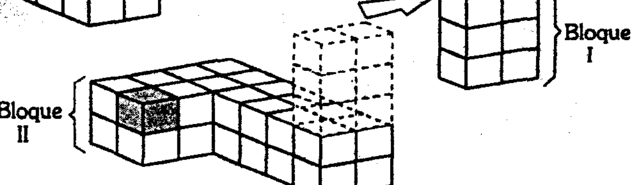
En la construcción mostrada, se ha utilizado bloques cúbicos de concreto, como en el cubo sombreado.



a. ¿Cuántos bloques cúbicos de concreto se utilizaron?
b. ¿Cuántos cubos en total hay?

Resolución:

a.



En el bloque (I) : Aquí apreciamos seis bloques cúbicos.
Esta parte ha sido *retirada* de su lugar para que se cuente fácilmente los bloques cúbicos de la otra parte.

En el bloque (II): Esta parte de la escultura tiene dos pisos y en el *segundo piso* contamos 16 bloques cúbicos, los cuales se apoyan sobre otros 16 bloques cúbicos del *primer piso.*

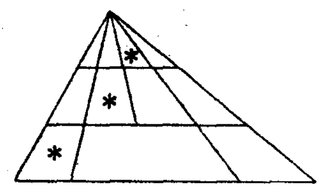
Luego, el número total de bloques cúbicos es: $\overbrace{16}^{2^\circ\text{ Piso}} + \overbrace{16}^{1^\circ\text{ Piso}} + \overbrace{6}^{\text{Bloque I}} = 38$

b. Ahora hay cubos formados por 8 bloques cúbicos simples, al contarlos tendremos 7.

Así, tenemos 38+7=45 cubos

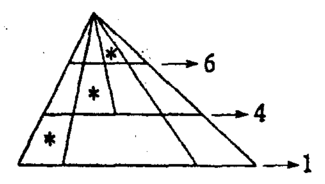
PROBLEMA 1

En la siguiente figura, ¿cuántos triángulos poseen en su interior sólo un asterisco?



Resolución:

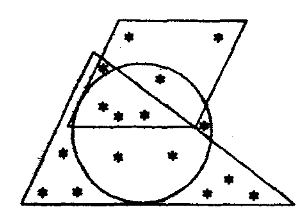
De acuerdo a la pregunta formulada, procedemos a contar los triángulos que poseen un asterisco en su interior.



$\therefore\ 6 + 4 + 1 = 11$

PROBLEMA 2

En la figura dada:

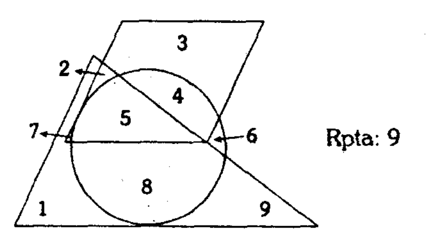


a. ¿Cuántas figuras simples hay?

b. ¿En cuántas figuras simples hay a lo más 2 asteriscos?

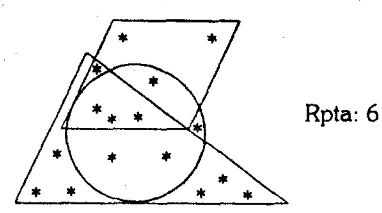
Resolución:

a. Nº de regiones simples:



Rpta: 9

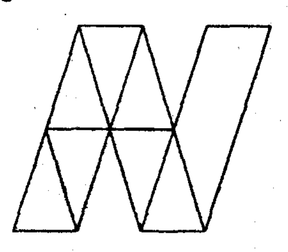
b. Nº de regiones simples que contengan a lo más 2 asteriscos (0 , 1 ó 2 asteriscos)



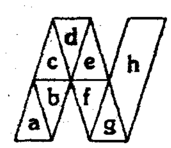
Rpta: 6

PROBLEMA 3

Calcule cuántos cuadriláteros se cuenta en la siguiente figura:



Resolución:



Contemos cuadriláteros:

De 1 letra: h 1

De 2 letras: ab, bc, cd, de, ef, fg, gh 7

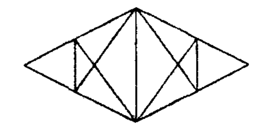
De 3 letras: abc, bcd, cde, def, efg 5

De 4 letras: abcd, defg 2

$\therefore$ Total de cuadriláteros: $1 + 7 + 5 + 2 = 15$

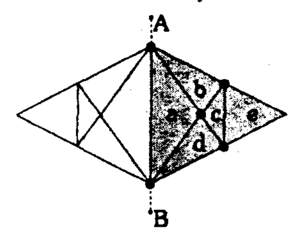
PROBLEMA 4

Calcule el número de triángulos.



Resolución:

La figura es simétrica con respecto al eje AB.



El segmento AB divide a la figura principal en 2 partes idénticas. Una al lado izquierdo y otra al lado derecho. Cuando esto le ocurre al segmento AB se le denomina **Eje de simetría** o también se dice que la figura es simétrica respectiva a dicho eje.

Aplicando el método combinatorio en la región sombreada:

Δs 1 figura simple: a, b, c, d, e =5

Δs 2 figuras simples: (a,b); (a,d); (b,c); (c,d)=4

Δs 3 figuras simples: (b,c,e); (e,c,d)=2

Δs 4 figuras simples: 0

Δs 5 figuras simples: (a,b,c,d,e)=1

$\therefore$ El número de triángulos será:

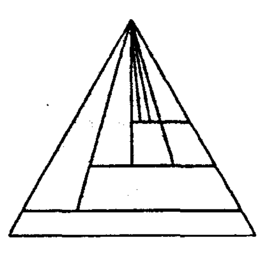
$$5+4+2+1=12$$

Por lo tanto, en la figura habrá:

$$2(12)=24 \text{ triángulos}$$

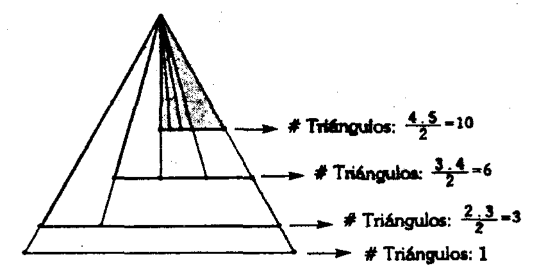
PROBLEMA 5

Calcule el número total de triángulos en:



Resolución:

Observe cómo se hace el conteo; línea por línea:

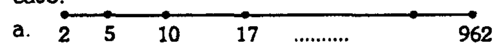


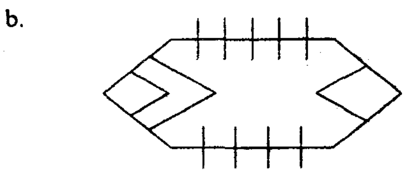
Luego, el número total de triángulos será:

$$10+6+3+1=20$$

PROBLEMA 6

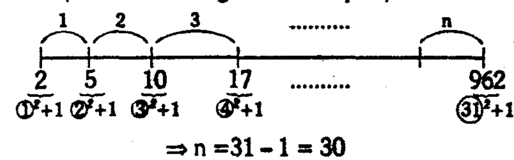
Calcule el número total de segmentos en cada caso:

a. 

b. 

Resolución:

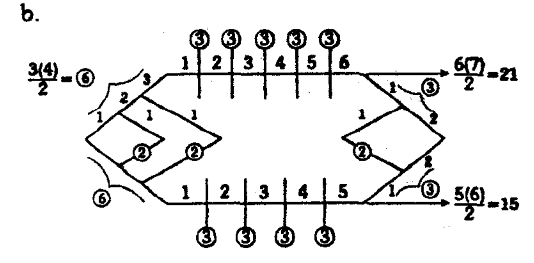
a. Observando la gráfica, notarás que hemos numerado los segmentos simples; por ello hallaremos, en primer lugar, el valor de n (cantidad de segmentos simples)



$$\Rightarrow n=31-1=30$$

$$\therefore \text{ N° de segmentos} = \frac{30(31)}{2} = 465$$

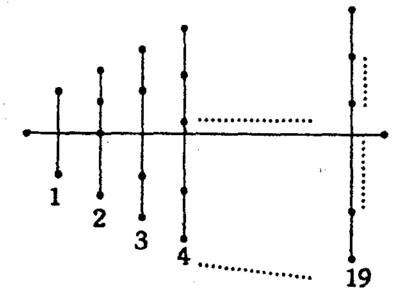
b.



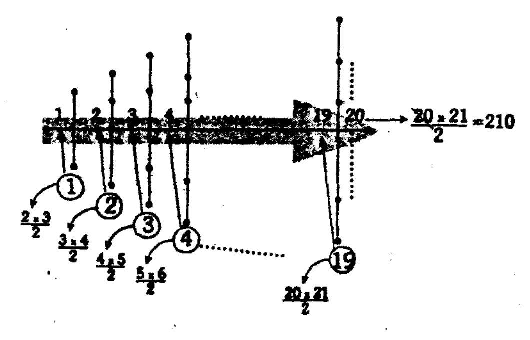
$\therefore$ Total: $2(6)+3(11)+3(2)+21+15=87$

PROBLEMA 7

Halle el número total de segmentos:



Resolución:



Luego:

El número de segmentos es:

$$210 + \frac{1}{2}\underbrace{(2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+20\times21)}_{\frac{20\times21\times22}{3}-1\times2}$$

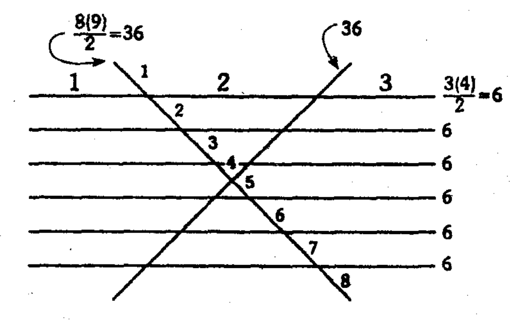
$$= 210 + \frac{1}{2}(3078) = 1749$$

PROBLEMA 8

¿Cuántos segmentos adicionales como mínimo deben ser trazados en la figura mostrada de modo que en total se cuente 108 segmentos?

Resolución:

Al trazar las líneas se debe originar un mayor número posible de segmentos. Tracemos de forma oblicua y secante.



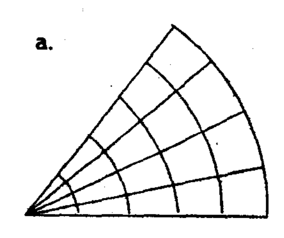
Número total de segmentos= 36+36+6(6)=108

$\therefore$ 2 segmentos adicionales

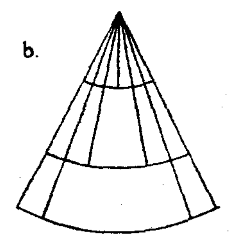
PROBLEMA 9

Calcule el número total de sectores circulares en cada caso:

a.

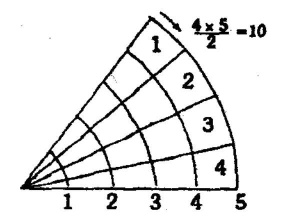


b.



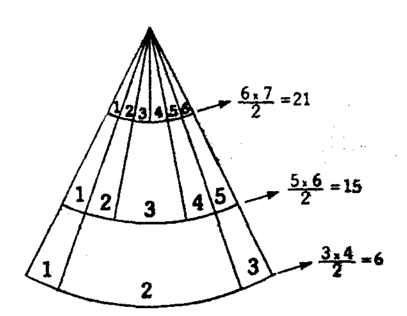
Resolución:

a.



$\therefore$ Número de sectores circulares $= 5\times10 = 50$

b.

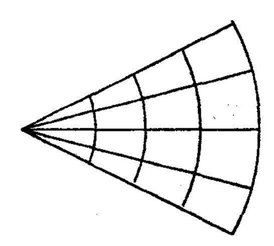


∴ Número de sectores circulares:

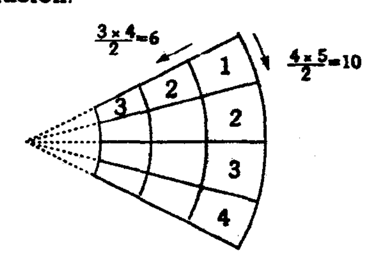
21+15+6=42

PROBLEMA 10

Halle el número total de trapecios circulares en:



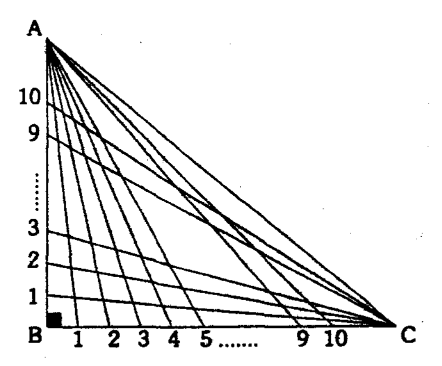
Resolución:



∴ Número de trapecios circulares: $6\times10=60$

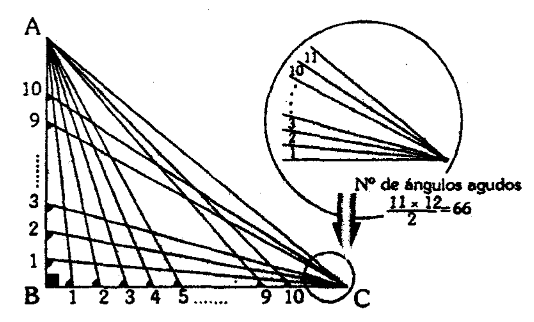
PROBLEMA 11

Halle el número total de ángulos agudos cuyos vértices se encuentran sobre los catetos del triángulo rectángulo.



Resolución:

Bastará con considerar los ángulos que están sobre el cateto BC y los ángulos en el vértice C para luego sumar dichas cantidades y finalmente duplicar el resultados (¿por qué?)



Si observamos la figura:

N° de ángulos agudos sobre un cateto (BC)=10

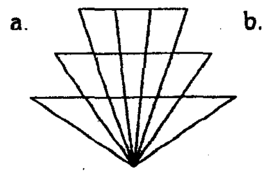
N° de ángulos agudos en un vértice (C) = 66

Por lo tanto, el número total de ángulos agudos es: 2(10) + 2(66) = 152

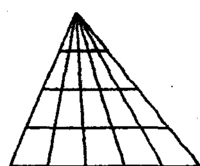
PROBLEMA 12

Determine el número total de triángulos en cada caso.

a.

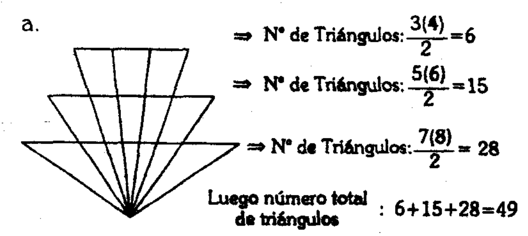


b.



Resolución:

a.



⇒ N° de Triángulos: $\frac{3(4)}{2}=6$

⇒ N° de Triángulos: $\frac{5(6)}{2}=15$

⇒ N° de Triángulos: $\frac{7(8)}{2}=28$

Luego número total de triángulos : 6+15+28=49

b.

⇒ N° de triángulos: $\frac{5(6)}{2}=15$

⇒ N° total de triángulos: $\frac{5(6)}{2}=15$

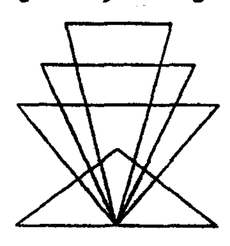
⇒ N° total de triángulos: $\frac{5(6)}{2}=15$

⇒ N° total de triángulos: $\frac{5(6)}{2}=15$

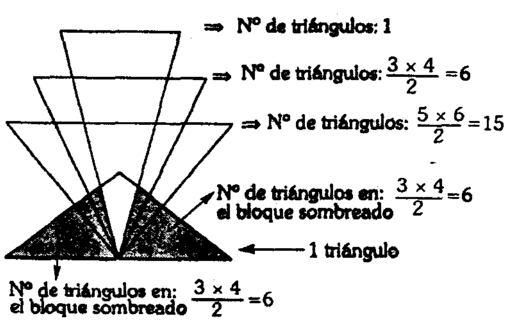
Luego número total de triángulos : 4 (15) = 60

PROBLEMA 13

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución:



⇒ N° de triángulos: 1

⇒ N° de triángulos: $\frac{3 \times 4}{2}=6$

⇒ N° de triángulos: $\frac{5 \times 6}{2}=15$

N° de triángulos en: el bloque sombreado $\frac{3 \times 4}{2}=6$

← 1 triángulo

N° de triángulos en: el bloque sombreado $\frac{3 \times 4}{2}=6$

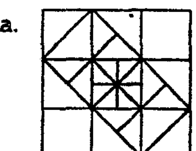
Luego, el número total de triángulos es:

$$1+6+15+6+6+1 = 35$$

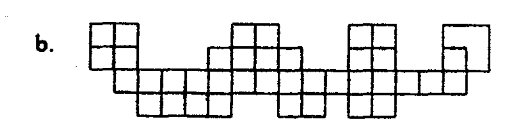
PROBLEMA 14

¿Cuántos cuadrados se cuenta en cada caso?

a.



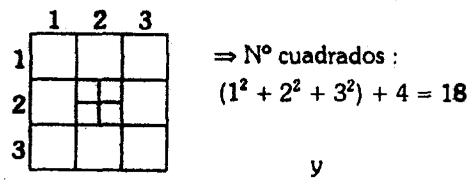
b.



Resolución:

a. Haremos el conteo en 2 etapas:

1° etapa:

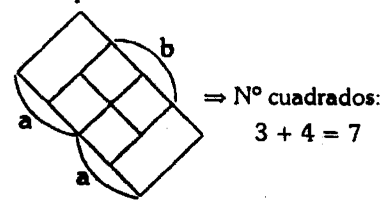


⇒ N° cuadrados :

$(1^2 + 2^2 + 3^2) + 4 = 18$

y

2° etapa:

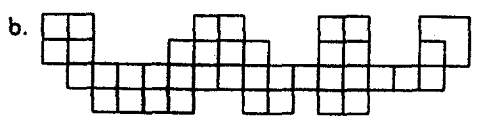


⇒ N° cuadrados:

3 + 4 = 7

∴ Total de cuadrados: 18 + 7 = 25

b.



Simples Compuestos

⇒ hay cuadrados de 2 tamaños: □ y ⊞

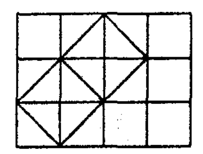
De □ = 38 De ⊞ = 13

∴ Total de cuadrados: 38 + 13 = 51

PROBLEMA 15

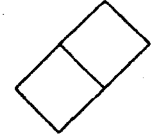
En la siguiente figura, indique el número total de cuadriláteros que no sean cuadrados.

Obs.: No consideres los trapecios.



Resolución:

1	2	3	4
2			
3			



$$\text{Total de cuadriláteros} = \left(\frac{4\times5}{2}\right)\times\left(\frac{3\times4}{2}\right)+3=60+3=63$$

Total de cuadrados:

$(4\times3+3\times2+2\times1)+2=20+2=22$

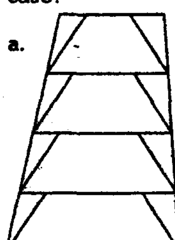
$\therefore$ Total de cuadriláteros que no son cuadrados:

$63-22=41$

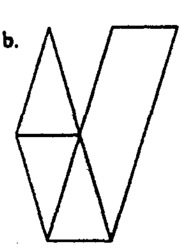
PROBLEMA 16

¿Cuántos cuadriláteros en total se observa en cada caso?

a.

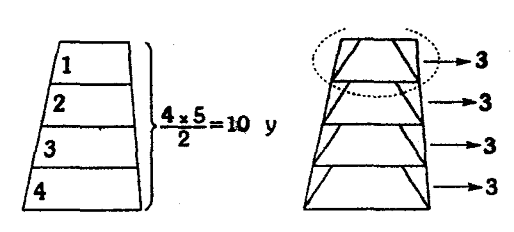


b.



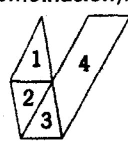
Resolución:

a. Contamos los cuadriláteros por partes:



$\therefore$ Total de cuadriláteros: $10+4(3)=22$

b. Enumeramos las figuras simples (conteo directo por combinación).



de 1 dígito: 4 $\Rightarrow$ 1

de 2 dígitos: 12; 23 ; 34 $\Rightarrow$ 3

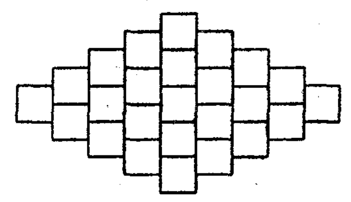
de 3 dígitos : 123 $\Rightarrow$ 1

de 4 dígitos : No hay $\Rightarrow$ 0

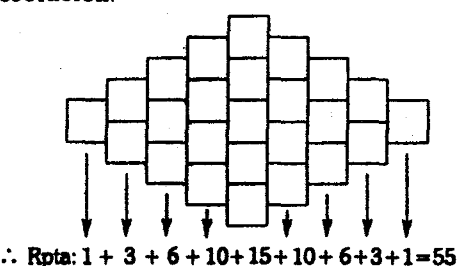
$\therefore$ Total de cuadriláteros 5

PROBLEMA 17

Calcule el número total de cuadriláteros:



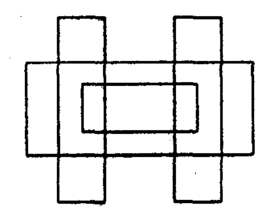
Resolución:



$\therefore$ **Rpta: 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 55**

PROBLEMA 19

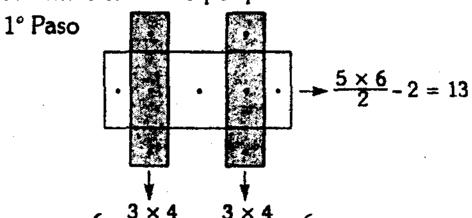
¿Cuántos cuadriláteros se observa en la siguiente figura?



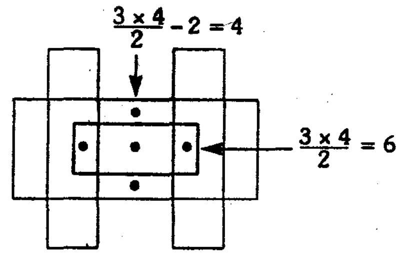
Resolución:

Haremos el conteo por partes.

1° Paso



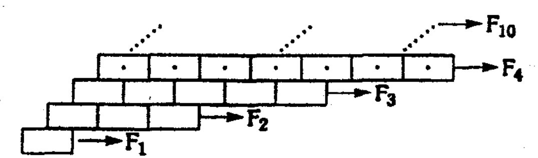
2° Paso (Agregamos lo que falta)



$\therefore$ 6+6+13+4+6 = 35

PROBLEMA 19

Calcule el número total de cuadriláteros que contengan como máximo dos regiones simples hasta la fila 10.



Resolución:

Se observa que se forma la siguiente sucesión:

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \ldots\ldots & F_{10} \\ 1; & 5; & 9; & 13 & \ldots\ldots & \bigcirc \end{matrix}$$

de la cual podemos obtener su término enésimo:

$$\boxed{F_n = 4n - 3}$$

y aplicamos aquí lo aprendido en series: la suma de los términos de una progresión aritmética conociendo su término enésimo.

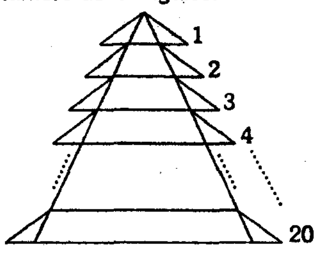
$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Número total de} \\ \text{cuadriláteros}\end{matrix} = 4\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - 3n$$

$$= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3(10) = 190$$

$\therefore$ N° de cuadriláteros = 190

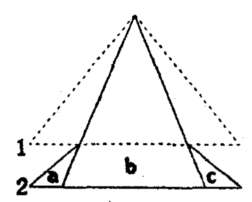
PROBLEMA 20

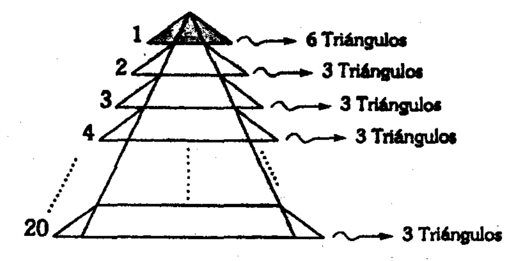
Halle el número de triángulos:



Resolución:

Observamos la parte superior de la figura, que hay 6 triángulos y a partir del piso 2, los triángulos son generados por las rectas horizontales. Por lo tanto:





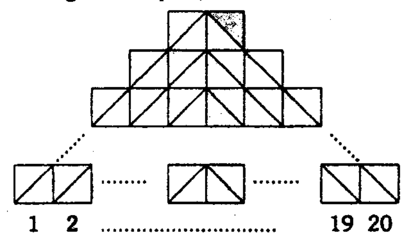
$$\text{N° de triángulos} = \underbrace{6 + 3 + 3 + 3 + \ldots + 3}_{20 \text{ sumandos}}$$

N° de triángulos = 6 + 3(19) = 63

$\therefore$ N° de triángulos = 63

PROBLEMA 21

En la siguiente figura, indique cuántos triángulos, como el sombreado, se puede contar en total. (Sólo triángulos simples)



Resolución:

Observamos en cada cuadrado pequeño(⧄ o ⧅) dos triángulos como el que se nos pide. Ahora, si hallamos el número de cuadrados pequeños, bastaría multiplicar por dos para hallar el número total de triángulos.

De la figura:

N° de cuadrados pequeños = 2 + 4 + 6 + ... + 20

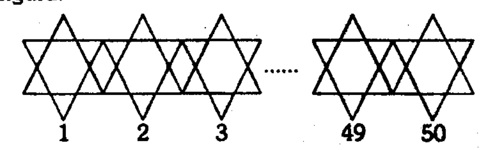
N° de cuadrados pequeños = 10 . 11 = 110

$\Rightarrow$ Número de triángulos = 2(110) = 220

$\therefore$ Número total de triángulos = 220

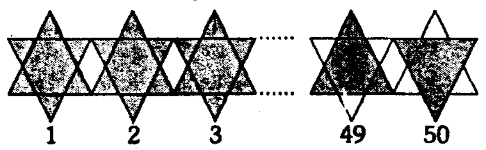
PROBLEMA 22

Indique cuántos triángulos existen en la siguiente figura.



Resolución:

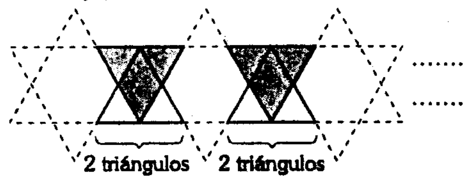
Observando la figura, nos damos cuenta de que una parte de ella se repite (**las estrellas de 6 puntas**). Ahora, según la numeración dada, notamos que hay 50 estrellas como las que se está resaltando en los 3 primeros lugares. Veamos:



Cada estrella presenta 8 triángulos, 6 triángulos pequeños (las puntas de las estrellas) y 2 triángulos grandes(uno apuntando hacia arriba y otro hacia abajo, como los mostrados en las estrellas 49 y 50).

Luego, el N° de triángulos: 50(8) = 400

Además, en cada intervalo (entre 2 estrellas), observamos 2 nuevos triángulos de tamaño mediano (uno apuntando hacia arriba y el otro, hacia abajo), así:



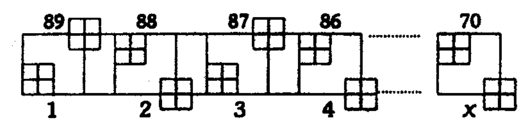
El N° de triángulos = 49(2) = 98

Finalmente: N° Δs = 400 + 98

$\therefore$ N° Δs= 498

PROBLEMA 23

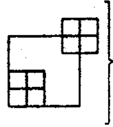
Halle el número total de cuadrados en:



Resolución:

Según el gráfico, se deduce que el valor de x es 20, porque la suma de los números de la parte superior e inferior es constante e igual a 90.

Entonces, con este resultado, podemos indicar que hay 20 cuadrados grandes. Además se observa una figura de la siguiente forma:



Aquí podemos contar 10 cuadrados, 8 pequeños y 2 medianos (nótese que no estamos contando el cuadrado mayor, porque ya fue considerado).

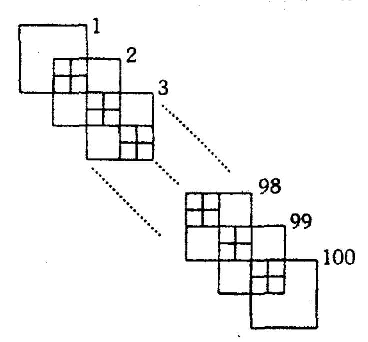
Luego:

Como hay 20 cuadrados grandes y además por cada cuadrado grande hay 10 cuadrados como los mencionados, entonces:

$\therefore$ N° total de cuadrados = 20+20(10) = 220

PROBLEMA 24

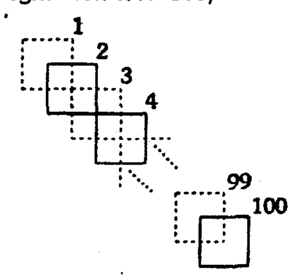
Indique el número total de cuadrados en:



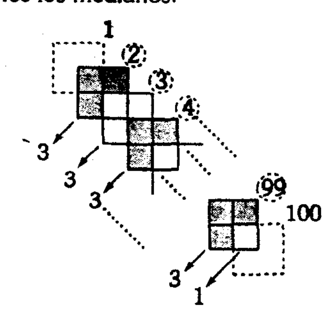
Resolución:

En la figura se aprecia cuadrados de tres tamaños (consideremos a éstos como grandes, medianos y pequeños).

En cada esquina de un cuadrado grande hay un número y también notamos que la numeración va desde el 1 hasta el 100; luego hay 100 cuadrados grandes (uno de ellos, por ejemplo, es el que está en línea negrita con el Nº 100)

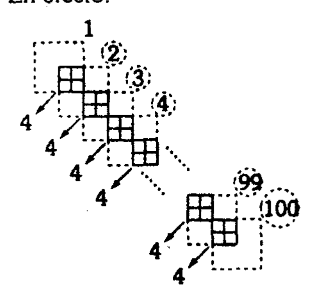


Por lo tanto, hay 100 cuadrados grandes. Ahora contemos los medianos:



Aquí hay 98(3)+1=295 cuadrados medianos.

El número de cuadrados pequeños es fácil calcular. En efecto:



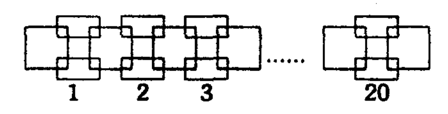
Aquí tenemos: 99(4)=396 cuadrados pequeños

Luego:

Nº total de cuadrados: 100+295+396=791

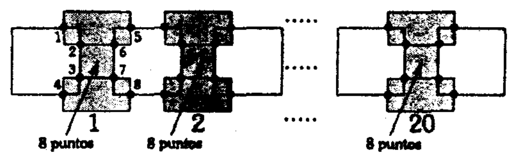
PROBLEMA 25

Halle el número total de puntos de intersección en:



Resolución:

Observa la figura y las secciones resaltadas.



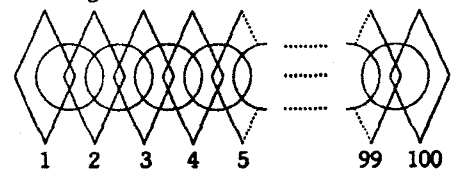
Se nota 8 puntos de intersección en cada sección resaltada, entonces habrá 20 veces ocho puntos de corte.

∴ El número de puntos de intersección es:

$$8(20) = 160$$

PROBLEMA 26

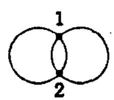
Calcule el número total de puntos de intersección entre las figuras dadas:



Resolución:

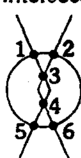
Observando la numeración dada en la figura, vemos que hay 100 rombos, y como entre 2 rombos hay una circunferencia, entonces concluimos que hay 99 circunferencias. Contaremos los puntos de intersección en dos etapas:

a. Como son 99 circunferencias, entonces hay 98 intersecciones de circunferencias con 2 puntos en cada intersección.



El número de puntos de intersección es: 2(98)=196

b. Considerando la intersección entre rombos y las que ocurren entre un rombo y una circunferencia, notamos que dentro de cada circunferencia, y sobre ellas, hay puntos de intersección.

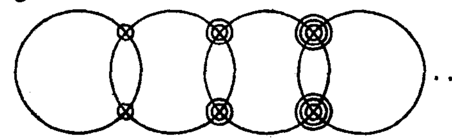


Luego: N° punto de intersección
6 (99) = 594

Finalmente, el número total de puntos de intersección es: 196+594=790

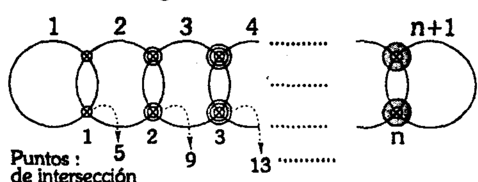
PROBLEMA 27

¿Cuántos puntos de intersección se genera si se llega a trazar 225 circunferencias?



Resolución:

Enumeramos la gráfica como se muestra:



Considerando el dato y la numeración realizada, se plantea lo siguiente:

$$N° \text{ circunferencias} = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + (n+1) = 225$$

simplificando y resolviendo para "n"

$$(n+1)^2 = 225 = 15^2 \Rightarrow n = 14$$

Esto indica que hay 15 circunferencias y 14 intersecciones. Por lo tanto, como los puntos de intersección aparecen en las intersecciones de las circunferencias, obtenemos:

$$\begin{matrix} N° \text{ puntos} \\ \text{de intersección} \end{matrix} = 2(\overbrace{5\underset{+4}{+}9\underset{+4}{+}13\underset{+4}{+}.....+t_n}^{14 \text{ sumandos}})$$

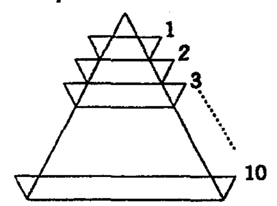
Aplicando lo aprendido en series, tendremos:

$$\begin{matrix} N° \text{puntos} \\ \text{de intersección} \end{matrix} : 2\left[\left(5 + \frac{13(4)}{2}\right)(14)\right]$$

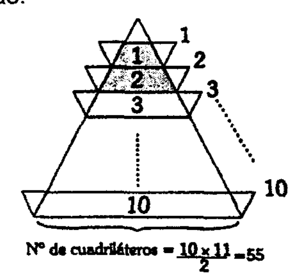
$$\therefore \begin{matrix} N° \text{ puntos} \\ \text{de intersección} \end{matrix} : 2\,(434) = 868$$

PROBLEMA 28

En la siguiente figura, indique cuántos cuadriláteros se puede contar en total.



Graficando:



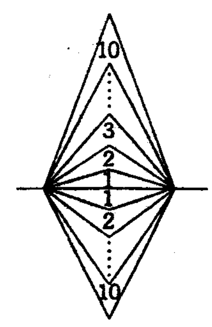
* Además:

El número de cuadriláteros en ▽▭▽ es 4, pero recuerda que el cuadrilátero central ya fue contado en la anterior fase; entonces sólo consideraremos 3 cuadriláteros.

∴ N° de cuadriláteros : 55 + 3(10) = 85

PROBLEMA 29

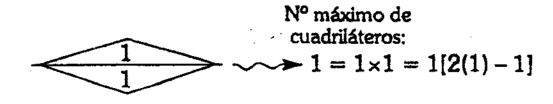
Indique cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura:

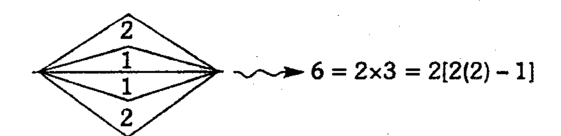


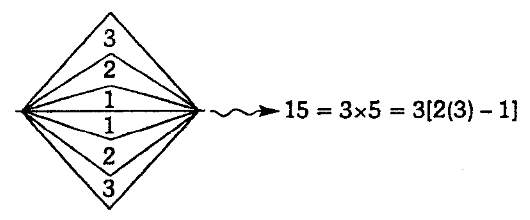
Resolución:

Por inducción:

N° máximo de cuadriláteros:







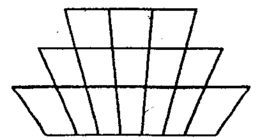
Por lo tanto:

Número de cuadriláteros: $10[2(10) - 1]$

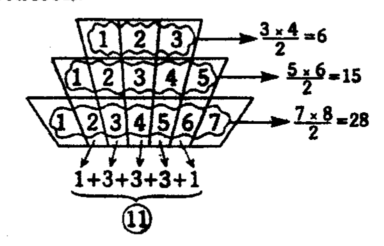
$= 10 \times 19 = 190$

PROBLEMA 30

¿Cuántos cuadriláteros hay en total en la siguiente figura?



Resolución:

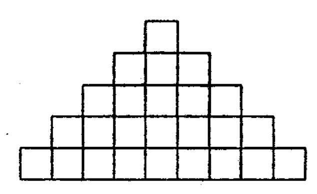


Por lo tanto:

∴ N° total de cuadriláteros: $11+6+15+28 = 60$

PROBLEMA 31

Halle el número de cuadrados:



Por simple inspección:

Pequeños : □ ⟶ 25

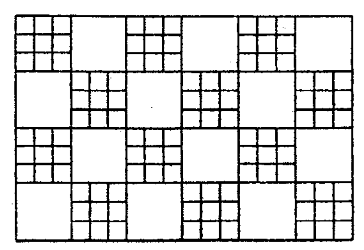
Medianos : ⊞ ⟶ 12

Grandes : ⟶ 4

∴ Número de cuadrados: $25+12+4 = 41$

PROBLEMA 32

En la siguiente figura, ¿cuántos cuadrados se puede contar?



Resolución:

Resolviendo por partes, primero contaremos los cuadrados indicados según la numeración sin considerar los cuadrados pequeños.

4					
3					
2					
1	2	3	4	5	6

$$4\times6+3\times5+2\times4+1\times3=50$$

Ahora, contemos los cuadrados pequeños.

1	2	3
2		
3		

$$1^2+2^2+3^2=14$$

$$\Rightarrow \# \text{ cuadrados} = 14-1=13$$

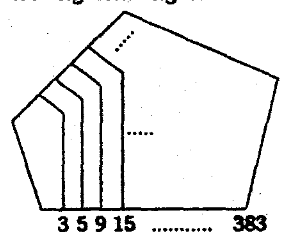
Pero le quitamos el más grande debido a que fue contado en la primera fase; además son 12 los cuadrados de este tipo:

$\Rightarrow$ N° de cuadrados pequeños = 12(13)

$\therefore$ N° total de cuadrados = 12(13) + 50 = 206

PROBLEMA 33

Calcule la diferencia entre el número total de exágonos y el número total de pentágonos existentes en la siguiente figura:



Resolución:

De la sucesión:

$$3, 5, 9, 15, ... 383$$

Calculando su término enésimo:

$$t_n = n^2 - n + 3$$

luego: $n^2 - n + 3 = 383$

$$\Rightarrow n = 20$$

De la figura, observamos que el número de pentágonos es igual a la cantidad de términos de la sucesión.

$$\Rightarrow \text{Número de pentágonos} = 20$$

Ahora, calculemos el número de exágonos.

De la figura, se observa que entre dos términos de la sucesión se origina un exágono simple; por lo tanto el número de exágonos simples es 19. Luego, aplicando el método inductivo tenemos:

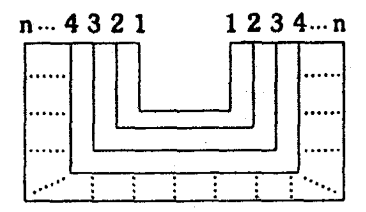
$$\begin{matrix}\text{Número total}\\ \text{de exágonos}\end{matrix} = \frac{19\times20}{2} = 190$$

Finalmente se nos pide:

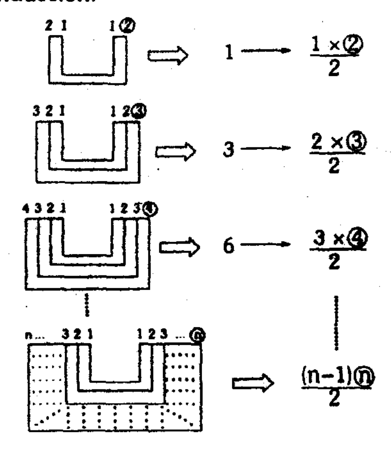
$\therefore$ 190 − 20 = 170

PROBLEMA 34

Halle el número total de octágonos en:



Por inducción:



$$1 \longrightarrow \frac{1\times2}{2}$$

$$3 \longrightarrow \frac{2\times3}{2}$$

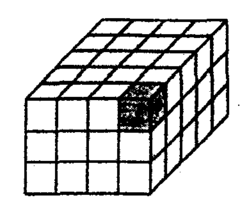
$$6 \longrightarrow \frac{3\times4}{2}$$

$$\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\therefore \text{N° de octágonos} = \frac{n(n-1)}{2}$$

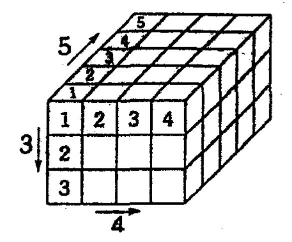
PROBLEMA 35

Halle:



a. El número de cubos como el sombreado
b. El número total de cubos
c. El número de paralelepípedos
d. El número de paralelepípedos que no son cubos.

Resolución:



De la figura, observamos:

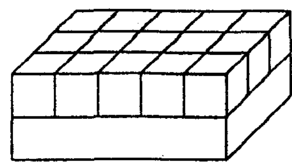
a. Número de cubitos: $3\times4\times5 = 60$ cubitos como el sombreado.
b. Número Total:
$3\times4\times5+2\times3\times4+1\times2\times3 = 90$ cubos
c. Número de paralelepípedos:
$$\left[\frac{3\times4}{2}\right]\times\left[\frac{4\times5}{2}\right]\times\left[\frac{5\times6}{2}\right] = 900$$
d. Por simple diferencia se tiene:

$$\text{N° paralelepípedos que no son cubos} = \text{N° paralelepípedos} - \text{N° cubos}$$

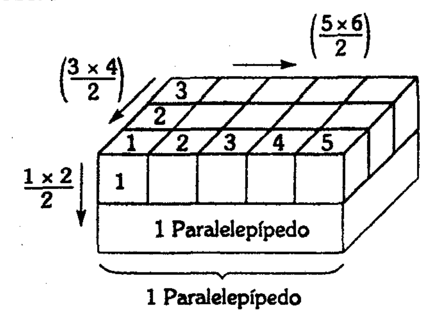
$$\text{N° paralelepípedos que no son cubos} = 900-90 = 810$$

PROBLEMA 36

Halle el número de paralelepípedos que no son cubos.



Resolución:



$$\text{N° paralelípedos}: \left[\frac{1\times2}{2}\right]\times\left[\frac{5\times6}{2}\right]\times\left[\frac{3\times4}{2}\right] = 90$$

En total: $90 + 2 = 92$ paralelepípedos

N° cubos: $1\times3\times5 = 15$

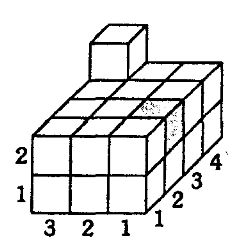
N° paralelepípedos que no son cubos:

$\therefore\ 92-15 = 77$

PROBLEMA 37

Dada la siguiente figura:

a. ¿Cuántos cubos hay?
b. ¿Cuántos paralelípedos que no son cubos hay?
c. ¿Cuántos cubitos están en contacto con el cubito sombreado?



Resolución:

a. N° cubos: $2\times3\times4+1\times2\times3 = 30$
(de forma análoga a lo anterior)
Pero observamos que hay un cubo en la parte superior:
$\therefore$ En total hay $30+1 = 31$ cubos
b. Total de paralelepípedos:
$$\left[\frac{2\times3}{2}\right]\times\left[\frac{3\times4}{2}\right]\times\left[\frac{4\times5}{2}\right] = 180$$

Nos falta los paralelepípedos que se forman con el cubito que está encima, con él se forman 3 paralelepípedos más:

Luego en total: $180+3=183$

Además, recordemos que el N° de cubos es 31; por lo tanto el N° de paralelepípedos que no son cubos es:

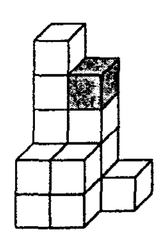
$$183-31=152$$

c. Por simple inspección, en la parte superior, hay 5 cubos y en la parte inferior hay 6 cubos; luego en total hay $5+6=11$ **cubos**.

PROBLEMA 38

a. ¿Cuántos cubos se cuenta en total?

b. ¿Cuántos cubitos están en contacto con el cubito ubicado inmediatamente debajo del cubito sombreado?



a. Por inspección directa se cuenta 14 cubos simples y un cubo conformado por ocho cubitos simples.

Entonces, el N° total de cubos: $14+1=15$

b. Ahora contaremos los cubos que están en contacto con el cubo indicado.

Número de contactos entre caras: 3

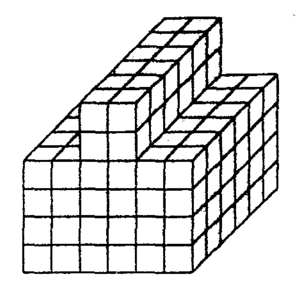
Número de contactos entre aristas: 3

Número de contactos entre esquinas: 1

∴ Número total de contactos: 7

PROBLEMA 39

¿Cuántos cubitos como mínimo debe agregarse para formar un cubo compacto?



Resolución:

Si completamos el cubo con respecto a la arista mayor del sólido, tendríamos:

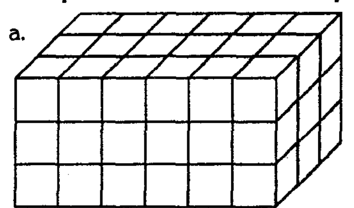
$6^3=216$ cubos simples; luego restando aquellos que ya existen, obtendríamos los que nos faltan:

$\therefore\quad 6^3-(6\times6\times4+2\times2\times6)=48$

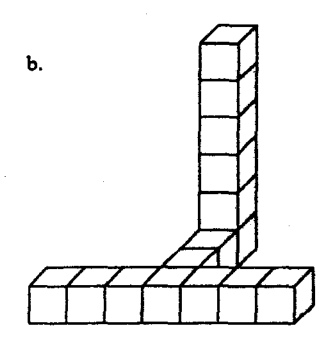
PROBLEMA 40

¿Cuántos cubitos como mínimo se debe agregar en cada caso para obtener un cubo compacto?

a.



b.



Resolución:

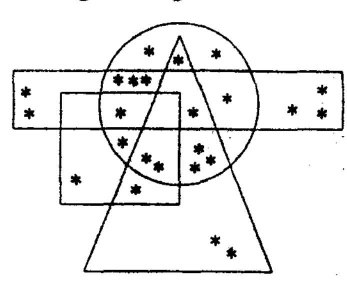
Para obtener un cubo compacto debemos completar los lados menores hasta igualar el lado mayor. Luego tenemos:

a) $6^3-6\times3\times3=162$

b) $7^3-15=328$

Problemas Propuestos

1. Dada la siguiente figura:



Encuentre:

a. ¿Cuántas regiones simples tiene?

b. ¿Cuántas figuras geométricas básicas se han tomado en consideración para construirla?

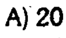
c. ¿Cuántos asteriscos hay en total?

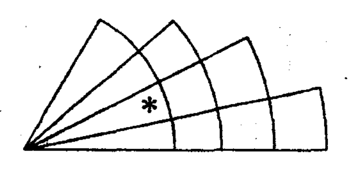
d. ¿En cuántas regiones simples no hay más de un asterisco?

e. ¿Cuántos asteriscos se encuentra dentro del rectángulo y fuera del triángulo pero en el interior del cuadrado?

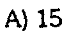
A) 16 – 5 – 24 – 10 – 1
B) 17 – 4 – 24 – 10 – 1
C) 16 – 5 – 24 – 10 – 1
D) 16 – 4 – 24 – 10 – 1
E) 16 – 4 – 24 – 11 – 2

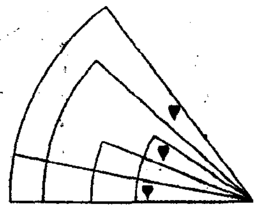
2. ¿Cuántos sectores circulares presentan en su interior al asterisco?

A) 20

B) 16
C) 14
D) 12
E) 8



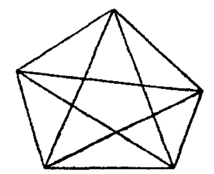
3. ¿Cuántos sectores circulares contienen a lo más 2 corazones en su interior?


A) 15
B) 14
C) 13
D) 11
E) 10

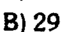
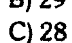
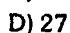


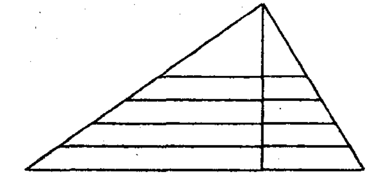
4. Halle el número total de triángulos.

A) 40
B) 37
C) 35
D) 32
E) 34



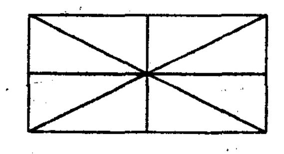
5. Halle el número total de cuadriláteros.

A) 30

B) 29

C) 28

D) 27
E) 26



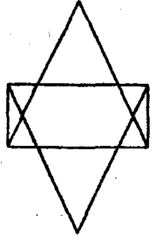
6. Halle el número total de cuadriláteros.

A) 16
B) 18
C) 17
D) 9
E) 10



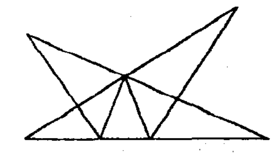
7. Calcule la cantidad total de triángulos en la figura.

A) 11
B) 10
C) 12
D) 8
E) 6



8. Calcule la cantidad total de hexágonos en la figura.

A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 1



9. Calcule la cantidad total de hexágonos en la figura.

A) 12
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5

10. Halle el número total de triángulos.

A) 15
B) 16
C) 14
D) 20
E) 28

11. Halle el número total de triángulos.

A) 32
B) 10
C) 12
D) 25
E) 19

12. Halle el número total de triángulos.

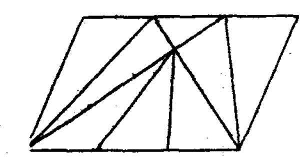
A) 16
B) 26
C) 32
D) 8
E) 40

13. Halle el número total de triángulos.

A) 44
B)36
C) 38
D) 40
E) 42

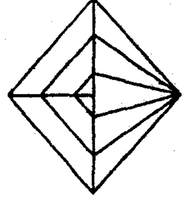
14. Halle el número total de triángulos.

A) 17
B) 20
C) 22
D) 16
E) 14



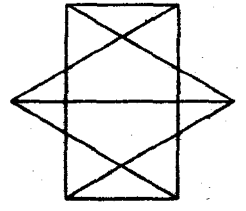
15. Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.

A) 9
B) 7
C) 8
D) 6
E) 5



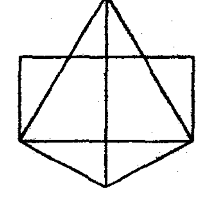
16. Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.

A) 14
B) 13
C) 10
D) 15
E) 20



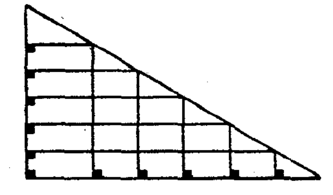
17. Calcule el número total de cuadriláteros en la figura.

A) 10
B) 12
C) 11
D)13
E) 14

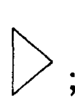
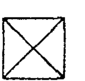
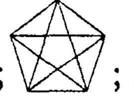


18. ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura?

A) 168
B) 153
C) 133
D) 127
E) 116



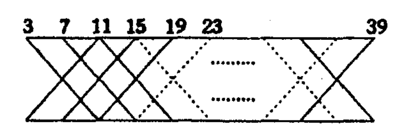
19. Calcule hasta S_{20} sabiendo que S_n es igual al número máximo de segmentos en figuras geométricas regulares.

 ;  ;  ; ....

$S_1 = 3$ $S_2 = 10$ $S_3 = \ldots$ $S_4 = \ldots$

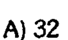
A) 42810 B) 43672 C) 44732
D) 43912 E) 43812

20. ¿Cuántos segmentos en total hay en la figura?

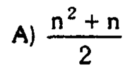


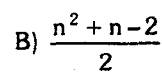
A) 96 B) 234 C) 141
D) 128 E) 106

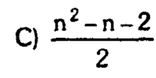
21. ¿Cuántas diagonales se puede trazar en los cuadriláteros existentes de la siguiente figura?


A) 32
B) 64
C) 128
D) 180
E) 168

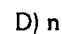
22. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?


A) $\dfrac{n^2+n}{2}$

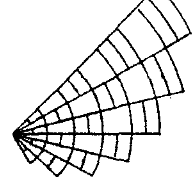

B) $\dfrac{n^2+n-2}{2}$


C) $\dfrac{n^2-n-2}{2}$

D) n

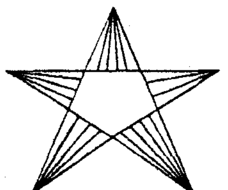

E) $n + n^2$

23. En la figura, halle el número de sectores circulares.



A) 258
B) 364
C) 216
D) 72
E) 100

24. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?

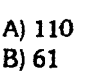


A) 56
B) 26
C) 61
D) 52
E) 36

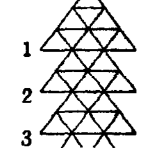
25. Se ubica sobre un plano 4 puntos no colineales de tal modo que, al unirlos 2 a 2 mediante líneas rectas, se forman la mayor cantidad posible de triángulos. Indique dicha cantidad.

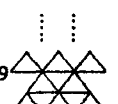
A) 4 B) 6 C) 8
D) 7 E) 5

26. ¿Cuántos triángulos se cuenta en la siguiente figura?


A) 110
B) 61
C) 55
D) 195
E) 175

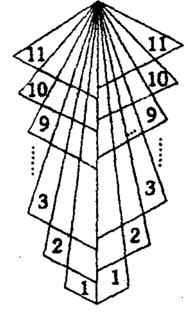
27. En la figura mostrada, ¿cuántos triángulos se puede contar en total?





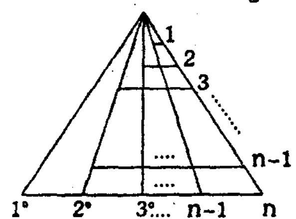
A) 260
B) 261
C) 270
D) 263
E) 265

28. En la figura, halle el número total de triángulos.



A) 488
B) 476
C) 582
D) 572
E) 518

29. Calcule el número total de triángulos.



A) n^2+n+1 B) $\frac{n(n+1)}{2}$

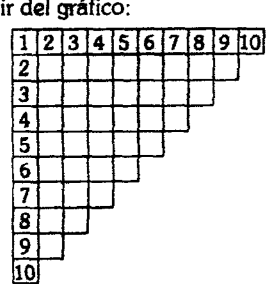
C) $n(n+1)$

D) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ E) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

30. ¿Cuántos semicírculos hay en total?

A) 16
B) 24
C) 32
D) 64
E) 48

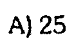
31. A partir del gráfico:

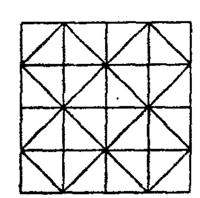


Calcule el número de cuadrados.

A) 95 B) 111 C) 91
D) 110 E) 90

32. Calcule el número total de cuadrados.



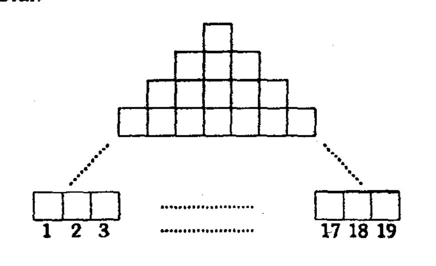


A) 25
B) 22
C) 30
D) 35
E) 36

33. ¿Cuántos cuadrados en total hay en la siguiente figura?

A) 120
B) 100
C) 110
D) 90
E) 125

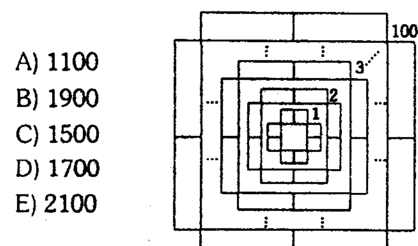
34. Si la figura está formada por cuadraditos iguales, ¿cuántos cuadrados se contarán en total?



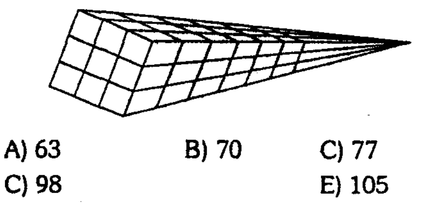
A) 403 B) 274 C) 350
D) 324 E) 460

35. Halle el número total de cuadriláteros en:

A) 1100
B) 1900
C) 1500
D) 1700
E) 2100

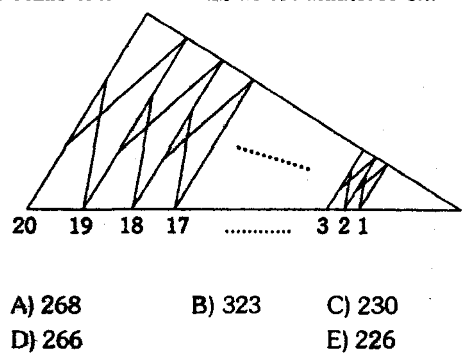


36. ¿Cuántas pirámides de base cuadrada hay en el sólido mostrado?



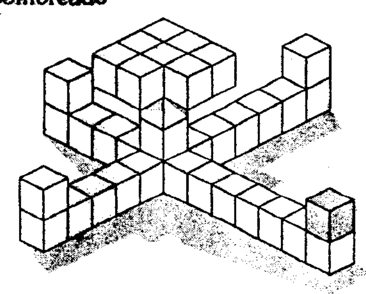
A) 63 B) 70 C) 77
C) 98 E) 105

37. Halle el número total de cuadriláteros en:



A) 268 B) 323 C) 230
D) 266 E) 226

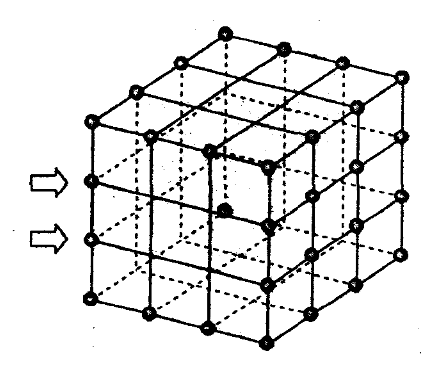
38. La estructura mostrada ha sido construida con bloques cúbicos de yeso como el sombreado



a. ¿Cuántos bloques cúbicos están en contacto directo con el piso?
b. ¿Cuántos bloques cúbicos se han utilizado en la construcción de la escultura?

A) 23 – 37 B) 25 – 37 C) 25 – 36
D) 24 – 37 E) 23 – 36

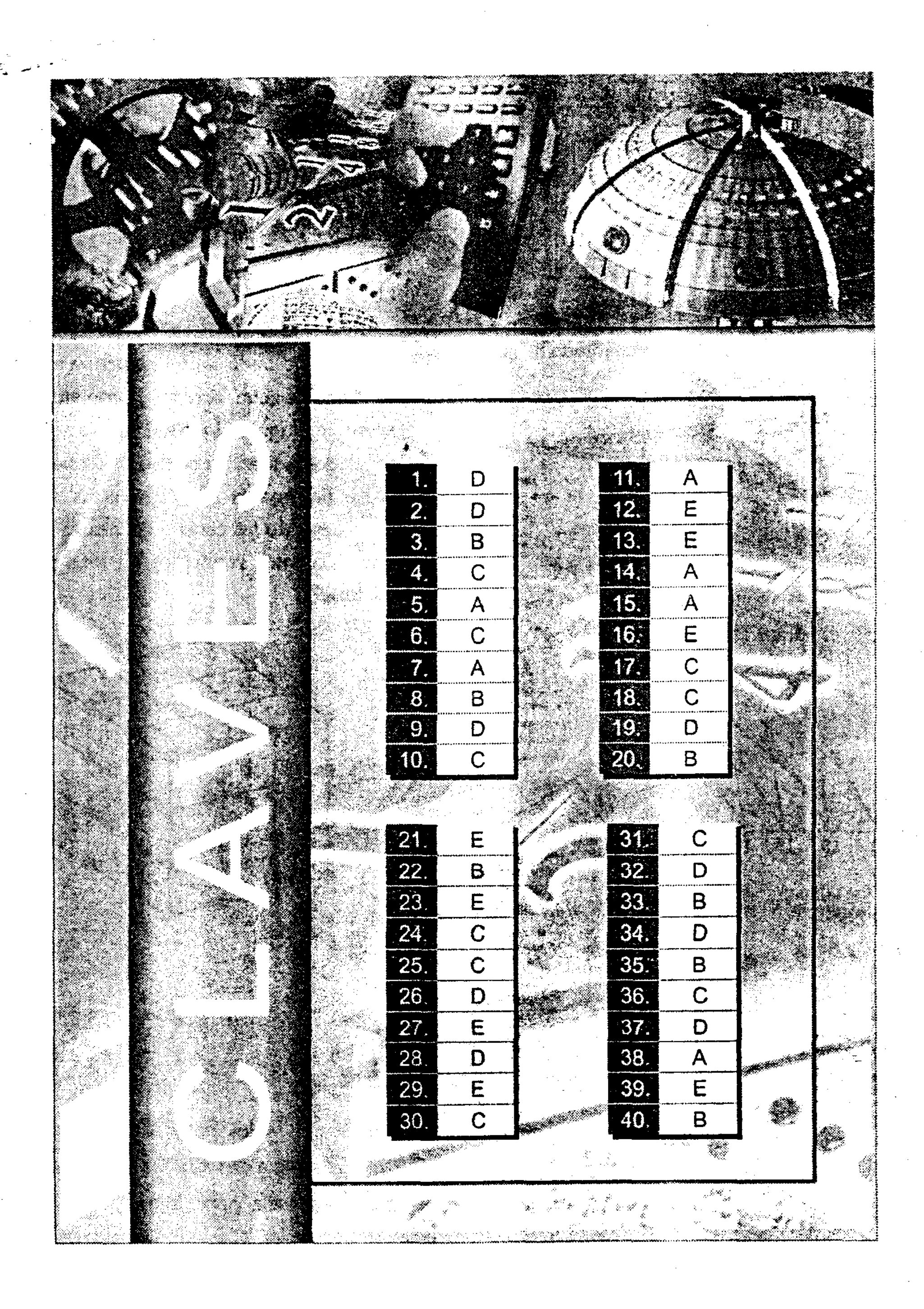
39. La figura mostrada es una estructura metálica en forma de cubo, construida con varillas de acero de igual longitud y los puntos señalados indican los puntos de soldadura de la varilla que la une con otras varillas. Considerando las caras y las aristas de este *cubo*, ¿cuántos segmentos en total pueden contarse?



A) 288 B) 256 C) 236
D) 206 E) 216

40. Considerando los datos del problema 19, calcule la suma de todos los segmentos hasta S_{20} (sugerencia: aplica series).

A) 201144 B) 202144 C) 201036
D) 212441 E) 202336



1.	D	11.	A	21.	E	31.	C
2.	D	12.	E	22.	B	32.	D
3.	B	13.	E	23.	E	33.	B
4.	C	14.	A	24.	C	34.	D
5.	A	15.	A	25.	C	35.	B
6.	C	16.	E	26.	D	36.	C
7.	A	17.	C	27.	E	37.	D
8.	B	18.	C	28.	D	38.	A
9.	D	19.	D	29.	E	39.	E
10.	C	20.	B	30.	C	40.	B

Tartaglia y Cardano: Sobre la Ecuación de Tercer Grado (Parte 2)

La vida de Niccolo Tartaglia (1 499 – 1 557) fue muy difícil. Nacido en Brescia, quedó huérfano de padre a los seis años y fue criado, con sus tres hermanos, por una madre devota paupérrima.

A los 14 años, en el saqueo de Brescia por las tropas francesas, se refugió en la Catedral pero, allí mismo, fue herido seriamente en el rostro por golpes de sable que le dejaron desfigurado y, por largo tiempo, casi sin poder hablar. Esto le valió el apodo de Tartaglia (el tartamudo), que posteriormente asumió como sobrenombre. Superó todas las dificultades y consiguió llegar al límite del conocimiento de la época en matemática, mecánica, artillería y agrimensura. Descubrió la ley de formación de los coeficientes de $(x+a)^n$ y fue autor de algunos descubrimientos sobre tiro y fortificaciones. Por esta causa, soñaba con obtener recompensa del comandante militar de Milán. Éste fue el señuelo usado por Cardano para atraerlo.

Girolamo Cardano (1 501 – 1 576) era un personaje rico en facetas contradictorias y en talentos variados. Era médico, astrónomo, astrólogo, matemático, filósofo, jugador inveterado e investigador incansable, cuya curiosidad de interés por todos los tipos de conocimiento no tenían límites. Había conseguido mejorar varios asuntos tratados por Pacioli, y Cardano pretendía publicar un libro de Álgebra, ayudado por su brillante y fiel discípulo Ludovico Ferrari.

Después de la visita de Tartaglia, Cardano, con algún esfuerzo, consiguió demostrar la validez de la regla para resolver la ecuación $x^3+px = q$. En aquella época, no se acostumbraba concentrar los términos de una ecuación en el primer miembro y dejar sólo cero después del signo de igualdad. Ni se percibía que una ecuación sin el término x^2 era lo mismo que tener el mismo término con coeficiente cero.

Cardano mostró que la sustitución $x = y-a/2$ permite eliminar el término en x^2 de la ecuación $x^3+ax^2+bx+c = 0$ y, en total, dedujo las fórmulas para resolver trece tipos de ecuaciones de tercer grado. Evidentemente, hoy esas fórmulas se reducirían a una única. Pero es necesario observar que en aquel tiempo todas las ecuaciones eran numéricas. (El uso de letras para representar números en Álgebra tuvo inicio con Francois Viete, en 1 591). Luego, en rigor, no había fórmulas y sí, recetas

o reglas, explicadas con ejemplos numéricos, una regla para $x^3+px = q$, otra para $x^3+px^2 = q$, etc.

Los estudios de Cardano, hechos con la colaboración de Ferrari, quien obtuvo una solución por radicales de la ecuación de cuarto grado, condujeron a importantes avances en la teoría de ecuaciones, como el reconocimiento de raíces múltiples en varios casos, relaciones entre coeficientes y raíces, y la aceptación de raíces negativas, irracionales e imaginarias. (Por estos dos últimos nombres se puede percibir la mala voluntad secular para considerarlas). Cardano nunca enunció explícitamente que una ecuación cualquiera de tercer grado debe tener tres raíces y una de cuarto grado cuatro raíces. Esto fue hecho, después, por Bombelli. Todos esos progresos eran razones más que suficientes para la publicación de un libro sobre el asunto. Pero él estuvo impedido de hacerlo en virtud de su juramento a Tartaglia.

El 1542, entretanto, Cardano y Ferrari visitaron Bolonia y allí obtuvieron permiso de Della Nave para examinar los manuscritos dejados por Ferro, entre los cuales estaba la solución de la ecuación $x^3+px = q$. El juramento de Cardano le prohibía publicar la solución de Tartaglia, pero no la de Ferro, obtenida mucho antes. Por eso, él se consideró eximido de cualquier compromiso y se volcó, con energía, a la preparación de su gran libro **Ars Magna**, *que fue publicado en 1 545. La aparición de esa notable obra fue recibida favorablemente por los entendidos pero produjo una reacción bastante desfavorable de Tartaglia.*

En efecto, en el año siguiente (1 546) Tartaglia publica los **Quesiti e Inventioni Diverse** *en donde él, además de presentar soluciones para varios problemas que le fueron propuestos, describe hechos autobiográficos y cuenta la historia de sus relaciones con Cardano, a quien ataca ásperamente por romper un juramento solemne.*

En las situaciones de controversia, casi siempre sucede que cada una de las partes tiene razón en algunos puntos y no la tiene en otros. Ya vimos las razones de Cardano. Las razones de Tartaglia las comprueba la Historia. Por muchos siglos, la fórmula de la ecuación de tercer grado fue conocida como "fórmula de Cardano", por haber sido publicada por primera vez en **Ars Magna**, *por mucho que Cardano haya dicho que la fórmula fue descubierta por Ferro y redescubierta por Tartaglia. Tartaglia regresó a Venecia, donde murió humilde y oscuro nueve años después.*

Episodios de la Historia Antigua
de la Matemática. Cap. I
A. AABOE

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA

La matemática, de un modo general es fundamentalmente la ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas.

Félix Klein

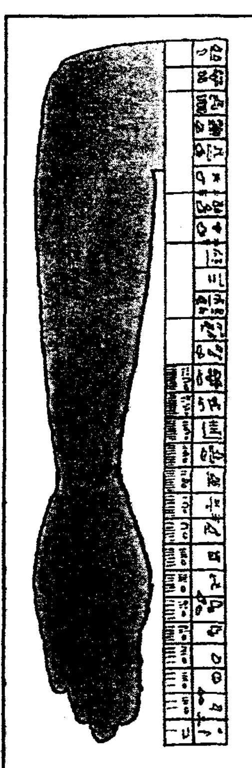
Lectura 16

Igualar las medidas

Hace mucho tiempo, el hombre usaba las cosas que tenía a su alcance para medir. Se medía con el brazo, con la mano e incluso con el pie. Pero esto tenía un problema. Algunas personas tienen los brazos más largos que otras. Otras tienen los pies más grande, o las manos más anchas. La gente no tardó en darse cuenta de que necesitaba un tipo de medida que fuera siempre la misma: una medida estándar para la longitud y el peso. Por ejemplo, tenía una medida de longitud midiendo un brazo (el del faraón, probablemente), desde el codo hasta la punta del dedo medio.

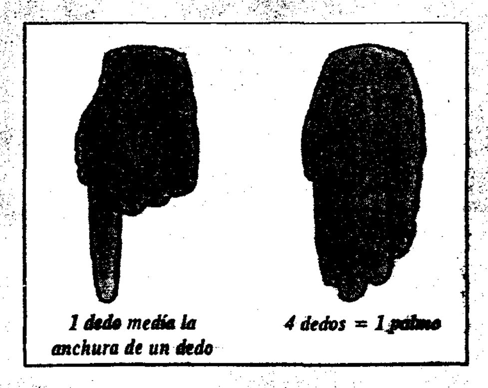
Luego labraron una barra de granito negro de exáctamente la misma longitud. Esta barra se convirtió en el codo oficial, y luego se construyeron codos de madera que todo el mundo pudiera usarlos.

Hará unos 6,000 años, los egipcios poseían una unidad estándar llamada beqa. Una beqa pesaba aproximadamente lo mismo que 256 granos de trigo. Las pesas reales eran de piedra tallada y pulida. El peso más pequeño descubierto corresponde 1/16 de beqa, o 16 granos de trigo.



7 palmos = 1 codo

El codo era la medida estándar de longitud de los egipcios, y correspondía a la longitud desde el codo de un brazo hasta la punta del dedo más largo.



1 dedo medía la anchura de un dedo

4 dedos = 1 palmo

Fuente: El mundo de los niños, Tomo X

INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA

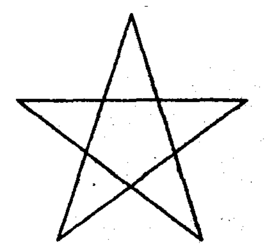
Objetivos

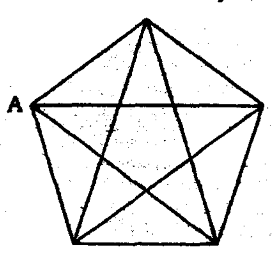
1. *Comprender los conceptos de Topología y sus aplicaciones.*
2. *Conocer las nociones básicas sobre recorridos eulerianos.*
3. *Sentar las bases para un estudio de la Topología a nivel superior.*

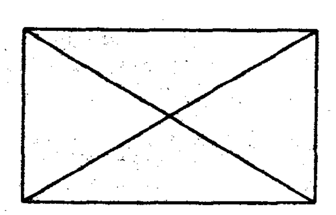
Introducción

*En la historia de la magia y de la superstición, el **Pentáculo** (la estrella de 5 puntas) ha desempeñado un papel importante como "talismán" contra todas las formas de desgracia. Conocida por los mahometanos y los hindúes, los pitagóricos y los cabalistas, se la grababa frecuentemente en las cunas de los niños para ahuyentar el mal mientras que, en países más prácticos, se la pintaba en los establos. Es posible recorrer esta estrella, volviendo al punto de partida, con un solo trazo de lápiz.*

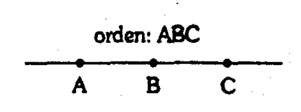
El pentágono mostrado (mucho más complicado en apariencia), puede ser realizado de un solo trazo de varias maneras. Una de ellas, por ejemplo, partiendo del punto "A" y el recorrido se logra pasando sucesivamente por los lados del pentágono y dibujando luego la estrella, mientras que la última de las figuras no puede ser realizada de un solo trazo. ¿Por qué?

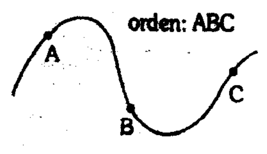


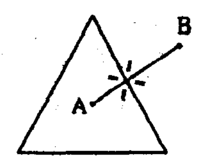




Consideremos lo siguiente: sobre una línea recta señalamos los puntos A, B y C, en ese orden; luego deformamos dicha línea, como se muestra en el gráfico:



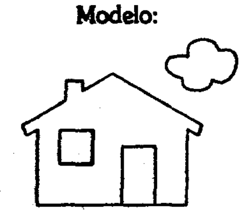




El hecho de que el punto B esté comprendido entre los puntos A y C es tan importante como el que la línea que los contiene, sea recta o curva o posea cierta longitud. Si tomamos un punto A en el interior de un triángulo y un punto B exterior a él, entonces la línea que determino (no importa como ha sido trazado) corta un lado del triángulo en algún punto (estamos trabajando evidentemente en el plano); hecho tan importante como que sus ángulos interiores suman 180°.

*Supongamos ahora que **pedimos** a un niño que reproduzca mediante un dibujo la figura mostrada abajo a la izquierda (la casa con la nube), de hecho alterará algunas proporciones y reemplazará las líneas rectas por líneas más o menos sinuosas; no malintencionadamente, sino porque aún le falta destreza en la manipulación del lápiz. **La figura siguiente reproduce el dibujo auténtico de un niño que ha copiado de un** modelo. Veamos:*

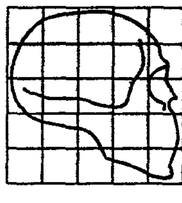
Modelo:



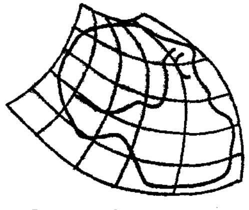
Dibujo del niño

*Es evidente que entre el dibujo del niño y el modelo no hay igualdad, y, sin embargo, el pequeño artista ha llevado a cabo instintivamente una **"transformación topológica"** al hacer corresponder líneas cerradas, manteniendo "dentro" la puerta y la ventana y dejando "fuera" la nube. Se ha querido reproducir este ejemplo tomado de la realidad para intentar aclarar una hipótesis: **"Los primeros esquemas geométricos que se forman en la mente son de naturaleza topológica"**.*

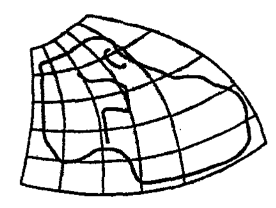
A continuación reproducimos tres dibujos que reúnen los extraordinarios descubrimientos del científico D'Arcy Thompson; transformaciones particulares de los retículos cambian un cráneo humano en el de un chimpancé y el de un babuino (hágase los dibujos sobre una lámina de material elástico y sométase la hoja a estirones y curvaturas adecuadas). La tesis, el hombre tiene un origen común con los simios, tan discutida por los estudiosos de la evolución de los seres vivos, encuentra en las transformaciones geométricas una confirmación "válida".



Cráneo humano



Cráneo de chimpancé



Cráneo de babuino

Los matemáticos han creado una disciplina dedicada al análisis de cómo las líneas, superficies y volúmenes se unen consigo mismos y con otros. Y la han denominado Topología. Un topólogo no está interesado en la información geométrica detallada tal como cuán grande puede ser un objeto, las medidas de sus ángulos o los bultos de un determinado tamaño que pueda tener, sino en cuestiones de si una superficie bidimensional es infinita o cerrada como un globo, o si una cuerda tiene nudos o no, o si el objeto es sometido a deformaciones como dilataciones, estiramientos, o compresiones que los transforman, a veces, radicalmente.

RECORRIDOS EULERIANOS (Figuras de un solo trazo)

¿Cuál es el proceso histórico de los recorridos eulerianos?

En una época ya pasada, siete puentes atravesaban el sinuoso curso del río Pregel en su paso a través de la pequeña ciudad alemana de Konigsberg, hoy Kaliningrado. Cuatro de ellos unían las orillas opuestas con la pequeña isla de Kneiphof. Un puente comunicaba Kneipohof con otra isla y los dos restantes unían a ésta con tierra firme. Estos siete puentes del siglo XVIII proporcionaron el material par uno de los más célebres problemas de las matemáticas.

PROBLEMA

En Konigsberg (Pomerania) hay una isla llamada Kneiphof.

El río que la rodea se divide en dos brazos y sobre ellos, en tiempos de Euler, estaban echados siete puentes, de la forma que se indica en la figura. Para los habitantes del lugar, era tema de distracción el intentar descubrir un itinerario para sus paseos de forma tal, que pudiesen regresar al punto de partida después de haber cruzado por los siete puentes, pero pasando por cada uno sólo una vez.

Esquema simplificado del problema:

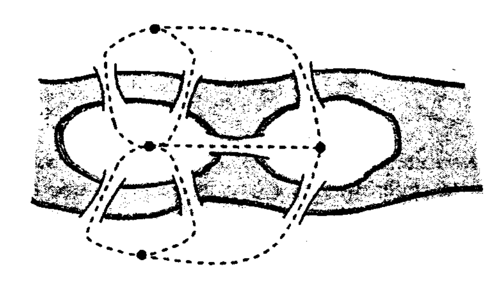


Figura 1

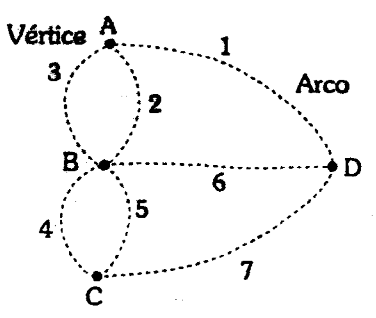


Figura 2

Problemas aparentemente triviales han dado origen al desarrollo de diversas teorías matemáticas: así el estudio de la probabilidad tuvo su origen en el juego de dados a los que eran aficionados los franceses del siglo XVII; la Topología, considerada por algunos como la rama más avanzada de la Geometría moderna; tuvo su génesis en el problema de los siete puentes de Konigsberg.

A los sencillos ciudadanos alemanes les gustaba disfrutar de sus paseos dominicales. Reunidos en el apacible ambiente de las tabernas de Konigsberg, en torno a sus jarras de cerveza se preguntaban:

"¿Cómo planear el paseo del domingo por la tarde de modo que se cruce una sola vez cada uno de los siete puentes?"

Repetidos tanteos les llevaron a la convicción de que era imposible, pero una demostración matemática no debe basarse en creencias ni en ensayos. Lejos, en San Petersburgo, Euler estaba rodeado de honores, como matemático de la corte de Catalina la Grande; y fue allí donde le llegaron noticias de este problema.

Frente al problema, hizo un estudio exhaustivo y al final lo resolvió con su extraordinario cacumen. La TOPOLOGÍA o ANÁLISIS SITUS quedó fundada cuando Euler presentó la solución del problema de los puentes de Konigsberg ante la Academia de Ciencias de San Petersburgo en el año 1 735. Este célebre trabajo demostró que el viaje por los siete puentes, bajo las condiciones exigidas del problema, era imposible.

Así, la "geometría de la situación", llamada con preferencia Topología es hoy una rama importante de la matemática cuyo punto inicial, fue aquella importante memoria del insigne Euler. Esta memoria tiene por título: *Solution Problematis ad Geometrium Situs Pertinentis* y fue publicada en Berlín el año de 1 759.

Citamos ahora el principio de la memoria de Euler, por su valor histórico, y por explicar claramente el alcance de su concepción: "Además de aquella parte de la Geometría que se ocupa de la magnitud y de la medida, y que ha sido cultivada desde los tiempos más remotos con gran aplicación, Leibnitz ha hecho mención, por primera vez, de otra parte todavía muy desconocida actualmente, a la que llama situs. Según él, esta rama de la ciencia se ocupa únicamente del orden y de la situación, independientemente de las razones de magnitud. Pero, ¿cuáles son los problemas que pertenecen a esta Geometría, cuáles son los métodos que hay que emplear para su resolución?. Esto es lo que no se ha definido claramente todavía y recientemente he oído hablar de un problema que parece referirse a la Geometría de la situación porque no contiene, en su enunciado, sino consideraciones de orden, pero no de medida. Por esto he resuelto exponer aquí, como un ensayo, el método que he encontrado para resolver este problema".

La memoria sigue con el estudio del citado problema de los puentes. Euler simplificó el problema reemplazando las zonas de tierra (de la figura 1) por puntos y los puentes por líneas que unían estos puntos. Así la figura 2 es el esquema simplificado y se muestra a la derecha de la figura 1.

En este esquema simplificado que ilustra el problema los siete puentes de Konigsberg, cada porción de tierra está indicada por un punto y los puentes por líneas que conectan estos puntos. ¿Puede dibujarse la figura 3 con un trazo continuo del lápiz sin levantarlo del papel?.

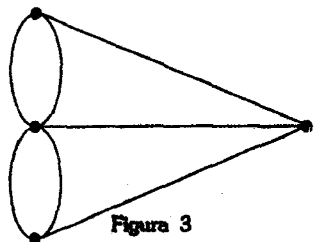
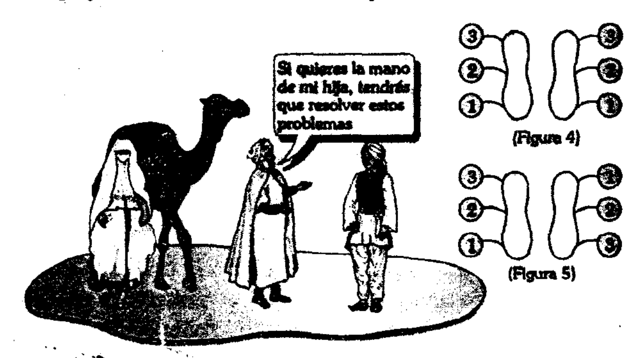


Figura 3

Una vez efectuada esta simplificación podríamos preguntarnos: ¿Puede dibujarse la figura 2 con un trazo continuo del lápiz, sin levantarlo del papel? Porque esto es equivalente a recorrer físicamente los siete puentes en un paseo (matemáticamente el problema se reduce al de recorrer un **grafo**, figura 3).

Como complemento, resolvió totalmente la cuestión de reconocer si una figura lineal cualquiera podía dibujarse de un sólo trazo, esto es, sin levantar el lápiz del papel y sin hacerle recorrer dos veces un mismo fragmento de línea, o si, por el contrario, esto era imposible de hacer.

Según una antigua leyenda, un califa árabe que tenía una hija muy hermosa estaba tan molesto por el número de sus pretendientes, que se vio obligado a establecer pruebas de selección para determinar los mejores: "Unid los números correspondientes de las figuras simétricas mediante líneas que no se corten". (En la figura 4). Si logran hacerlo tendrán que unir los números correspondientes de la figura 5. Aquél que lo haga primero se casará con mi hija.



Es interesante constatar que el problema del califa guarde relación con problemas planteados en la Física, Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

¿Habrá podido algún pretendiente vencer ambas pruebas?

Compruebe usted que, en la primera figura, sí se logra lo que el califa exige, mas no se logrará dicha exigencia en la segunda figura.

Ya a comienzos del siglo XIX, el físico Kirchhoff reconoció la importancia de las investigaciones en Topología a fin de contribuir a la solución de los problemas relacionados con la ramificación y el entrelazamiento de los alambres y otros conductores de corriente eléctrica. Y aunque parezca muy extraño, muchos efectos importantes en la Física han sido hallados exactamente análogos a las relaciones espaciales expuestas en el problema del califa.

En honor a Euler a esta parte del tema que estamos desarrollando, es decir al estudio de la posibilidad de recorrer un grafo, se le denomina: **Recorridos eulerianos**.

NOCIONES IMPORTANTES

¿Qué es un grafo?

Con la acepción que aquí consideraremos, es simplemente una configuración que consiste en un número finito de puntos llamados vértices y en un número finito de arcos. Los vértices son los puntos extremos de los arcos y dos arcos cualesquiera carecen de puntos comunes, excepto quizá vértices. Además según sea la cantidad de líneas que convergen en un vértice podemos denominarlo: punto par o punto impar.

Ejemplo:

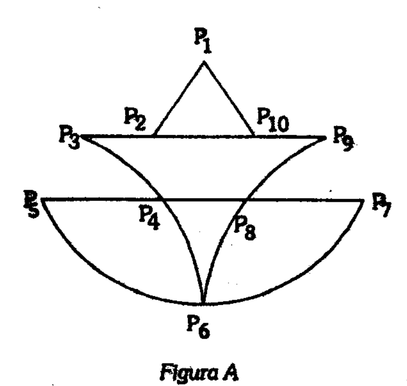


Figura A

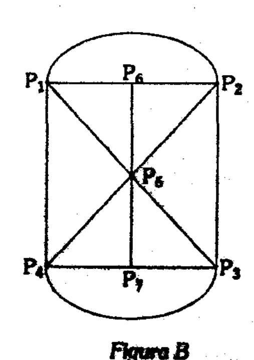


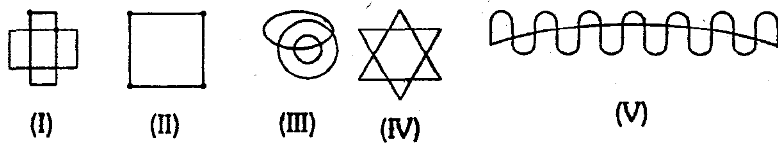
Figura B

¿Qué es un punto par (vértice par)?

Es aquel punto en el cual convergen un número par de líneas.

Ejemplos:

- Los puntos: P_1, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, y P_9 en la figura A y los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, y P_5, de la figura B.
- Los siguientes grafos sólo presentan puntos pares ¡Verifícalo!

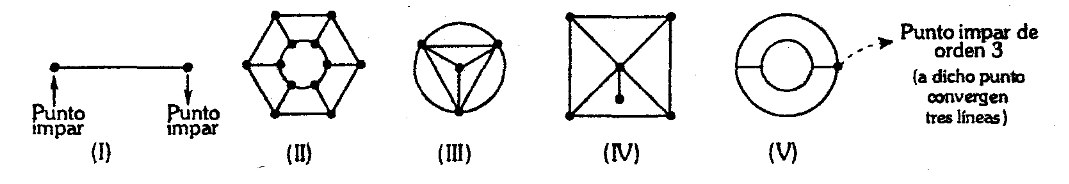


¿Qué es un punto impar (vértice impar)?

Es aquel punto en el cual converge un número impar de líneas.

Ejemplo:

- Los puntos P_2, P_{10} de la figura A y los puntos P_6, y P_7 de la figura B.
- Los grafos mostrados a continuación presentan sólo puntos impares



Observaciones:

1. El orden de un punto, ya sea par o impar, está dado por el número de líneas que convergen en ella.
2. Para poder concluir la posibilidad o imposibilidad de realizar un grafo de un solo trazo, por muy complicado que este sea, es necesario conocer los teoremas de Euler que enunciaremos a continuación.

¿Qué dicen los Teoremas de Euler?

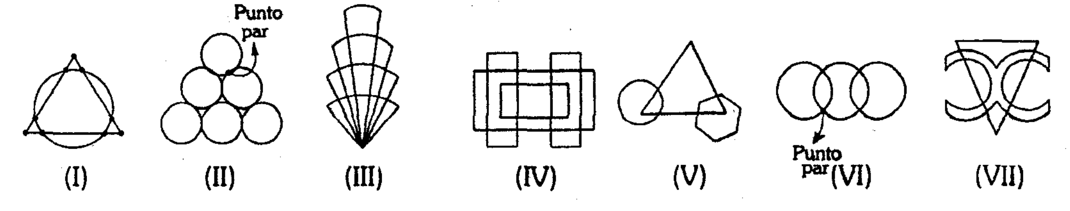
Dado un problema de recorridos eulerianos, diremos que se recorre un grafo cuando se pasa por todos sus arcos sólo una vez; es decir el gráfico debe dibujarse de un solo trazo continuo, sin levantar el lápiz del papel, ni pasar por una misma línea más de una vez.

Euler descubrió y enunció las siguientes conclusiones:

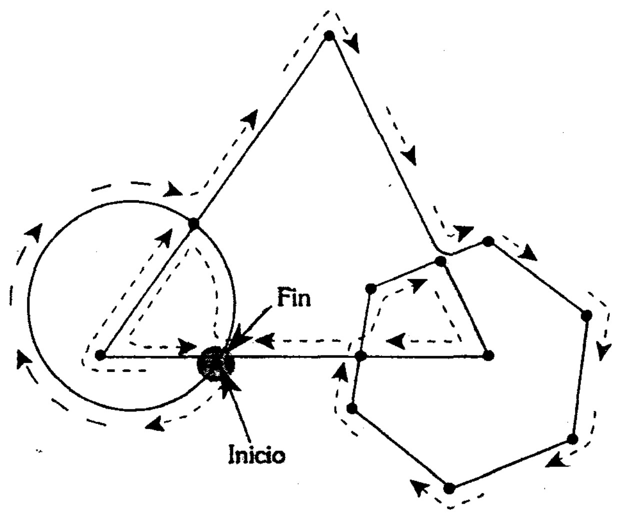
Teorema I
Toda gráfica admite un recorrido euleriano si todos sus puntos son pares; (cualquiera que sea el punto par escogido se comienza y se termina siempre en el mismo punto).

Ejemplos:

Cada uno de los siguientes grafos tiene sólo puntos pares y pueden realizarse de un solo trazo.



Así por ejemplo, la figura (V) puede dibujarse como se muestra a continuación (sólo sigue las flechas y las líneas punteadas)



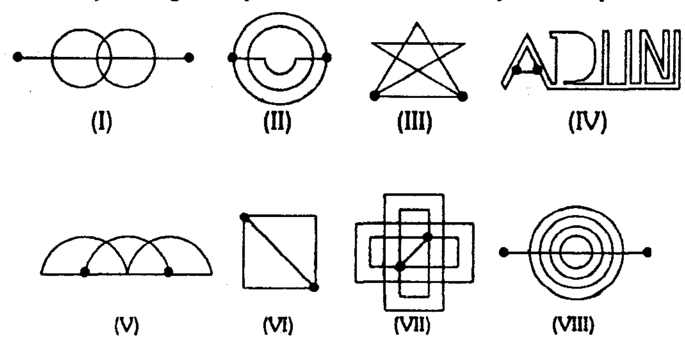
Observación:

Aquí hemos empezado en el punto que se indica, pero como todos los puntos son pares; tú puedes comenzar por cualquiera de ellos. Vamos, inténtalo.

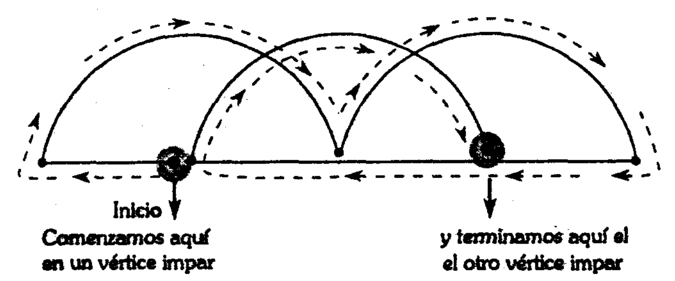
Teorema II
Toda gráfica admite un recorrido euleriano si presenta 2 puntos impares, debiendo empezar en un punto impar y terminar necesariamente en el otro punto impar.
Esto nos dice que si la gráfica contiene como máximo dos vértices impares, sin tener en cuenta el número de vértices pares, puede también ser recorrida, pero no puede volverse al punto de partida.

Ejemplos:

A continuación podemos apreciar grafos que tienen a lo más de 2 puntos impares.



La figura V puede trazarse así:

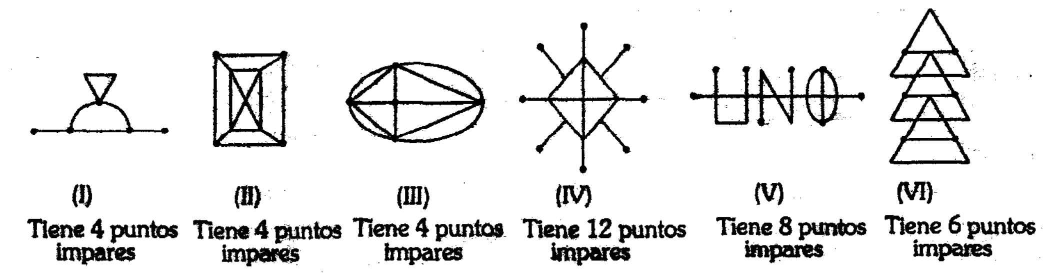


Observación:

Se aprecia cierta separación en los lugares indicados por círculos sombreados. Esto se ha hecho a propósito con el objetivo de que se aprecie mejor la construcción del grafo.

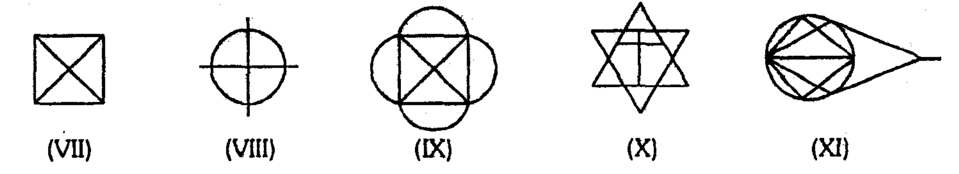
Teorema III
Toda gráfica no admite un recorrido euleriano si presenta más de 2 puntos impares.

Ejemplo: Los siguientes grafos tienen más de 2 puntos impares y no se pueden realizar de un solo trazo.

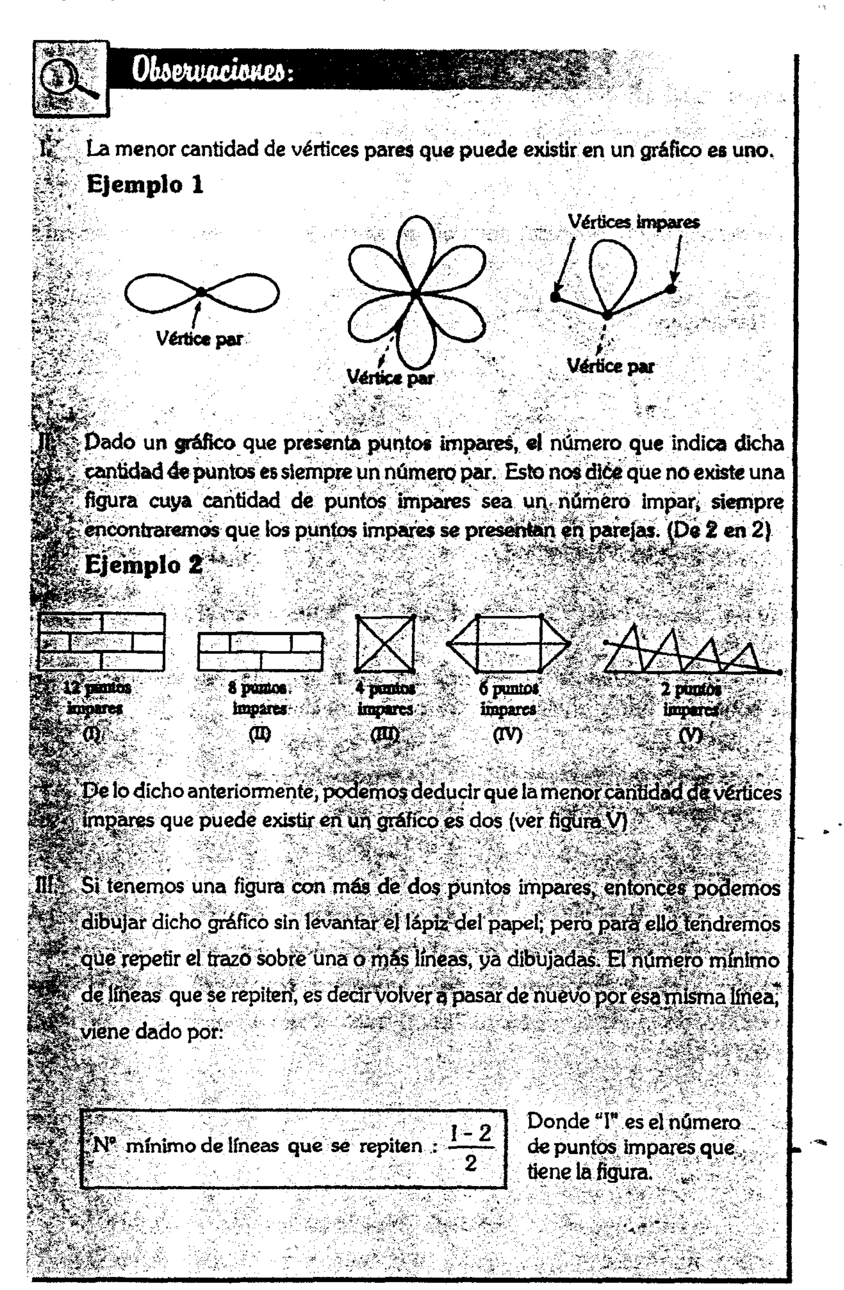


Ejercicio

Indique el número de puntos impares en cada figura:



Si observas atentamente las figuras que a continuación se presentan, notarás una característica común en todas ellas. Es una cuestión aparentemente trivial pero en realidad importante, veamos en las observaciones el por qué:



Observaciones:

I. La menor cantidad de vértices pares que puede existir en un gráfico es uno.

Ejemplo 1

II. Dado un gráfico que presenta puntos impares, el número que indica dicha cantidad de puntos es siempre un número par. Esto nos dice que no existe una figura cuya cantidad de puntos impares sea un número impar, siempre encontraremos que los puntos impares se presentan en parejas. (De 2 en 2)

Ejemplo 2

De lo dicho anteriormente, podemos deducir que la menor cantidad de vértices impares que puede existir en un gráfico es dos (ver figura V)

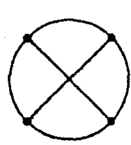
III. Si tenemos una figura con más de dos puntos impares, entonces podemos dibujar dicho gráfico sin levantar el lápiz del papel; pero para ello tendremos que repetir el trazo sobre una o más líneas, ya dibujadas. El número mínimo de líneas que se repiten, es decir volver a pasar de nuevo por esa misma línea, viene dado por:

$$\text{N}^{\circ} \text{ mínimo de líneas que se repiten} : \frac{I-2}{2}$$

Donde "I" es el número de puntos impares que tiene la figura.

Ejemplo 1

Dada la siguiente figura:



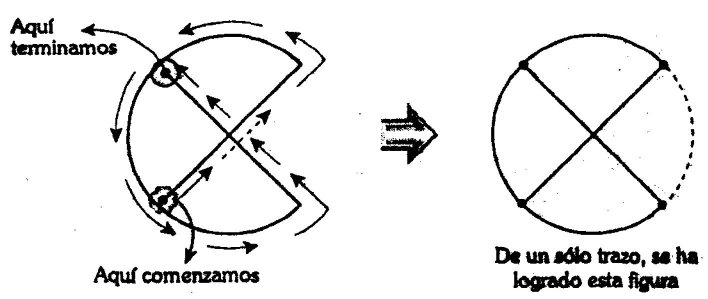
Estudia la posibilidad de realizarla de un solo trazo o con más de un trazo.

Resolución:

Apreciamos que hay 4 vértices impares, luego:

$\left.\begin{array}{l} 2n = 4 \\ n = 2 \end{array}\right\}$ Esto nos indica que se requieren 2 trazos distintos, es decir para realizar el grafo, un solo trazo no será suficiente

Vamos a comprobarlo, empezaremos en un vértice impar y haremos el recorrido hasta donde sea posible:



Como se aprecia, no hemos conseguido hacer la figura de un solo trazo, pues nos faltó dibujar el arco punteado.

Para hacer el arco faltante tendremos que levantar una vez el lápiz del papel; colocarlo nuevamente sobre él y hacer un segundo trazo. En conclusión:

La figura presentaba	: 4 puntos impares
Para trazarla se necesitaron hacer	: 2 trazos distintos
Se tuvo que levantar el lápiz	: sólo 1 vez

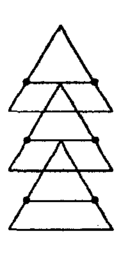
Generalizando diremos:

- Para realizar **dos** trazos distintos; debe levantarse **una** sola vez el lápiz del papel
- Para realizar **tres** trazos distintos; debe levantarse **dos** veces el lápiz del papel
- Para realizar **cuatro** trazos distintos; debe levantarse **tres** veces el lápiz del papel.

  Y así sucesivamente. Luego para realizar **n** trazos distintos tendremos que levantar **n - 1** veces el lápiz del papel.

Ejemplo 2

Dada la siguiente figura:



a. ¿Cuántos puntos pares e impares tiene?
b. ¿Admite un recorrido euleriano?, es decir, ¿puede hacerse de un solo trazo?
c. Si no pudiera hacerse de un solo trazo, ¿con cuántos trazos como mínimo se puede realizar?
d. ¿Cuántas veces se tendrá que levantar el lápiz del papel?

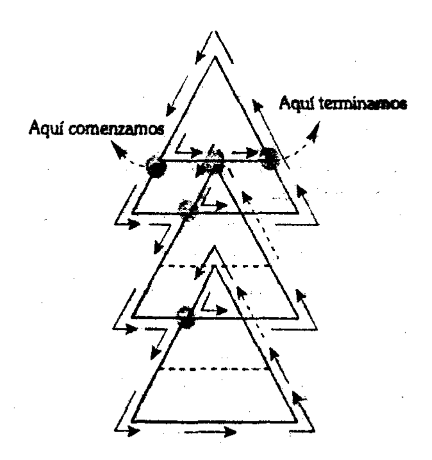
Resolución:

a. Mirando atentamente, notamos que hay 6 puntos impares y 13 puntos pares (los puntos impares están bien marcados en la figura dada)

b. De la parte (a) se deduce que la figura no puede ser realizada de un solo trazo, es decir, no admite un recorrido euleriano, pues presenta más de 2 puntos impares.

c. Como la figura tiene 6 puntos impares, entonces, se necesitarán **3 trazos** distintos para poder realizarla completamente ($2n = 6 \therefore n = 3$).

d. En el gráfico de la derecha observamos la figura que resulta de un solo trazo; las **dos líneas** punteadas son las que faltan hacer y para ello tendremos que levantar **2 veces** el lápiz del papel.



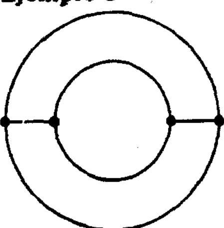
Nota:

En la figura anterior, la línea gruesa fue hecha de un solo trazo y los círculos sombreados indican "separaciones" que como bien sabemos en la figura real son uniones. Además, nunca olvides que debes comenzar por un punto impar.

Conclusiones:

	Figura / Características			En general para I = N° p
Levantando el lápiz del papel	N° de puntos impares	14	8	I
	N° mínimo de trazos continuos para poder realizarla	7	4	$\frac{I}{2}$
	N° de veces que se levanta el lápiz del papel	6	3	$\frac{I}{2}-1$
Sin levantar el lápiz del papel	N° mínimo de líneas repetidas	6	3	$\frac{I}{2}-1$
	N° mínimo de líneas repetidas hasta volver al punto de INICIO	7	4	$\frac{I}{2}$

Ejemplo 3



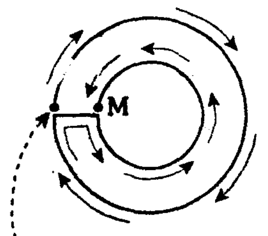
Esta figura presenta 4 puntos impares y por lo tanto no admite un recorrido euleriano con las condiciones que éste implica. Sin embargo, puede hacerse de un solo trazo repitiendo una línea.

En efecto:

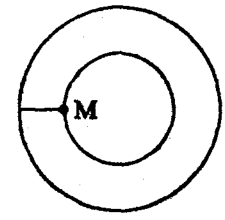
Según lo que hemos visto tendremos:

N° líneas que se repiten: $\frac{4-2}{2} = 1$ { Este resultado indica que tendremos que pasar por una misma línea nuevamente

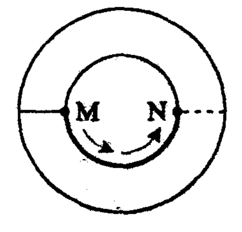
Ahora construiremos la figura:



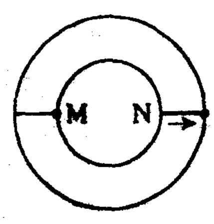
Aquí comenzamos y llegamos hasta el punto M



Quedaría así y el lápiz está sobre el punto M.



A partir del punto M repasamos como indica la flecha hasta llegar a N (trazamos la línea gruesa).



Una vez en N hacemos el trazo final que faltaba.

Con el procedimiento descrito la figura ha sido realizada de un solo trazo, aunque evidentemente, como hemos visto, tuvo que repetirse (volverse a trazar) una línea: aquella que esta dibujada en negrita con trazo grueso.

Las reflexiones hasta aquí expuestas son válidas para cualquier figura, independientemente de cómo fue construida, con líneas rectas o curvas, en un plano o en el espacio. Pues no es difícil ver que se pueden trazar, con un solo movimiento ininterrumpido, todas las aristas de un octaedro regular (figura I) y que es imposible hacerlo con respecto a los cuatro restantes cuerpos convexos regulares.

Dicen que Mahoma en lugar de firmar (era analfabeto) trazaba de una plumada las dos medias lunas, signo representado en la figura II.

Y esto es comprensible puesto que, en el caso dado, tenemos solamente puntos de orden par y, por consiguiente, trazar esta figura de una plumada sin repetir las mismas líneas siempre es posible.

También es siempre posible trazar de una plumada una figura en la que, además de los puntos de orden par, hay dos puntos (no más) de orden impar. Un ejemplar muy llamativo y enredado de esta clase de figuras, con dos puntos impares A y B, se muestra en la figura III. La construcción de esta figura, lo mismo que en el caso del problema sobre los puentes, debe comenzarse desde uno de estos puntos impares.

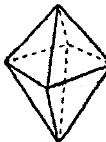


Figura I

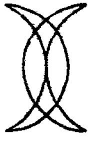


Figura II

A B

Figura III

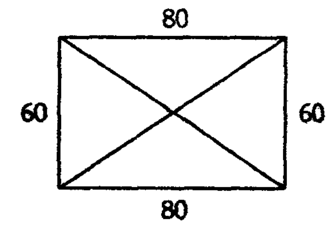
Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

¿Cuál es el tiempo mínimo que utilizaría un niño para recorrer todos los lados y las 2 diagonales de un parque rectangular de 80 metros de largo y 60 metros de ancho, recorriendo con rapidez uniforme de 90 m/min?

Resolución:

Según los datos del problema y de acuerdo al gráfico mostrado a continuación, se deduce que la longitud de la diagonal del parque rectangular es: 100 m.



Se observa que:

- El número de puntos impares es : 4
- El número de lados que recorre dos veces es: $\dfrac{4-2}{2} = 1$
- Además, para que recorra lo pedido en el tiempo mínimo, el lado que debe recorrer 2 veces, debe ser el ancho.

Luego, el espacio total recorrido es:

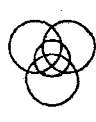
$$2(60) + 2(80) + 2(100) + 60 = 540 \text{ m}$$

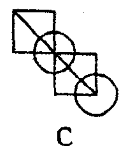
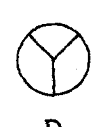
Entonces, el tiempo mínimo será:

$$\therefore \; T_{min} = \frac{540 \text{ m}}{90 \text{ m/min}} = 6 \text{ min}$$

PROBLEMA 2

¿Cuántas de las siguientes figuras se pueden dibujar sin repetir el trazo ni levantar el lápiz del papel?



A B C D

Resolución:

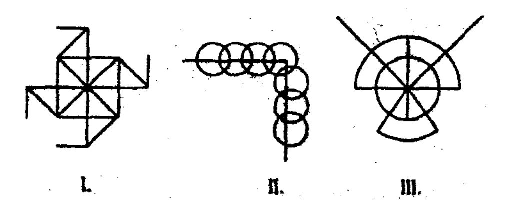
De acuerdo al aspecto teórico que hemos desarrollado, planteamos la posibilidad de su realización:

Figura	Característica	Conclusión
A	No tiene ningún punto impar	Sí
B	Tiene 2 puntos impares	Sí
C	Tiene 2 puntos impares	Sí
D	Tiene 4 puntos impares	No

∴ Solo 3 de las 4 figuras se pueden realizar de un solo trazo: A, B y C.

PROBLEMA 3

Indique cuál o cuáles de las siguientes figuras no puede dibujarse de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel ni pasar 2 veces por una misma línea.



Resolución:

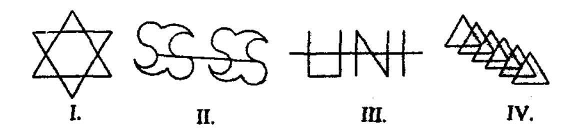
Se aprecia lo siguiente:

Figura	Característica	Conclusión
I	8 puntos impares	No
II	2 puntos impares	Sí
III	4 puntos impares	No

Luego, las figuras I y III no se pueden realizar de un solo trazo.

PROBLEMA 4

¿Cuál de los siguientes gráficos admite un recorrido euleriano (R.E.)?



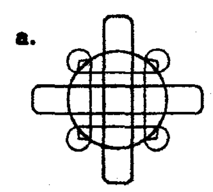
Resolución:

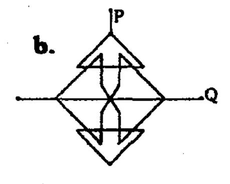
Estudiando las características de cada figura y de acuerdo a los teoremas de Euler, podemos concluir:

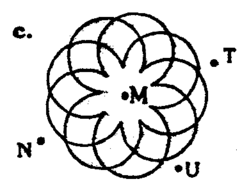
- Si admiten un R.E.: I y IV
- No admiten un R.E.: II y III

PROBLEMA 5

Indique cuáles de las siguientes figuras no puede realizarse de un solo trazo:







Resolución:

Se aprecia lo siguiente:

Figura	Característica	Conclusión
a	8 puntos impares	No
b	4 puntos impares	No
c	Todos los puntos son pares	Sí

∴ Las figuras "a" y "b" no pueden realizarse de un solo trazo.

PROBLEMA 6

Con respecto a la pregunta anterior:

I. Si en la figura "b" trazamos el segmento PQ, ¿se podrá realizar de un solo trazo toda la figura?

II. Si en la figura "c" trazamos MN y TU, ¿cuántas veces habrá que levantar el lápiz del papel para dibujar toda la figura?

Resolución:

I. En la figura "b", al unir el punto P (punto impar) con el punto Q (también punto impar) estos dos puntos se vuelven puntos pares, con lo cual la figura tendría tan solo 2 puntos impares.

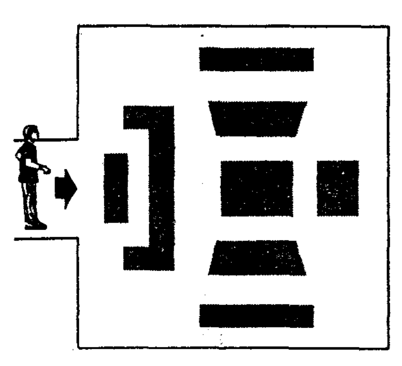
∴ Sí se podría realizar de un solo trazo.

II. Si trazamos esos dos segmentos, estaremos generando 4 puntos impares. Por lo tanto, la figura no se podrá realizar de un solo trazo, se tendrá que repetir algunos segmentos, dicho de otra manera, se tendrá que levantar el lápiz del papel. Para averiguar la cantidad de veces que se levantará el lápiz del papel, aplicamos lo siguiente:

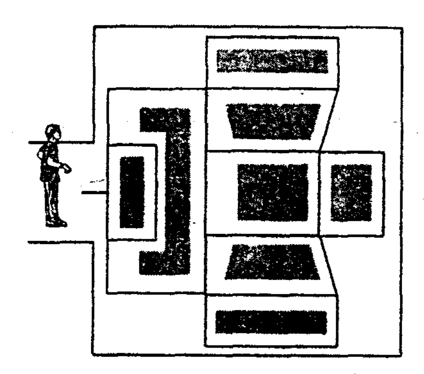
$$\therefore \ N^{\circ} \text{ de veces} = \frac{I-2}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$

PROBLEMA 7

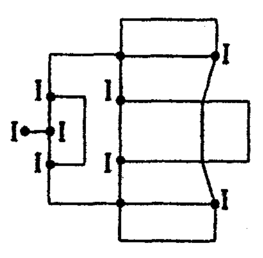
Un deportista desea recorrer todas la calles del barrio mostrado, imponiéndose a sí mismo la condición de pasar sólo una vez por cada calle, ¿podrá lograrlo?



Resolución:



Lo obtenido es:

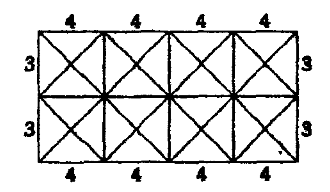


Observamos en la figura 8 puntos impares, por lo tanto deducimos que la figura no se podrá realizar de un solo trazo, lo que equivale a decir que el deportista no puede recorrer todas las calles de una sola intención.

∴ No podrá lograrlo.

PROBLEMA 8

Una hormiga debe recorrer todas y cada una de las líneas que conforman la figura. Si colocamos a la hormiga en una intersección cualquiera de la figura, ¿cuál será la longitud del menor recorrido que realizará dicha hormiga para cumplir su objetivo?



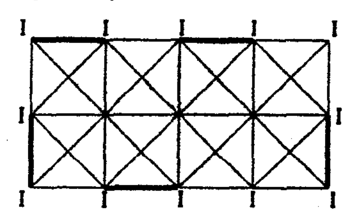
Resolución:

Sabemos que si la figura presenta más de 2 puntos impares, entonces dicha figura no se podrá realizar de un solo trazo, se tendrá que repetir una cierta cantidad de líneas para poder dibujarla. La pregunta aquí será, ¿cuál línea habrá que repetir?. La respuesta la obtendremos de la siguiente observación:

Observación:

Cuando se tenga que repetir líneas y se pida el menor recorrido, entonces habrá que repetir aquellas líneas que vayan de un punto impar a otro punto impar, cuya longitud sea mínima y teniendo cuidado que los puntos impares de las líneas que se están repitiendo no coincidan entre sí (las líneas a repetir no tienen que estar en forma consecutiva).

Entonces para el problema:



Se observa que la figura no se podrá realizar de un solo trazo, se tendrá que repetir líneas:

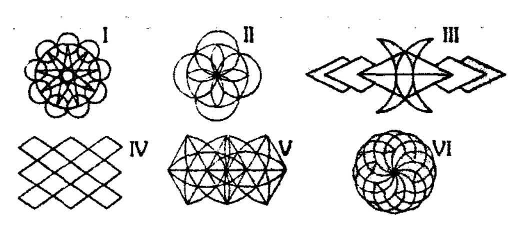
$$\text{N° mínimo de líneas a repetir} = \frac{I}{2} - 1 = \frac{12}{2} - 1 = 5$$

Según la observación, las 5 líneas a repetir serán las líneas que están con línas gruesas enla figura anterior.

$$\therefore\ \text{recorrido mínimo} = 12(\underline{4}) + 10(\underline{3}) + 16(\underline{5}) + 2(\underline{3}) + 3(\underline{4}) + 3(\underline{4}) = 176$$

Problemas Propuestos

1. Indique cuál de las siguientes figuras no puede realizarse de un solo trazo:

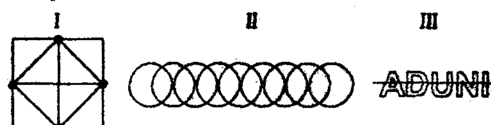


A) Sólo I B) Sólo II C) II y III
D) I y III E) Sólo III

2. El cubo mostrado está hecho de alambre y su arista mide 10 cm. Una hormiga tarda 5 minutos en recorrer todas las aristas del cubo, caminando con rapidez constante. Calcule la menor rapidez de la hormiga.

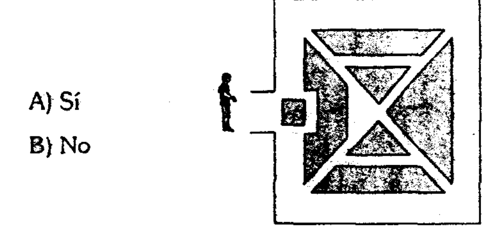
A) 30cm/min.
B) 20cm/min.
C) 10cm/min.
D) 5cm/min.
E) 40cm/min.

3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes figuras pueden realizarse de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel ni pasar 2 veces por una misma línea.



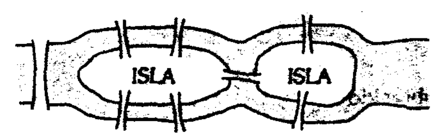
A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) Sólo I y II E) Sólo II y III

4. Un maratonista desea recorrer una ciudad con la condición de pasar tan sólo una vez por cada calle o avenida, ¿podrá lograrlo?



A) Sí
B) No

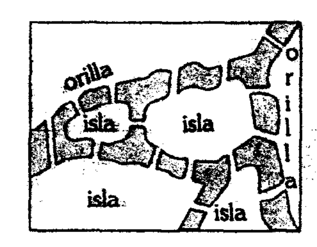
5. La figura muestra un río y 8 puentes.



¿Se podrá hacer un paseo pasando por todos los puentes tan solo una vez, teniendo en cuenta que se comienza el paseo por una de las islas mostradas?

A) Sí B) No

6. Cuatro islas están unidas entre sí y con las orillas del río mediante 15 puentes, conforme se muestra:



¿Será posible en un solo recorrido pasar por todos los puentes, sin hacerlo por ninguno de ellos más de una vez? Se debe partir de la orilla.

A) Sí B) No

CLAVES	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	E	A	E	B	A	B

Leonard Euler

Desde el Renacimiento hasta el siglo XVIII, el centro de la actividad matemática se desplazó repetidas veces de Alemania a Italia, después a Francia, a Holanda, a Inglaterra; y si las persecuciones religiosas no hubieran forzado a la familia Bernoulli a huir de Antwerp (Bélgica) podría haber ocupado este puesto a su vez, pero lo cierto es que dicha familia emigró a Basilea, y como consecuencia de ello fue Suiza el lugar de nacimiento de muchas de las figuras más importantes de la matemática de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. El matemático más importante que produjo Suiza durante esta época (o en cualquiera de su historia) fue Leonard Euler (1 707 -1 783), que nació en Basilea.

El padre de Euler era un pastor calvinista que, al igual que el padre de Jacques Bernoulli, esperaba que su hijo siguiera el camino del sagrado ministerio. El muchacho, sin embargo, estudió con Jean Bernoulli junto a sus hijos Nicolaus y Daniel, y en este ambiente favorable descubrió su vocación. El viejo Euler también tenía una buena preparación matemática, pues había sido discípulo de Jacques Bernoulli en su juventud, y luego colaboró en la instrucción de su hijo en los elementos básicos de la matemática, a pesar de mantener la esperanza de que Leonard siguiese una carrera teológica. En cualquier caso, el joven Euler recibió una educación muy completa, ya que al estudio de la matemática se unió el de la teología, la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Esta amplitud de conocimientos le resultó muy útil cuando en 1 727 recibió noticias procedentes de Rusia en el sentido de que se convocaba un puesto en la sección de medicina de la Academia de San Petersburgo, a donde se habían trasladado dos años antes los jóvenes hermanos Bernoulli como profesores de matemáticas. Esta importante institución había sido fundada poco años antes por Catalina I, siguiendo las líneas trazadas por su difunto esposo Pedro el Grande, aconsejado por Leibniz. Por recomendación de los Bernoulli, que eran dos de las más brillantes lumbreras durante los primeros tiempos de la Academia, se nombró a su amigo Euler como miembro de la sección de fisiología y medicina. Desgraciadamente, el mismo día en que Euler llegaba a Rusia moría la emperatriz Catalina, y la casi recién nacida Academia estuvo a punto de sucumbir con ella, debido a que los nuevos gobernantes mostraron menos simpatía por los sabios extranjeros que la que habían manifestado Pedro y Catalina.

De una u otra manera la Academia consiguió sobrevivir, sin embargo, y Euler se encontró, en 1 730, ocupando la cátedra de filosofía natural, en vez de la medicina. Su amigo Nicolaus Bernoulli había muerto de fiebre en San Petersburgo un año antes de su llegada, y en 1 733 Daniel Bernoulli abandonó Rusia para ocupar la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea. Así pues, Euler se convirtió en el matemático más importante de la Academia a la edad de veintiséis años.

La Academia de San Petersburgo había comenzado a publicar una revista de investigación, los Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, y casi desde sus comienzos recibió un verdadero torrente de artículos matemáticos procedentes de Euler. Los editores no tenían por qué

preocuparse de una eventual escasez de material que publicar en tanto la pluma de Euler permaneciese activa. En cierta ocasión dijo el académico francés Francois Arago que Euler podía calcular sin ningún esfuerzo aparente, "exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire". Como resultado de esta increíble capacidad, Euler escribía memorias matemáticas mientras jugaba con sus hijos, por ejemplo: en 1 735 perdió la vista de su ojo derecho, según se dijo por exceso de trabajo, pero este accidente desgraciado mino su ánimo. Él mismo decía que su lápiz parecía sobrepasarlo en inteligencia, por la gran facilidad con que fluían de él las memorias, una tras otra, y a lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Durante casi medio siglo después de su muerte continuaron apareciendo obras inéditas de Euler en las publicaciones de la Academia de San Petersburgo, y a lo largo de su vida su investigación matemática vino a suponer una producción de unas 800 páginas anuales en promedio; ningún matemático ha superado jamás (ni tampoco se ha aproximado) la prolija producción de este hombre, al que Arago llamó "el Análisis Encarnado".

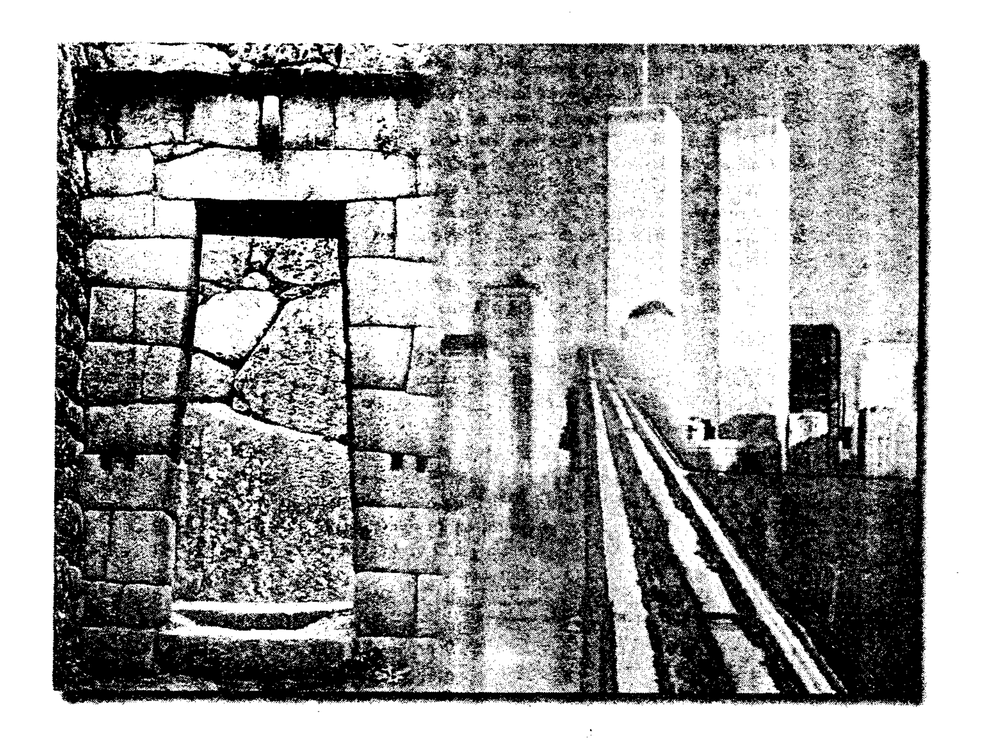
Euler adquirió muy pronto fama internacional, e incluso antes de abandonar Basilea había recibido ya una mención honorífica de la Academia de Ciencias de París por un trabajo sobre la mejor disposición de los mástiles en un buque. En años sucesivos Euler presentó a menudo memorias a los concursos convocados por la Academia y obtuvo doce veces el codiciado premio que se otorgaba bienalmente.

En 1 741, Euler recibió una invitación de Federico el Grande de Prusia para incorporarse a la Academia de Berlín, invitación que fue aceptada.

Euler pasó veinticinco años en la corte de Federico el Grande, pero a lo largo de este período continuó recibiendo una pensión de Rusia, y envió numerosos artículos a la Academia de San Petersburgo, al mismo tiempo que a la Academia Prusiana.

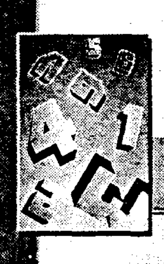
La estancia de Euler en Berlín no fue tan feliz como lo deseado, pues Federico prefería a los intelectuales brillantes, como era el caso de Voltaire. El monarca, que apreciaba más a los filósofos que a los geómetras, se refería al sencillo Euler como "el Cíclope Matemático" (broma de dudoso gusto, dado que Euler era tuerto), y las relaciones en la Corte terminaron por hacérsele intolerables; Catalina la Grande estaba precisamente deseosa de que el prolífico matemático volviese a ocupar su lugar en la Academia de San Petersburgo, y como resultado de todo ello Euler regresó a Rusia en 1 766. Este mismo año supo que estaba perdiendo la vista del único ojo que le quedada, por una afección de cataratas, y se preparó para la ceguera casi total que le esperaba practicando en escribir con tiza en grandes caracteres en una pizarra preparada especialmente, y dictando a sus hijos. En 1 771 sufrió una operación y volvió a ver durante unos días, pero el éxito de la operación y la consiguiente alegría duraron poco, y Euler vivió casi durante los diecisiete últimos años de su vida en una ceguera total. Ni siquiera esta tragedia consiguió interrumpir sus investigaciones y publicaciones, que continuó al mismo e incluso a mayor ritmo hasta 1 783, en que, a la edad de 76 años, murió de una manera casi repentina mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos.

RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO



"Todo aquello que han realizado a lo largo de los siglos, las mayores inteligencias en relación con la comprensión de las formas por medio de conceptos precisos está reunido en una gran ciencia: la Matemática".

Herbart



Lectura 17

El espacio y la geometría

Nicolai Lobachevsky (1793-1856) matemático ruso creador de una de las geometrías no euclidianas.

Incluso vacío y desprovisto de los objetos que lo pueblan, el espacio goza de ciertas propiedades. La idea intuitiva que tenemos sobre él está vinculada a la del desplazamiento y el movimiento, ya que conocemos el espacio en la medida en que lo exploramos. Por esta razón hay varias maneras de imaginar su estructura, maneras que difieren entre sí sobre todo en lo que concierne al infinito, allí donde jamás hemos estado.

Existen numerosas geometrías: la geometría euclidiana, la geometría proyectiva, la geometría no euclidiana de Lobatchevski, etc.

Todas son, simplemente, casos particulares de la llamada geometría riemaniana. En estas diversas geometrías, las rectas paralelas tienen comportamiento muy diferentes. La geometría euclidiana es la que todos conocemos. Nos informa de las propiedades del espacio acerca del cual tenemos un conocimiento intuitivo, y es, en cierto modo, la más simple. Admite la existencia de las rectas paralelas: aquellas que, por mucho que se las prolonguen no llegan a juntarse nunca. Es ésta una idea debida por completo a la imaginación ya que físicamente es bastante difícil dar evidencia a las rectas paralelas, y más aún por el hecho de que la idea de prolongarlas indefinidamente no tiene mucho sentido en física. La geometría proyectiva se inspira en la noción de perspectiva. Basta con contemplar la figura de un suelo enlozado visto en perspectiva para comprender que las líneas paralelas del dibujo se cortan, pero en el infinito del paisaje. La geometría de Lobatchevski es mucho menos intuitiva. Se la puede representar por medio de los puntos internos de un círculo, y son los arcos del círculo que lo cortan en ángulo recto los que desempeñan el papel de rectas.

La geometría proyectiva: la observación de la perspectiva nos da la idea intuitiva de que las rectas paralelas son aquellas que se cortan en el infinito. Esta idea es muy fácil de formalizar introduciendo, además de los puntos del espacio, puntos del infinito , formando un plano, el plano del infinito, y declarando que dos rectas paralelas se cortan en un punto de ese plano. Así se obtiene las geometría proyectiva. Una de sus considerables ventajas es la de que, al elevar las paralelas al rango de rectas secantes, suprime numerosos casos particulares.

Las geometrías no euclidianas: para demostrar por reducción al absurdo el postulado de Euclides (por un punto exterior a una recta se puede trazar una, y sólo una, paralela a esa recta) se han inventado dos geometrías que rechazan dicho postulado. En la primera, que se debe a Gauss y Riemann, no existen paralelas; en la segunda, de Lobatchevski y Bolyaï, por un punto exterior a una recta pasan una infinidad de paralelas a dicha recta. Estas dos geometrías no se diferencian fundamentalmente de la geometría euclidiana más que por lo que le ha sido añadido al infinito.

¿Se pueden construir otras geometrías?

Es posible construir todavía muchas otras geometrías. Así, sobre una superficie de nuestro espacio de tres dimensiones se puede, entre las líneas trazadas en ella, llamar rectas a aquellas que recorren el camino más corto de un punto a otro (sin salirse de la superficie). Se tienen ahí todos los elementos constitutivos

FUENTE: La clave del saber Tomo XX.

RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

Objetivos

1. *Afianzar los conceptos básicos de la geometría.*
2. *Aplicar los conceptos básicos de geometría en la resolución de los problemas, considerando principalmente el uso adecuado de criterios lógicos.*
3. *Estimular y desarrollar la capacidad creativa y de abstracción en el proceso de resolución de los problemas geométricos.*

Introducción

Etimológicamente, el término ***Geometría*** *significa "medir la tierra". En efecto, una antigua opinión, transmitida por Herodoto, atribuía el origen de la Geometría a la necesidad de medir las tierras de labranza después de cada crecida del Nilo, la cual podía modificar su extensión; con el objeto de fijar equitativamente el impuesto a pagar al rey. Pero, no fue solamente la medida de la tierra el origen de los conocimientos geométricos: la necesidad de comparar áreas y volúmenes, las construcciones de canales y edificaciones, las figuras decorativas, los movimientos de los astros, han contribuido también al nacimiento de reglas y propiedades geométricas que se encuentran en los documentos de las antiguas civilizaciones egipcia y mesopotámica. Actualmente, según la naturaleza de las propiedades, se tienen distintas geometrías que pueden clasificarse desde distintos puntos de vista. Por ejemplo: Geometría analítica, diferencial, euclidiana, no euclidiana, de "n" dimensiones, descriptiva, proyectiva, etc. También la topología, que es una rama matemática vinculada a la Geometría.*

Si observamos a nuestro alrededor, podemos identificar la forma de algunas figuras geométricas: el rectángulo en el borde de una ventana, o de una puerta; la circunferencia, en el borde de una moneda o de un neumático; así podemos enumerar más ejemplos que lo que hacen es demostrar el vínculo estrecho entre la Geometría y la realidad. La Geometría, nace, se desarrolla de la realidad y va dirigida hacia ella.

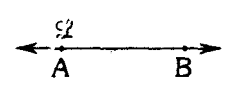
Anteriormente, se ha mencionado que el ***análisis*** *es una herramienta importante en las matemáticas y que con un adecuado y correcto* ***razonamiento*** *podemos llegar a obtener conclusiones válidas. En este capítulo, Razonamiento Geométrico, vamos a fusionar las propiedades y* ***conocimientos geométricos*** *con el* ***arte de razonar****; para aplicarlos en forma apropiada y oportuna. No es cuestión de aprender y memorizar las fórmulas, sino de entenderlas y saberlas aplicar en los casos donde sea conveniente.*

A continuación, presentaremos primero una breve reseña histórica sobre la génesis de la Geometría y continuaremos con un marco teórico sobre definiciones y propiedades que nos servirán de base para afrontar los problemas.

NOCIONES BÁSICAS DE GEOMETRÍA

A continuación revisaremos algunas características y propiedades en algunas figuras geométricas que serán necesarias para la resolución de los problemas, asimismo las notaciones respectivas.

RECTA

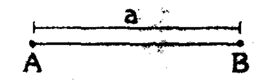


Notación:

$\overleftrightarrow{\mathfrak{L}}$: recta 𝔏

$\overleftrightarrow{AB}$: recta AB

SEGMENTO



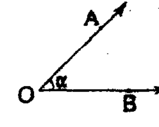
Notación:

$\overline{AB}$: segmento de extremos A y B

AB : longitud de $\overline{AB}$

AB=a

ÁNGULOS



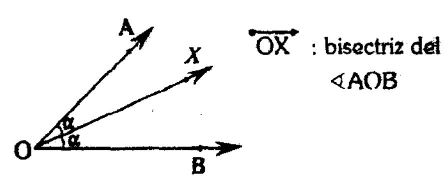
Notación:

∢AOB : ángulo AOB

m∢AOB : medida angular del ∢AOB

m∢AOB = α

Bisectriz de un Ángulo

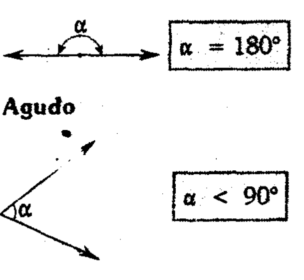


$\overrightarrow{OX}$: bisectriz del ∢AOB

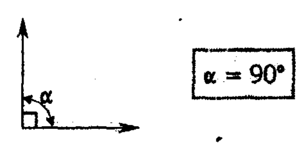
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS

a) Por su Medida Angular

Llano



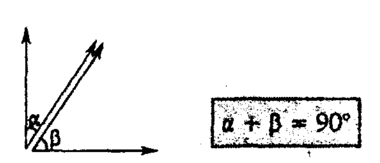
Recto



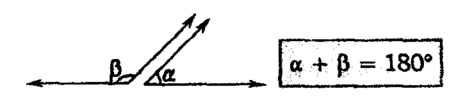
Obtuso

b) Por la Suma de sus Medidas

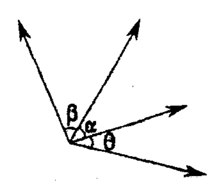
Complementarios



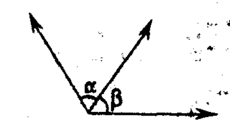
Suplementarios



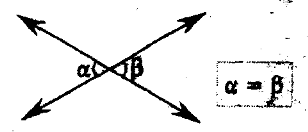
c) **Por la Posición de sus Lados Consecutivos**

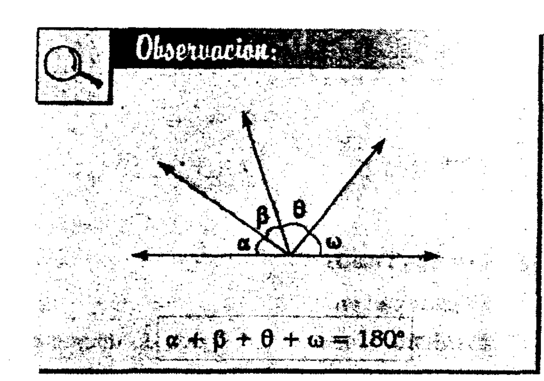


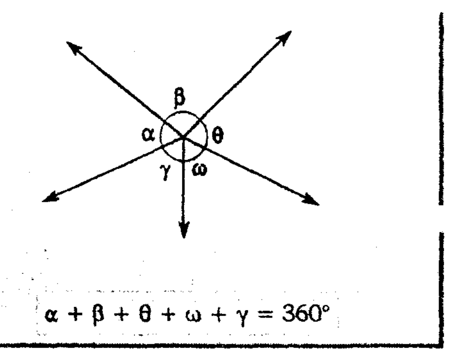
Adyacentes



Opuestos por el Vértice







Ángulos Formados por Dos Rectas Paralelas y una Recta Secante

Respecto a sus medidas, se cumple:

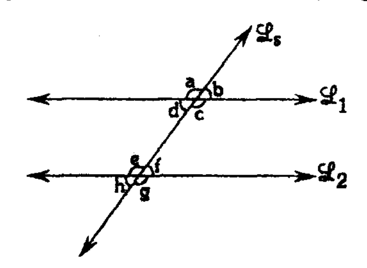
Alternos internos: c=e; d=f

Alternos externos: a=g; b=h

Conjugados internos: d+e=180°; c+f=180°

Conjugados externos: a+h=180°; b+g=180°

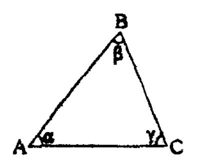
Correspondientes: a=e ; d=h ; b=f ; c=g



TRIÁNGULO

Definición

Es la figura geométrica que se determina con tres puntos no colineales y se forma al unirlos con segmentos de línea recta.



Notación:

ΔABC : triángulo ABC

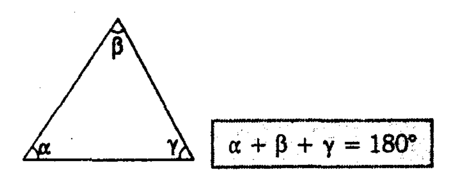
Elementos:

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$: lados del ΔABC

A, B y C : vértices del ΔABC

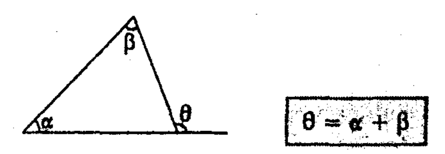
PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO

a) Suma de medidas de los Ángulos Interiores



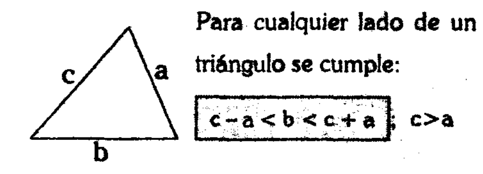
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

b) Cálculo de la medida del Ángulo Exterior



$\theta = \alpha + \beta$

c) Existencia del Triángulo



Para cualquier lado de un triángulo se cumple:

$c - a < b < c + a$; $c > a$

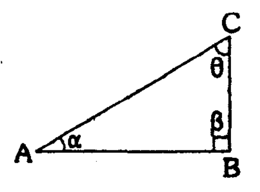
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

a) Por sus Ángulos

Se clasifican en:

Triángulos Rectángulos

Tienen un ángulo interior que mide 90°. Los lados que determinan dicho ángulo se denominan catetos y el lado opuesto al ángulo recto se denomina hipotenusa.



$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: catetos

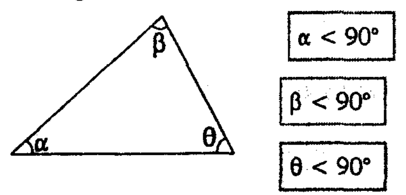
$\overline{AC}$: hipotenusa

$m\sphericalangle ABC = \beta = 90°$

Triángulos Oblicuángulos

No tienen ángulo interior que mide 90°. A su vez estos triángulos pueden ser:

Acutángulos: Si sus tres ángulos internos son agudos.



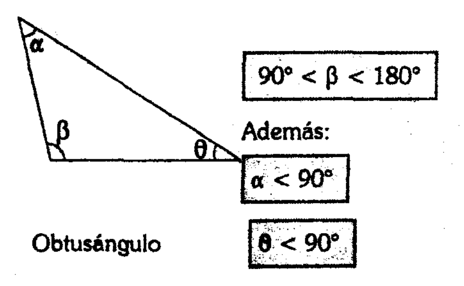
$\alpha < 90°$

$\beta < 90°$

$\theta < 90°$

Acutángulo

Obtusángulos: Si tienen un ángulo interior obtuso.



$90° < \beta < 180°$

Además:

$\alpha < 90°$

$\theta < 90°$

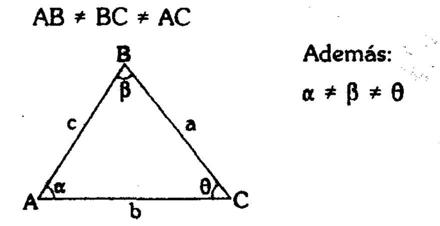
Obtusángulo

b) Por sus Lados

Se clasifican en:

Escaleno: Tiene sus tres lados de diferente medida.

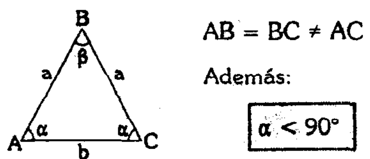
$AB \neq BC \neq AC$



Además:

$\alpha \neq \beta \neq \theta$

Isósceles: Tiene dos lados de igual medida.



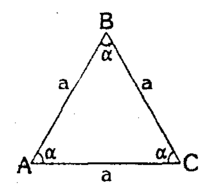
$AB = BC \neq AC$

Además:

$\alpha < 90°$

Equilátero: Tiene sus tres lados de igual medida.

AB = BC = AC

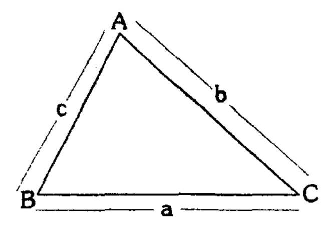


Además:

$\alpha = 60°$

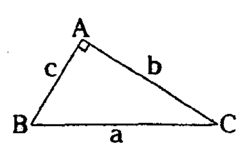
NATURALEZA DEL TRIÁNGULO

Sean: a, b y c, las longitudes de los lados de un triángulo ABC, considerando el lado mayor de longitud a; entonces para saber si el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo, se comparan $\mathbf{a^2}$ y (b^2+c^2).



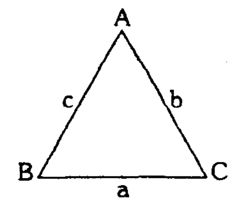
Primer Caso

Si: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC$ es recto en A



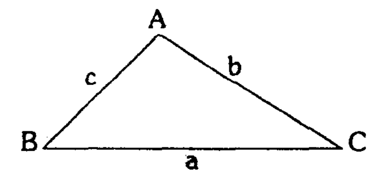
Segundo Caso

Si: $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC$ es acutángulo



Tercer Caso

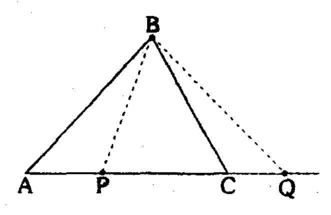
Si: $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \Delta ABC$ es obtusángulo. siendo obtuso en A.



LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Ceviana

Es el segmento de recta que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



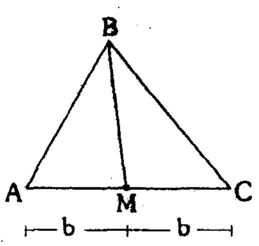
En el ΔABC:

$\overline{BP}$: ceviana interior relativa a $\overline{AC}$

$\overline{BQ}$: ceviana exterior relativa a $\overline{AC}$

Mediana

Es la ceviana que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.



En el ΔABC

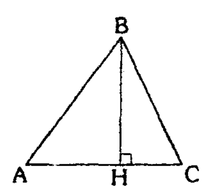
$\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

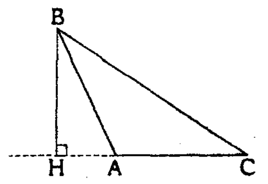
Altura

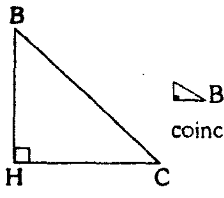
Es la ceviana perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

En el ΔABC

$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$



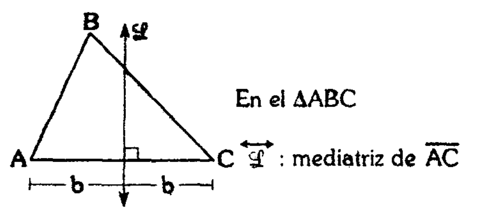




⊿BHC : en este caso la altura coincide con uno de los catetos.

Mediatriz

Es aquella recta perpendicular a uno de los lados, en su punto medio.

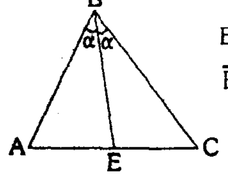


En el ΔABC

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$: mediatriz de $\overline{AC}$

Bisectriz Interior

Es la ceviana interior que determina con los lados adyacentes ángulos de igual medida.

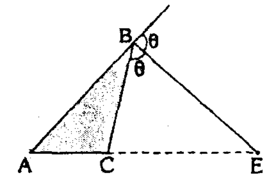


En el ΔABC:

$\overline{BE}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$

Bisectriz Exterior

Es la ceviana exterior que determina con un lado y la prolongación del otro, ángulos de igual medida.

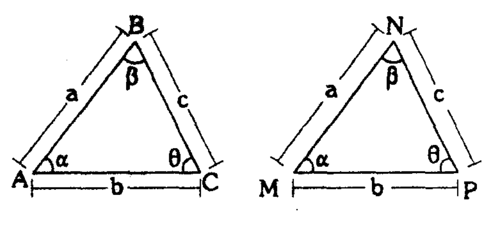


En el ΔABC

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos serán congruentes, si los lados del primero tienen longitudes iguales a los lados del otro y las medidas de los ángulos internos del primero son respectivamente iguales a las medidas de los ángulos internos del otro.



ΔABC ≅ ΔMNP

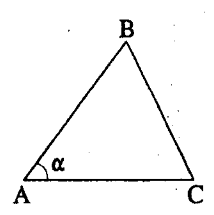
≅: se lee "es congruente a"

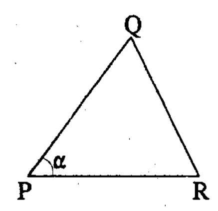
Casos en la Congruencia de Triángulos

Existen condiciones mínimas que nos permiten reconocer si dos triángulos son congruentes; estas condiciones están dadas en base a las medidas de algunos elementos de los triángulos.

Primer Caso: LAL (lado – ángulo – lado)

Dos triángulos son congruentes si las medidas de dos lados y el ángulo determinado por ellos en un triángulo son respectivamente iguales a las medidas de dos lados y el ángulo determinado por ellos en el otro.



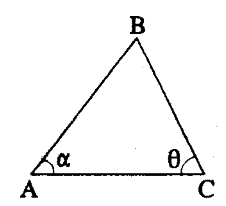


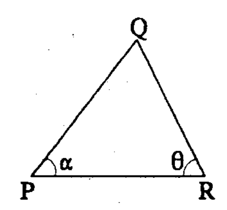
Si AB=PQ; AC=PR y m∢BAC=m∢QPR=α

⇒ ΔABC ≅ Δ PQR

Segundo Caso: ALA (ángulo – lado – ángulo)

Dos triángulos son congruentes si las medidas de un lado y los ángulos adyacentes a él en un triángulo son respectivamente iguales a las medidas de un lado y los ángulos adyacentes a él en el otro triángulo.



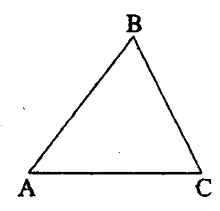


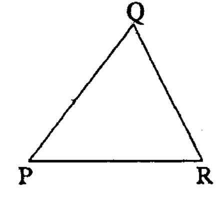
Si AC=PR; m∢BAC=m∢QPR=α ;
m∢BCA = m∢QRP=θ

⇒ ΔABC ≅ ΔPQR

Tercer Caso: LLL (lado – lado – lado)

Dos triángulos son congruentes si las medidas de los tres lados del primero son respectivamente iguales a las medidas de los tres lados del otro.



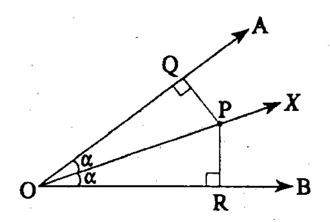


Si AB=PQ; BC=QR; AC=PR

⇒ ΔABC ≅ ΔPQR

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



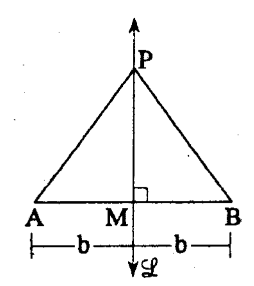
$\overrightarrow{OX}$: bisectriz del ∢AOB

P : punto cualquiera de la bisectriz

⇒ PQ = PR Además: OQ = OR

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento.

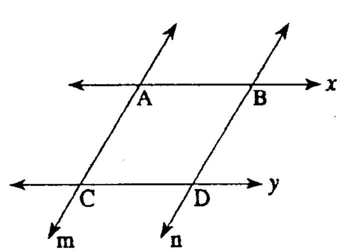


$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz del $\overline{AB}$

P : punto cualquiera de la mediatriz

⇒ PA = PB

PROPIEDAD DE LAS RECTAS PARALELAS

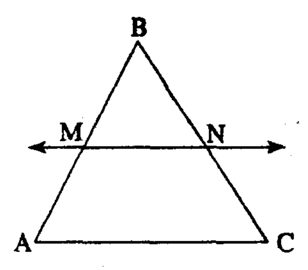


Si $\overleftrightarrow{x} // \overleftrightarrow{y}$; $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$

$\Rightarrow$ $\boxed{AB = CD}$ y $\boxed{AC = BD}$

TEOREMA DE LOS PUNTOS MEDIOS

Si por el punto medio de unó de los lados de un triángulo se traza una recta paralela a un segundo lado, dicha recta interseca al tercer lado en su punto medio. **Además**, la longitud del segmento que tiene por extremos dichos puntos medios es igual a la mitad de la longitud del lado paralelo a él.

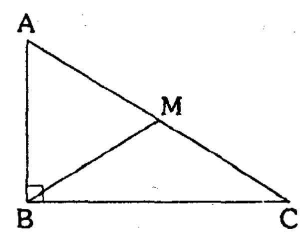


Si AM=MB y $\overleftrightarrow{MN} // \overline{AC}$

$\Rightarrow$ $\boxed{BN = NC}$ y $\boxed{MN = \dfrac{AC}{2}}$

TEOREMA DE LA MENOR MEDIANA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

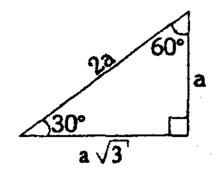
En todo triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa tiene como medida la mitad de la longitud de la hipotenusa.

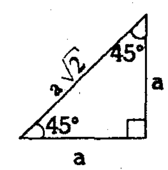


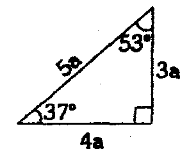
$\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa

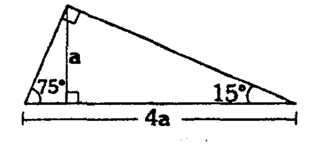
$\Rightarrow$ $\boxed{BM = AM = MC = \dfrac{AC}{2}}$

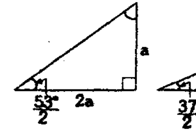
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

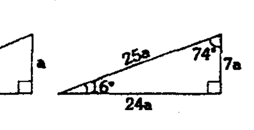


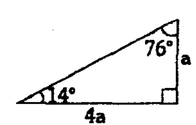


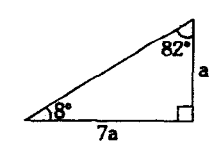










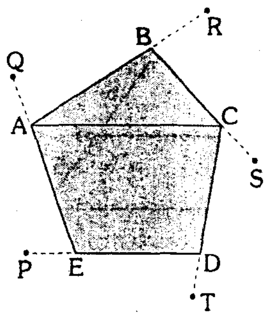


Observación:

De los triángulos rectángulos notables que se han mencionado, únicamente el de 30° y 60°; el de 45° y 45° y el de 15° y 75° sus medidas angulares son exactas. En los otros triángulos rectángulos restantes, sus medidas angulares son cantidades aproximadas.

POLÍGONO PLANO

Es la figura geométrica que se forma al unir tres o más puntos de un mismo plano, mediante segmentos de recta, no encontrándose tres puntos consecutivos en una misma recta.



ELEMENTOS

- Vértices: A, B, C, D, E
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$

ELEMENTOS ASOCIADOS

- Ángulos Interiores: $\sphericalangle EAB$, $\sphericalangle ABC$, . . .
- Ángulos Exteriores: $\sphericalangle QAB$, $\sphericalangle RBC$, . . .
- Diagonales: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, . . .

Denominación de un Polígono según el Número de Lados

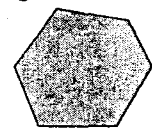
- Triángulo : 3 lados
- Cuadrilátero : 4 lados
- Pentágono : 5 lados
- Exágono : 6 lados
- Heptágono : 7 lados
- Octágono : 8 lados
- Nonágono : 9 lados
- Decágono : 10 lados
- Endecágono : 11 lados
- Dodecágono : 12 lados
- Pentadecágono : 15 lados
- Icoságono : 20 lados

REGIÓN POLIGONAL

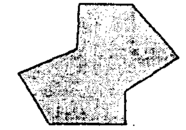
Es la unión del polígono y su región interior.

{Polígono}$\cup${Región interior} = {Región poligonal}

Clasificación de una Región Poligonal



Región Poligonal Convexa

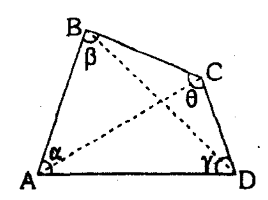


Región Poligonal no Convexa

CUADRILÁTERO

Es el polígono de cuatro lados. En todo cuadrilátero la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 360°.

Cuadrilátero Convexo ABCD

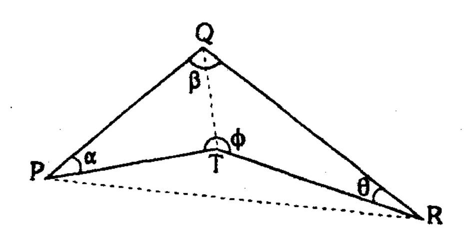


Elementos:

- Vértices: A, B, C y D
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$
- Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

$$\alpha + \beta + \theta + \gamma = 360°$$

Cuadrilátero Cóncavo PQRT; Cóncavo en T



Elementos:

- Vértices: P, Q, R y T
- Lados: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RT}$ y $\overline{TP}$
- Diagonales: $\overline{QT}$ y $\overline{PR}$

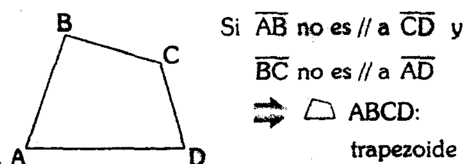
$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 360°$$

CLASIFICACIÓN

A. Trapezoide

Es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos no son paralelos.

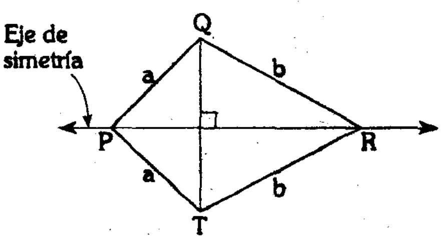
Trapezoide asimétrico



Si $\overline{AB}$ no es // a $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$ no es // a $\overline{AD}$

⇛ ⏢ ABCD: trapezoide

Trapezoide simétrico o bisósceles



Si ⏢ PQRT es un trapezoide, PQ=PT y QR=TR

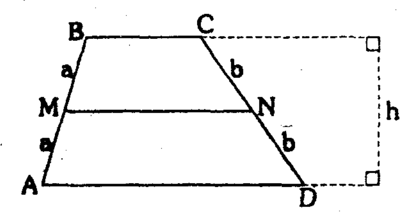
⇛ ⏢ PQRT: trapezoide simétrico

B. Trapecio

Es aquel cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos a los cuales se les denomina bases.

Si $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$

⇛ ABCD : trapecio



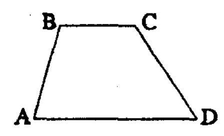
Elementos:

- Bases : $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$
- Laterales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$
- Base media: $\overline{MN}$
- Altura: h

Tipos de trapecios

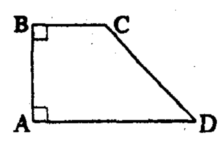
- **Trapecio Escaleno**

Es aquel cuyos lados laterales son de diferente longitud.



$\overline{BC} // \overline{AD}$ y $AB \neq CD$ ⇒ ABCD es un trapecio escaleno.

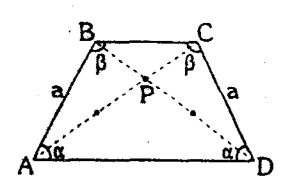
Caso Particular:



Si $\overline{AB} \perp \overline{AD}$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y $BC // AD$ ⇒ ABCD *es* un trapecio escaleno, llamado **trapecio rectángulo**.

- **Trapecio isósceles**

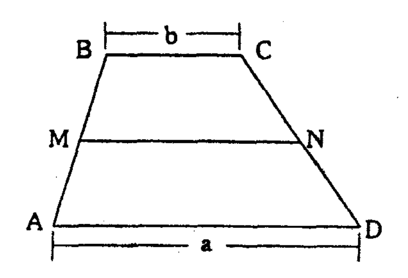
Es aquel cuyos laterales son de igual longitud.



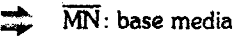
Si $\overline{BC}//\overline{AD}$ y AB=CD=a ⇒ ABCD es un trapecio isósceles

Propiedades

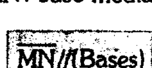
1.



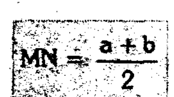
Si $\overline{BC}//\overline{AD}$; AM=MB y CN=ND



⇒ $\overline{MN}$: base media

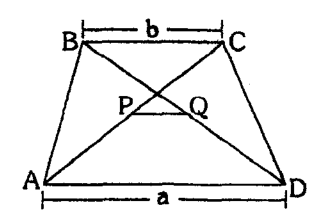


$\overline{MN}$//(Bases)

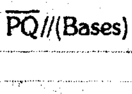


$$MN = \frac{a+b}{2}$$

2.

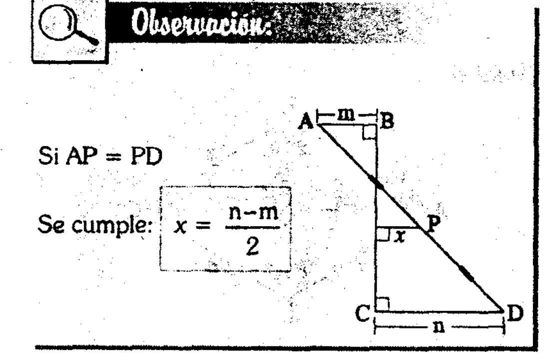


Si $\overline{BC}//\overline{AD}$; BQ=QD y AP=PC



$\overline{PQ}$//(Bases)

$$PQ = \frac{a-b}{2}$$

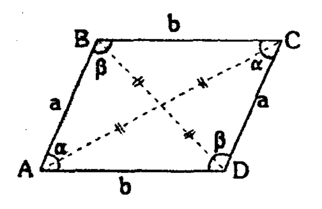


Si AP = PD

Se cumple: $x = \dfrac{n-m}{2}$

C. Paralelogramo

Es aquel cuadrilátero en el cual sus dos pares de lados opuestos son paralelos.



Si $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{BC}//\overline{AD}$

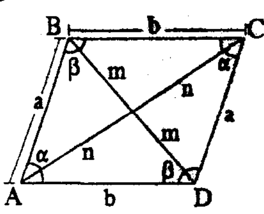
⇒ ABCD es un paralelogramo

Propiedades

- AB = CD = a y BC = AD = b
- Sus ángulos opuestos son de igual medida.
- Sus diagonales se bisecan.

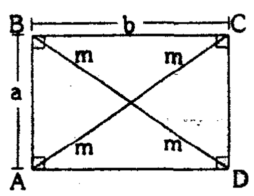
Tipos de Paralelogramos

Romboide



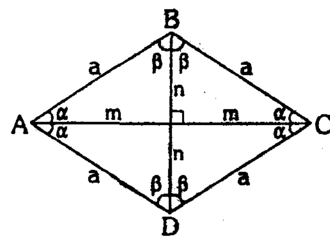
Si AB ≠ BC y BD ≠ AC
⇒ ABCD : romboide

Rectángulo



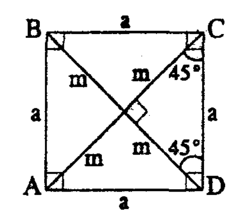
Si AB ≠ BC y además es equiángulo
⇒ ABCD : rectángulo
Consecuencia: AC = BD

Rombo



Si AB = BC = a y BD ≠ AC
⇒ ABCD : rombo
Consecuencia: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Cuadrado

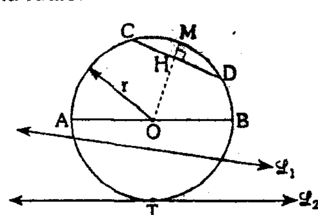


Si AB = BC y además es equiángulo
⇒ ABCD : cuadrado

Consecuencia: AC = BD y $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

CIRCUNFERENCIA

Se denomina circunferencia al lugar geométrico de todos los puntos de un plano cuya distancia a otro punto del mismo plano llamado centro, es constante. Esa longitud constante se denomina radio.



Centro : O
Radio : r

Cuerda : $\overline{CD}$

Diámetro : $\overline{AB}$, AB=2r

Recta secante : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$

Recta tangente : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$

Flecha o sagita : $\overline{MH}$

Arco : $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{CTD}$

Punto de tangencia : T

Longitud de la circunferencia : $2\pi r$

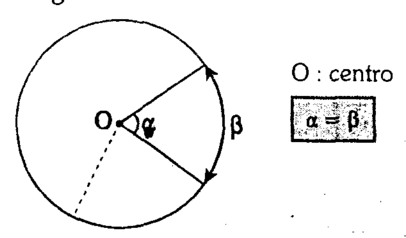
$\pi \approx 3{,}1416$ ó $\pi \approx \dfrac{22}{7}$

CÍRCULO

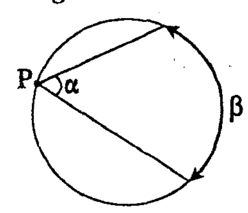
Es aquella superficie plana determinada por la unión de una circunferencia y su región interior.

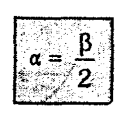
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ángulo Central



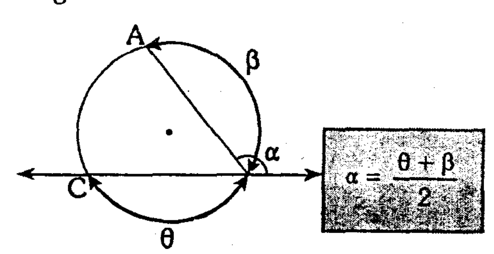
Ángulo Inscrito





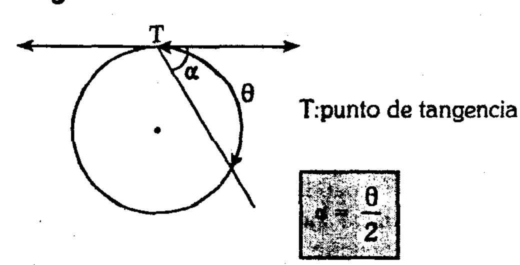
$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ángulo Ex-inscrito



$$\alpha = \frac{\theta + \beta}{2}$$

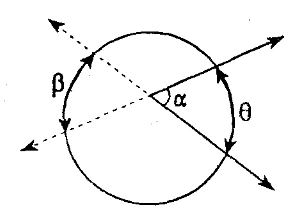
Ángulo Semi-inscrito



T:punto de tangencia

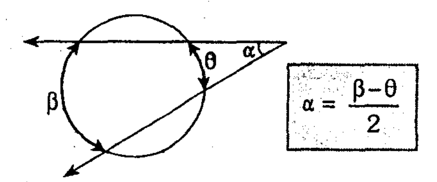
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

Ángulo Interior

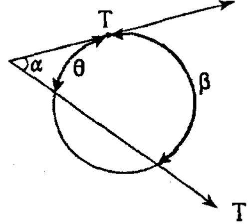


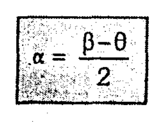
$$\alpha = \frac{\beta + \theta}{2}$$

Ángulo Exterior



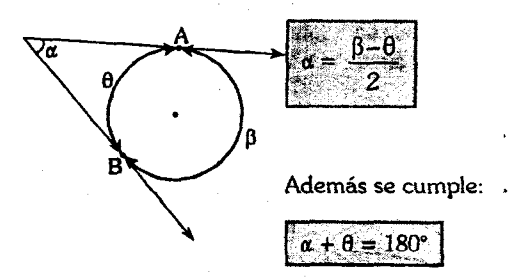
$$\alpha = \frac{\beta - \theta}{2}$$





$$\alpha = \frac{\beta - \theta}{2}$$

T : punto de tangencia



$$\alpha = \frac{\beta - \theta}{2}$$

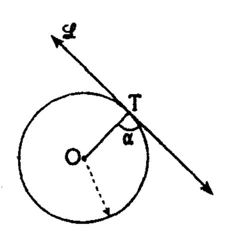
Además se cumple:

$$\alpha + \theta = 180°$$

A y B son puntos de tangencia.

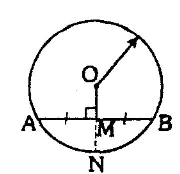
PROPIEDADES

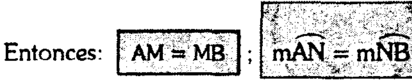
1. Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es tangente y T es punto de tangencia.



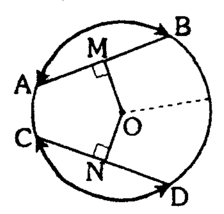
Entonces: $\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$; $\alpha = 90°$

2. Si O es centro y $\overline{ON} \perp \overline{AB}$.



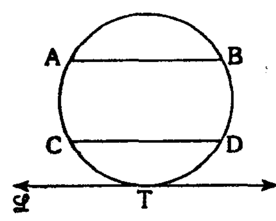

Entonces: AM = MB ; $m\overset{\frown}{AN} = m\overset{\frown}{NB}$

3. Si $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$.



Entonces: AB = CD ; OM = ON

4. Si $\overline{AB} // \overline{CD} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y T es punto de tangencia.



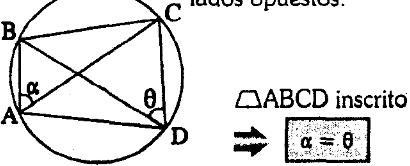
Entonces: $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$; $m\overset{\frown}{CT} = m\overset{\frown}{TD}$

CUADRILÁTERO INSCRITO

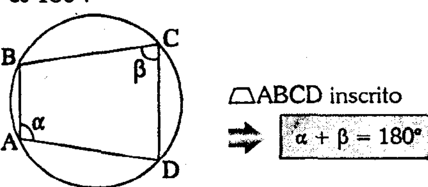
Es aquel cuadrilátero que tiene sus vértices en una misma circunferencia.

PROPIEDADES

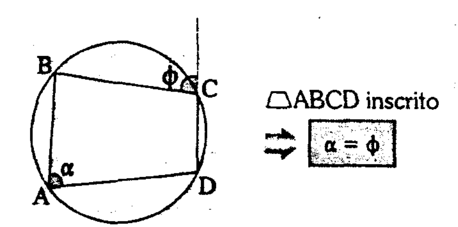
1. En todo cuadrilátero inscrito, las diagonales determinan ángulos de igual medida con los lados opuestos.



2. En todo cuadrilátero inscrito la suma de medidas de dos ángulos interiores opuestos es 180°.



3. En todo cuadrilátero inscrito, un ángulo interior tiene igual medida que el ángulo exterior opuesto.

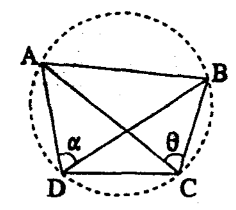


CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

Es aquel cuadrilátero que puede inscribirse en una circunferencia.

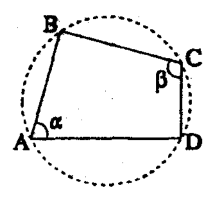
Para que un cuadrilátero sea inscriptible, debe cumplir por lo menos una de las siguientes condiciones:

1. Que las diagonales determinen ángulos de igual medida con los lados opuestos.



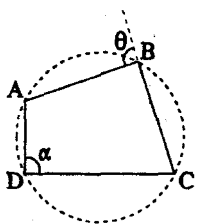
Si $\alpha=\theta$, entonces: ⏢ABCD es inscriptible.

2. Que la suma de las medidas de dos ángulos interiores opuestos sea 180°.



Si $\alpha + \beta = 180°$, entonces: ⏢ABCD es inscriptible.

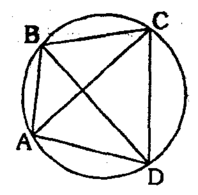
3. Que un ángulo interior tenga igual medida que el ángulo exterior opuesto.



Si $\alpha = \theta$, entonces: ⏢ABCD es inscriptible

PROPIEDADES ADICIONALES

En todo cuadrilátero inscrito (o inscriptible en una circunferencia) se cumple:



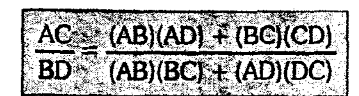
1. El producto de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos.

   Así:

$$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD)$$

2. La razón de las longitudes de las diagonales es igual a la razón de la suma de productos de las longitudes de los lados que concurren en los extremos de cada diagonal (Teorema de Viete).

   Es decir:



$$\frac{AC}{BD} = \frac{(AB)(AD) + (BC)(CD)}{(AB)(BC) + (AD)(DC)}$$

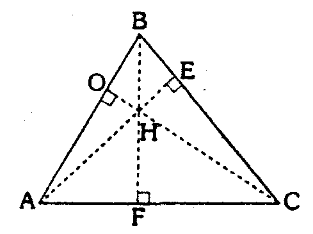
PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

Son puntos que se determinan al trazar líneas notables de la misma especie en un triángulo.

ORTOCENTRO

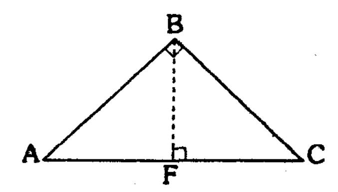
Es el punto de concurrencia de las alturas del triángulo, cuya ubicación depende de la naturaleza del triángulo.

- En el triángulo acutángulo



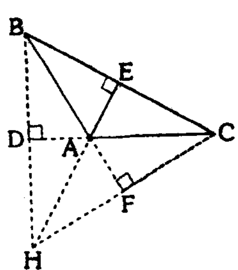
H : ortocentro del ΔABC

- En el triángulo rectángulo



B : ortocentro del ⊿ABC

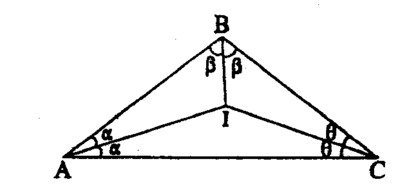
- En el triángulo obtusángulo



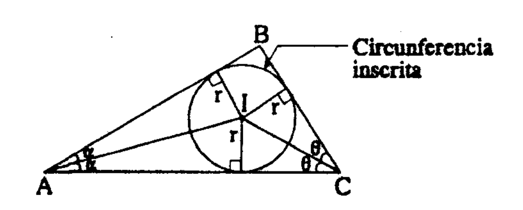
H : ortocentro del ΔABC

INCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores del triángulo; siempre es interior al triángulo y equidista de los lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



I : incentro del ΔABC

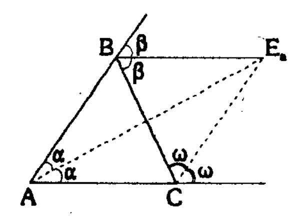


r : inradio del ΔABC

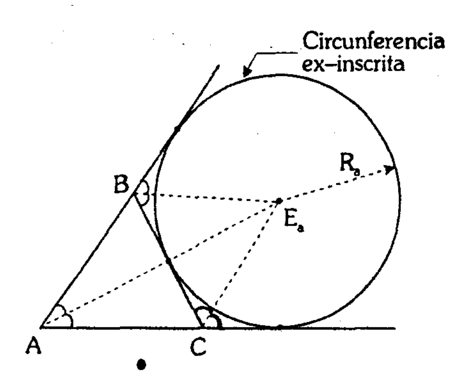
Propiedad: $m\sphericalangle AIC = 90° + \dfrac{m\sphericalangle ABC}{2}$

EX–CENTRO

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior trazada del tercer vértice; se encuentra exteriormente y equidista de los lados del triángulo; por lo tanto, es el centro de la circunferencia ex–inscrita. Todo triángulo tiene tres ex–centros.



E_a : ex–centro relativo a $\overline{BC}$



E_a : ex–centro

R_a : ex–radio del ΔABC

Propiedades

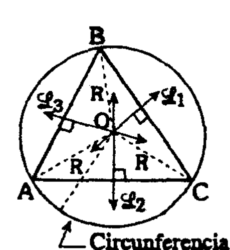
1. $$m\sphericalangle AE_aC = \frac{m\sphericalangle ABC}{2}$$

2. $$m\sphericalangle BE_aC = 90° - \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

CIRCUNCENTRO

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados del triángulo, dicho punto equidista de los vértices del triángulo; por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. La ubicación del circuncentro depende de la naturaleza del triángulo.

En el Triángulo Acutángulo

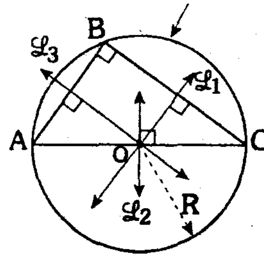


$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$: mediatrices

O : circuncentro del ΔABC

R : circunradio

En el Triángulo Rectángulo



$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$: mediatrice

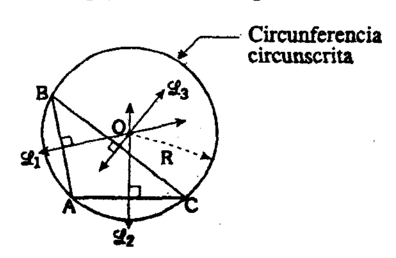
O : circuncentro del ΔABC

R : circunradio

$$R = \frac{AC}{2}$$

Donde $\overline{AC}$: hipotenusa

En el Triángulo Obtusángulo

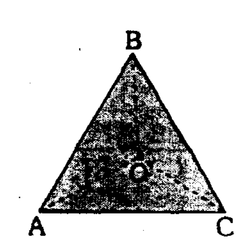


$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3}$: mediatrices

O : circuncentro del ΔABC

R : circunradio

Propiedades



Si O es el circuncentro se cumple:

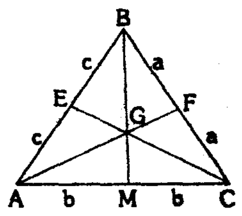
1. OA = OB = OC

2. m∢AOC = 2(m∢ABC)

BARICENTRO

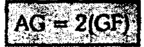
Es el punto de concurrencia de las medianas de una región triangular, siempre es un punto interior.

El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuya razón es de dos a uno.



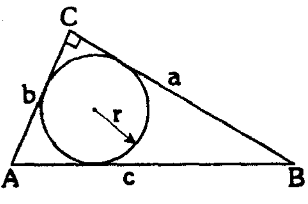
G : baricentro de la región triangular ABC

Propiedad

BG = 2(GM)  AG = 2(GF) CG = 2(GE)

TEOREMA DE PONCELET

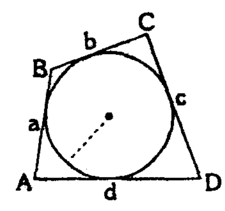
En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de la longitud de la hipotenusa y la longitud del diámetro de la circunferencia inscrita.



Se cumple: a + b = c + 2r

TEOREMA DE PITHOT

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.



Se cumple: a + c = b + d

PROPORCIONALIDAD DE LOS SEGMENTOS

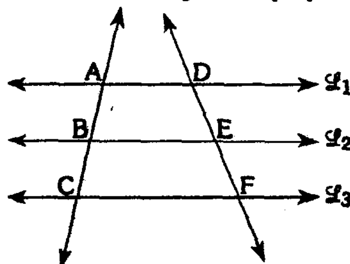
SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos son proporcionales a otros dos, si lo son respectivamente sus longitudes, es decir: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{PQ}$ y $\overline{RT}$, si:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RT}$$

TEOREMA DE THALES

Tres o más rectas paralelas determinan en dos rectas secantes a ellas, segmentos proporcionales.



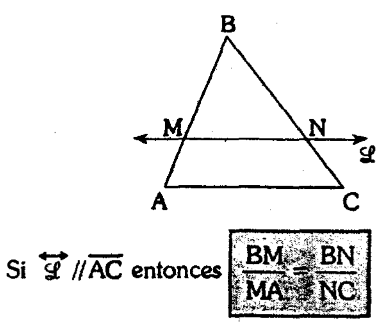
Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$

Se cumple:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Corolario del Teorema de Thales

Una recta secante a un triángulo, paralela a uno de sus lados determina segmentos proporcionales en los otros dos lados.

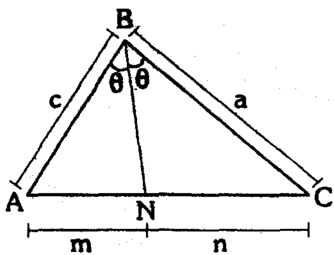


Si $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AC}$ entonces $\frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

En todo triángulo una bisectriz determina en el lado al cual es relativo segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.

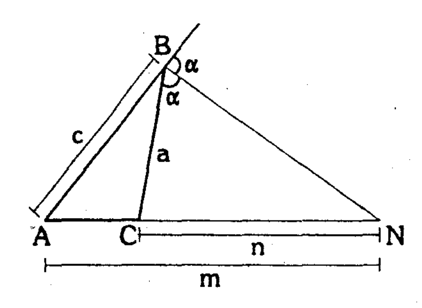
Bisectriz Interior



$\overline{BN}$: bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$

Se cumple: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$

Bisectriz Exterior



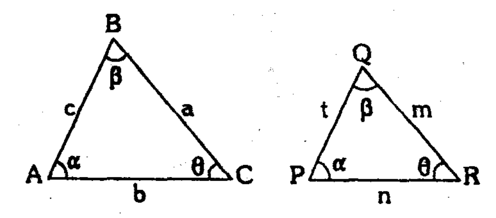
$\overline{BN}$: bisectriz exterior relativo a $\overline{AC}$

Se cumple: $\frac{c}{a} = \frac{m}{n}$

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

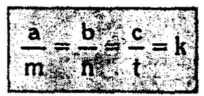
Dos triángulos semejantes son aquellos que presentan sus ángulos interiores, respectivamente, de igual medida y sus lados homólogos proporcionales.

Los lados homólogos son los lados que se oponen a los ángulos de igual medida en dichos triángulos semejantes.



En la figura: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\sim$: se lee, "es semejante a", entonces:

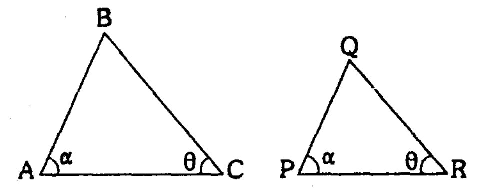


$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{t} = k$$

Donde k es denominado: razón de semejanza o constante de proporcionalidad.

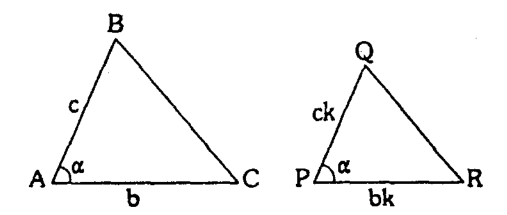
CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- Dos triángulos son semejantes si dos ángulos interiores del primero son, respectivamente, de igual medida que dos ángulos interiores del segundo.



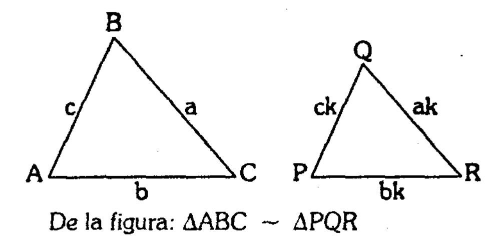
De la figura: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

- Dos triángulos son semejantes si un ángulo del primero es de igual medida que un ángulo del segundo; y los lados que los determinan, respectivamente proporcionales.



De la figura: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

- Dos triángulos son semejantes si los tres lados del primero son proporcionales a los tres lados del segundo.

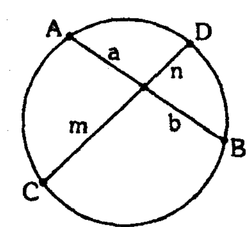


De la figura: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS

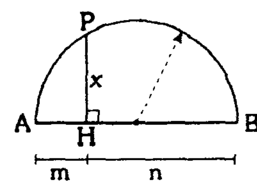
Al trazar en una circunferencia dos cuerdas secantes en un punto interior, se cumple que los productos de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda son iguales.



En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas secantes, entonces:

$$a \cdot b = m \cdot n$$

Corolario del Teorema de las Cuerdas

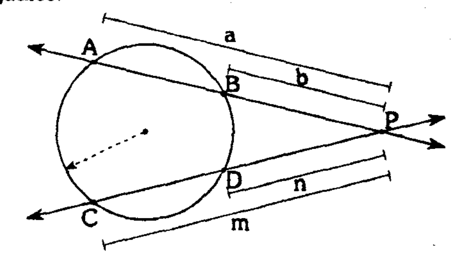


En la figura, si $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AB}$ es diámetro se cumple:

$$x^2 = m \cdot n$$

TEOREMA DE LAS SECANTES

Al trazar desde un punto exterior dos rectas secantes a una circunferencia, se cumple que los productos de las longitudes de los segmentos secantes con sus respectivas partes externas son iguales.

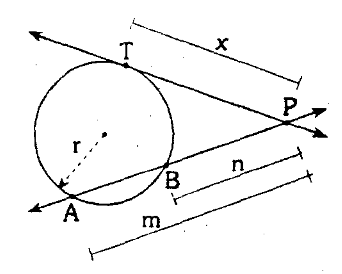


En la figura, por el punto P se trazan las rectas $\overleftrightarrow{PBA}$ y $\overleftrightarrow{PDC}$ secantes a la circunferencia, entonces:

$$a \cdot b = m \cdot n$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una recta tangente y una recta secante; entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su parte externa.

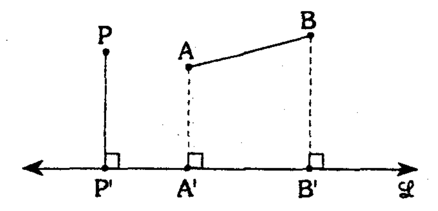


En la figura, por el punto P, se trazan la tangente $\overleftrightarrow{PT}$ y la secante $\overleftrightarrow{PA}$. Entonces: $x^2 = m \cdot n$

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PROYECCIÓN ORTOGONAL

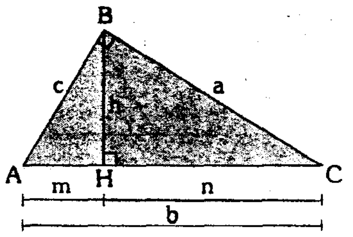
La proyección ortogonal de un punto sobre una recta es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto hacia la recta. Además la proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento que une las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento dado.



Proyección ortogonal de P sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: P'

Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: $\overline{A'B'}$

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



$\overline{AH}$ y $\overline{HC}$: proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$ respectivamente.

Teorema 1
El cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.
En el ΔABC: $c^2 = b.m.$ $a^2 = b.n$

Teorema 2 Teorema de Pitágoras
El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.
En el ΔABC: $b^2 = c^2 + a^2$

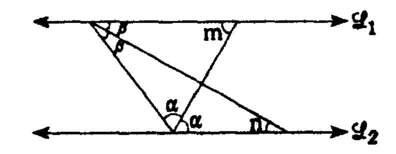
Teorema 3
En todo triángulo rectángulo, el producto de las longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a ésta.
En el ΔABC: $a.c = b.h$

Teorema 4
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
En el ΔABC: $h^2 = m.n$

Problemas Resueltos

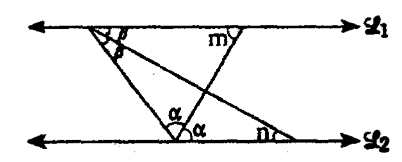
PROBLEMA 1

Del gráfico siguiente $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule el valor de m+n.



Resolución:

Piden: m+n



Del gráfico:

Por ángulos conjugados internos:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

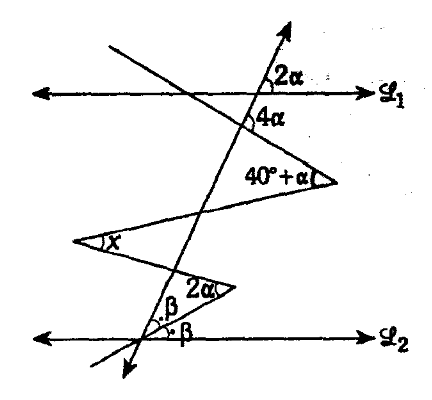
$\Rightarrow\ \alpha + \beta = 90°$

También por ángulos conjugados internos: $\alpha = m$ y $\beta = n$

$\therefore\ m+n = 90°$

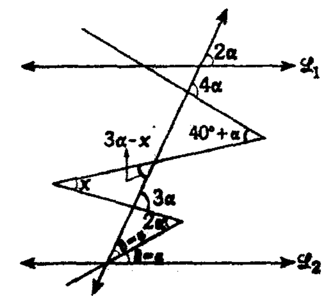
PROBLEMA 2

Según el gráfico $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$. Calcule x.



Resolución:

Piden x.



Por ángulos correspondientes: $\alpha = \beta$

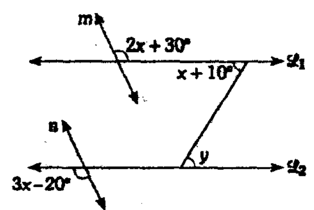
Por ángulo exterior

$\Rightarrow\ 4\alpha = (40° + \alpha) + (3\alpha - x)$

$\therefore\ x = 40°$

PROBLEMA 3

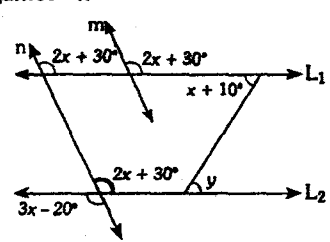
Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ y $\overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{n}$. Calcule el valor de y.



Resolución:

Piden y

Prolongamos $\overleftrightarrow{n}$



Utilizando los ángulos formados por rectas paralelas y una secante, se obtiene:

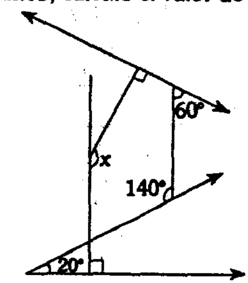
$3x - 20° = 2x + 30° \Rightarrow x = 50°$

También: $y = x + 10°$

$\therefore\ y = 60°$

PROBLEMA 4

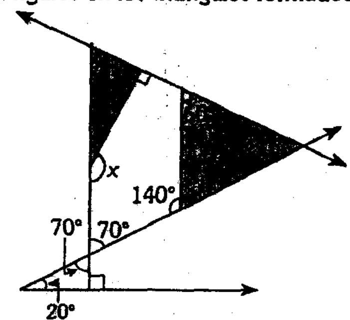
Según el gráfico, calcule el valor de x:



Resolución:

Piden x.

Prolongamos las rectas e indicando las medidas de los ángulos en los triángulos formados.



Se observa:

$x = 30° + 90°$

$\therefore \quad x = 120°$

PROBLEMA 5

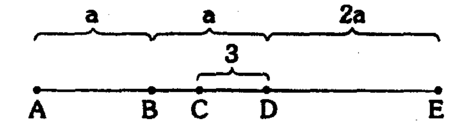
En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que B y D son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$, respectivamente. Si AB+DE=12 y CD=3; calcule AC.

Resolución:

Se sabe que: B es punto medio de $\overline{AD}$

Se sabe que: D es punto medio de $\overline{AE}$

Sea AB=a; entonces:



También se sabe que: AB+DE=12

$\Rightarrow$ a+2a=12 $\Rightarrow$ a=4

Nos piden: AC = AB + BC

AC = a + a − 3

AC = 4 + 4 − 3

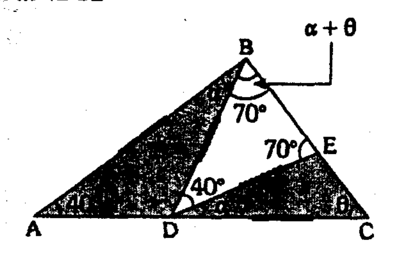
AC = 5

PROBLEMA 6

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BD tal que AB=DC. Si m∢BAD = 40° y m∢DBC = m∢ABD + m∢BCA, calcule la m∢DCB

Resolución:

Piden m∢DCB



$\Delta ABC: 40 + \alpha + \alpha + \theta + \theta = 180°$

$\alpha + \theta = 70°$

Se traza $\overline{DE}$; de modo que m∢EDB = 40°

$\Rightarrow$ m∢EDC = α

Por ángulo exterior en el ΔEDC:

$\Rightarrow$ m∢BED = α + θ = 70°

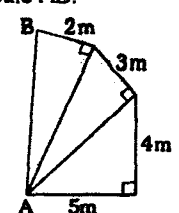
$\Rightarrow$ ΔBED es isósceles (BD = DE)

ΔABD ≅ ΔDEC (LAL)

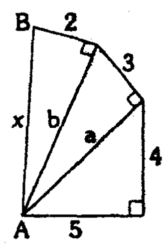
$\therefore \quad \theta = 40°$

PROBLEMA 7

Del gráfico calcule AB.



Resolución:
Piden x.



Por el Teorema de Pitágoras:

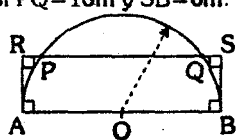
- $a^2 = 4^2 + 5^2$
- $b^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$
- $x^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow x^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$x = \sqrt{4+9+16+25} = \sqrt{54}$

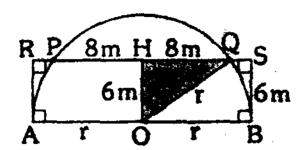
$\therefore \quad x = 3\sqrt{6}$

PROBLEMA 8

Calcule AB si PQ=16m y SB=6m. "O" centro.



Resolución:
Piden 2r.



Trazamos $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$

Por Teorema de Pitágoras:

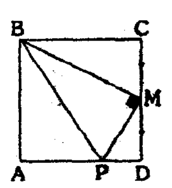
$r^2 = 6^2 + 8^2$

$r = 10m$

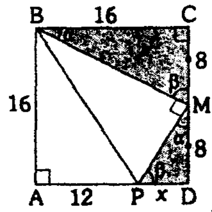
$\therefore \quad AB = 2r = 20m$

PROBLEMA 9

En el gráfico calcule BP. Si ABCD es un cuadrado, BC=16 cm y CM=MD



Resolución:
Piden BP



$\triangle BCM \sim \triangle MDP$

$\dfrac{8}{16} = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 4$

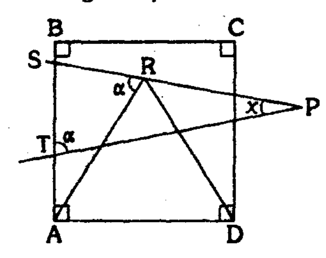
Luego: AP = 16 − 4 = 12 cm

El $\triangle BAP$ es notable (37° y 53°)

$\therefore \quad BP = 20$ cm

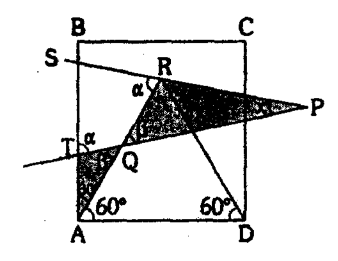
PROBLEMA 10

En la figura mostrada ABCD es un cuadrado y ARD es un triángulo equilátero. Calcule x.



Resolución:

Piden x



Por ángulo exterior:

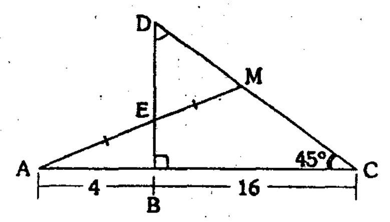
ΔATQ: $\alpha = 30° + \beta$

ΔQRP: $\alpha = x + \beta$

$\Rightarrow x = 30°$

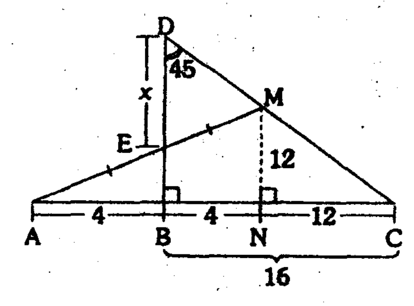
PROBLEMA 11

Del gráfico calcule DE, si AE=EM.



Resolución:

Piden x.



- Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{AC}$, entonces AB=BN=4 y NC=12.
- Del dato de 45°, el triángulo DBC es isósceles: BC=BD=16
- Entonces ΔMNC también debe ser isósceles: MN=12
- Por el Teorema de la Base Media:

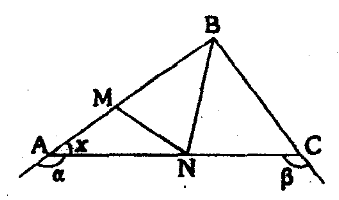
$$BE = \frac{MN}{2} = 6$$

$$x = BD - BE = 16 - 6$$

$\therefore \quad x = 10$

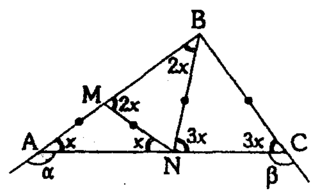
PROBLEMA 12

En la figura: AM=MN=NB=BC y $\alpha+\beta=252°$ Calcule x.



Resolución:

Piden x.



- El dato indica que los triángulos AMN, MNB y NBC son isósceles, con las medidas de sus ángulos se concluye:

$$\begin{aligned} x + \alpha &= 180° \\ 3x + \beta &= 180° \\ \hline 4x + \alpha + \beta &= 360 \end{aligned} \quad (+)$$

- Por dato: $\alpha + \beta = 252°$
- Entonces: $4x + 252° = 360° \Rightarrow 4x = 108°$

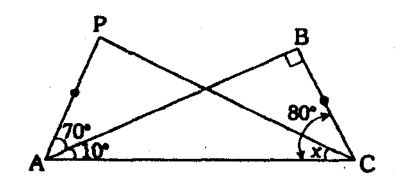
$\therefore \quad x = 27°$

PROBLEMA 13

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubica un punto exterior P relativo a $\overline{AB}$, tal que: m∢PAB=70°, m∢BAC=10°, y AP=BC. Calcule m∢PCA.

Resolución:

Piden x.



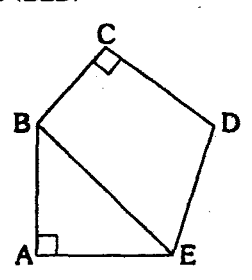
- En el ⊿ABC; como m∢BAC=10°, entonces m∢ACB=80°
- Por dato: AP=BC
- ΔABC ≅ APC (caso LAL)

$\Rightarrow$ m∢PCA = m∢BAC = 10°

$\therefore \quad x = 10°$

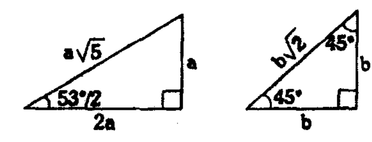
PROBLEMA 14

En la figura AB=BC=CD=AE=$3\sqrt{10}$, y DE=12. Calcule la m∢BED.

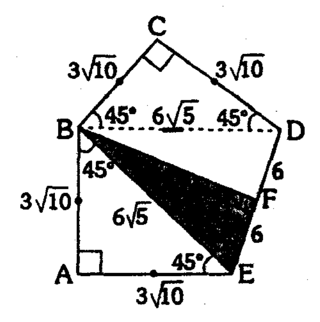


Resolución:

Sabemos:



Luego, con el problema:



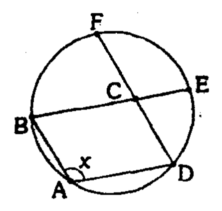
- ⊿BAE y ⊿BCD son notables, entonces BE=BD=$6\sqrt{5}$
- ΔEBD es isósceles
- Trazamos $\overline{BF} \perp \overline{ED}$, entonces EF=FD=6
- Luego ⊿BFE es notable: m∢FBE=$\dfrac{53°}{2}$

$$\Rightarrow x = 90° - \frac{53°}{2}$$

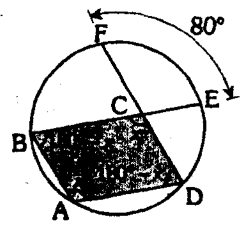
$$\therefore\ x = \frac{127°}{2}$$

PROBLEMA 15

En la figura ABCD es un romboide y $m\widehat{FE}=80°$, calcule x.



Resolución:



Piden x.

- En el romboide:

  m∢ADC=180°–x ⇒ $m\widehat{ABF}=360°-2x$

  m∢ABC=180°–x ⇒ $m\widehat{ADE}=360°-2x$

- Luego en la circunferencia:

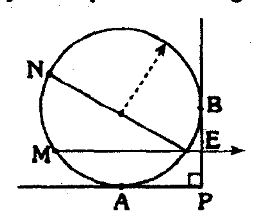
  $m\widehat{FE}+\widehat{ABF}+\widehat{ADE}=360°$

  $80°+360°-2x+360°-2x=360°$

$\therefore\ x = 110°$

PROBLEMA 16

En la figura, calcular la $m\widehat{MN}$; si: BE=EP, $\overline{EM}//\overline{AP}$; A y B son puntos de tangencia.

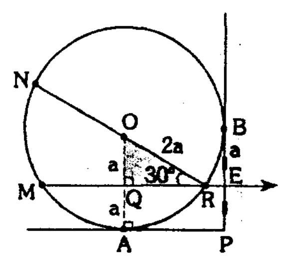


Resolución:

Piden $m\overset{\frown}{MN}$

Trazamos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ ⇒ $OQ=QA=BE=EP=a$

⇒ El radio es igual a 2a

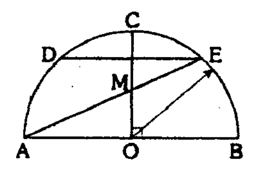


⊿OQR es notable (30° y 60°)

$m\angle ORQ=30°$ ⇒ $m\overset{\frown}{MN}=60°$

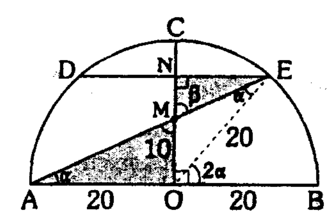
PROBLEMA 17

En la figura calcule DE, si M es punto medio de $\overline{OC}$; AB=40m y $\overline{DE}//\overline{AB}$.



Resolución:

Piden DE.



- Como $\overline{DE}//\overline{AB}$ ⇒ $\overline{ON}\perp\overline{DE}$

  Además DN=NE

- ⊿AOM es notable en 53°/2, es decir:

  $\alpha=\dfrac{53°}{2}$

  ⇒ $m\angle NOE=37°$

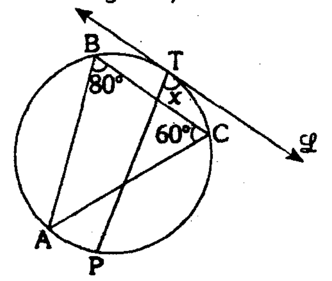
- ⊿NOE es notable (37° y 53°)

  ⇒ NE=12 m

∴ DE = 24 m

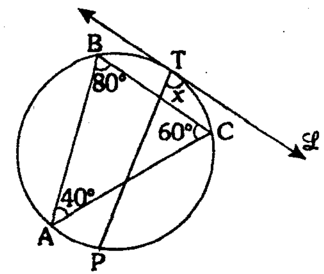
PROBLEMA 18

En la figura, calcule x, si $m\overset{\frown}{AP}=50°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}//\overline{BC}$ (T es punto de tangencia).



Resolución:

Piden x.



- Por ángulo semi–inscrito: $x=\dfrac{m\overset{\frown}{TCP}}{2}$

- En el ΔABC, se deduce que:

  $m\angle BAC=40°$ ⇒ $m\overset{\frown}{BC}=80°$ (∢ inscrito)

- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}//\overline{BC}$ ⇒ T es punto medio de $\overset{\frown}{BC}$

  ⇒ $m\overset{\frown}{BT}=m\overset{\frown}{TC}=40°$

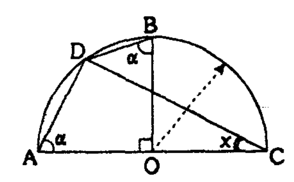
- Por ángulo inscrito: $m\overset{\frown}{APC}=160°$

- Del dato: $m\overset{\frown}{AP}=50°$ ⇒ $m\overset{\frown}{PC}=110°$

∴ $x=\dfrac{m\overset{\frown}{TC}+m\overset{\frown}{PC}}{2}=\dfrac{40°+110°}{2}=75°$

PROBLEMA 19

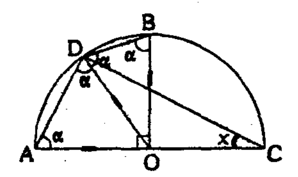
En la figura, calcule x.



Resolución:

Piden x.

- Trazamos $\overline{OD}$ ⇒ ΔAOD y ΔDOB son isósceles y congruentes.



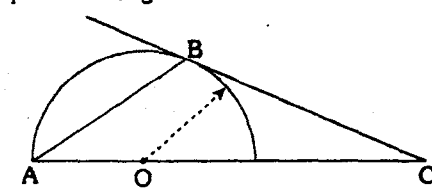
- AD = DB ⇒ $m\widehat{AD} = m\widehat{DB} = 45°$

$\therefore\quad x = \dfrac{m\widehat{AD}}{2} = \dfrac{45°}{2} = 22,5° = 22°\ 30'$

PROBLEMA 20

En el gráfico calcule la m∢ABC, si m∢BCA=20°

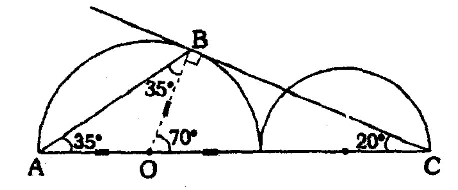
B: punto de tangencia



Resolución:

Piden m∢ABC

- Trazamos $\overline{OB}$



- En el ⊿OBC: m∢BOC = 70°
- El ΔAOB es isósceles y el ∢BOC es exterior

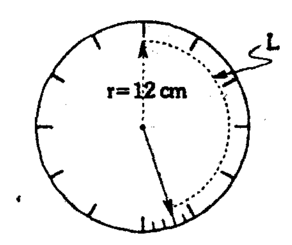
  ⇒ m∢BAO=m∢ABO=35°

∴ m∢ABC=35° + 90° = 125°

PROBLEMA 21

El minutero de un reloj tiene 12cm de longitud. ¿Cuántos centímetros recorrerá su punta en 27 minutos? (π=3,1416)

Resolución:



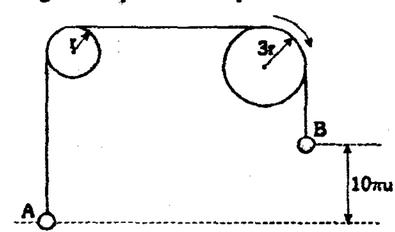
Tiempo		Recorrido
60 minutos	⇒	2π(12cm)
27 minutos	⇒	L

$$L = \frac{2(3,1416)(12)\times 27}{60}$$

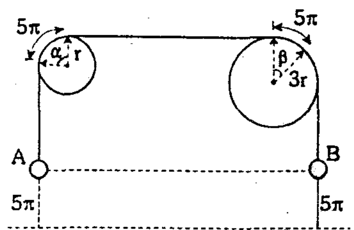
∴ L = 33,929 cm

PROBLEMA 22

En la siguiente figura, para que las esferas A y B lleguen al mismo nivel, la suma de medidas de los ángulos girados por ambas poleas es 4π. Halle r.



Resolución:



Por dato: $\alpha + \beta = 4\pi$

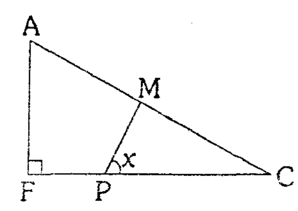
$\Rightarrow \dfrac{5\pi}{r} + \dfrac{5\pi}{3r} = 4\pi$

$\dfrac{20}{3r} = 4$

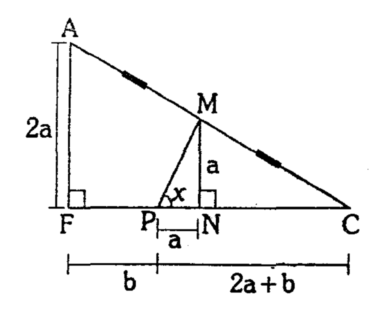
$\therefore \quad r = \dfrac{5}{3}\mu$

PROBLEMA 23

Según el gráfico, calcule el valor de x, si AM=MC y PC=AF+FP.



Resolución:



Piden x.

- Sea AF=2a y FP=b $\Rightarrow$ PC=2a + b
- Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{FC}$ $\Rightarrow$ $\overline{MN}$ es base media

$MN = \dfrac{AF}{2} = a$

- N es punto medio de $\overline{FC}$

$\Rightarrow$ FN = NC = a + b

- Luego: PN = FN – FP

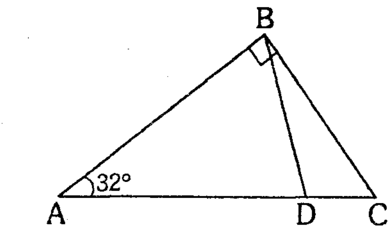
PN = (a+b) – b = a

- ◺PNM es isósceles: PN = MN = a

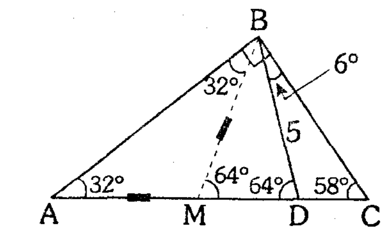
$\therefore \quad x = 45°$

PROBLEMA 24

En el gráfico mostrado BD = 5 y m∢DBC = 6° entonces AC es:



Resolución:



Piden AC.

- Trazamos la mediana BM.

$\Rightarrow$ AM = MC = BM

- ΔAMB es isósceles

m∢BAM = m∢ABN = 32°

- Por ángulo exterior:

m∢BMD = 32° + 32° = 64°

m∢BDM = 6° + 58° = 64°

- ΔMBD es isósceles

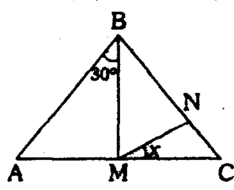
BM = BD = 5

$\therefore$ AC = AM + MC

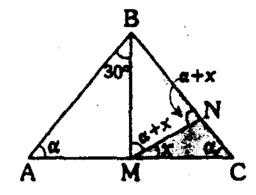
AC = 5 + 5 = 10

PROBLEMA 25

En el gráfico calcule x, si BC=AB, BM=BN



Resolución:



Piden x.

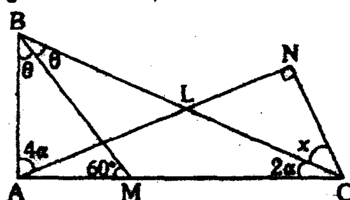
- Por dato: BC=AB $\Rightarrow$ $m\measuredangle BAM = m\measuredangle BCM = \alpha$
- Por propiedad de ángulo exterior:
  $m\measuredangle BNM = \alpha + x$
- Por dato: BM=BN
  $\Rightarrow$ $m\measuredangle BMN = m\measuredangle BNM = \alpha + x$
- Por propiedad de ángulo exterior, en el ΔABM:

$$\alpha + x + x = \alpha + 30°$$

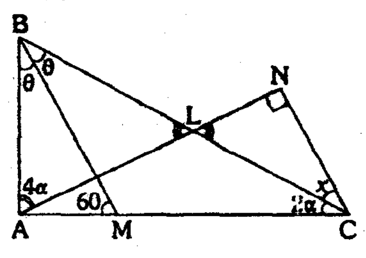
$\therefore \quad x = 15°$

PROBLEMA 26

En la figura mostrada, calcule x.



Resolución:

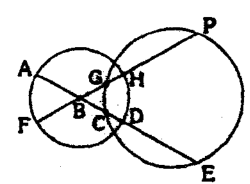


- De los triángulos ABL y CNL, por ser $\measuredangle BLA$ y $\measuredangle NLC$ opuestos por el vértice tenemos:
  $4\alpha + 2\theta = 90° + x$
  $\Rightarrow$ $x = 2(2\alpha + \theta) - 90°$ . . . . . . (I)
- Del triángulo MBC, por propiedad, tenemos:
  $2\alpha + \theta = 60$ . . . . . (II)
- Reemplazando (II) en (I) tenemos:
  $x = 2(60°) - 90°$
  $x = 30°$

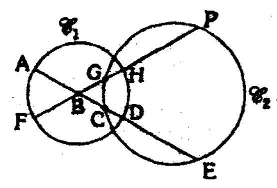
PROBLEMA 27

Según la figura, calcule: $m\widehat{PE} - m\widehat{AF}$

si: $m\widehat{HD} + m\widehat{GC} = 50°$



Resolución:



- Sabemos que:
  Por ángulo exterior en $\mathscr{C}_2$.

$$m\measuredangle GBC = \frac{m\widehat{PE} - m\widehat{GC}}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I)$$

Por ángulo interior en $\mathscr{C}_1$.

$$m\measuredangle GBC = \frac{m\widehat{AF} + m\widehat{HD}}{2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (II)$$

(I) = (II)

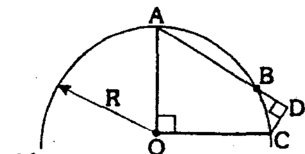
$$m\widehat{PE} - m\widehat{GC} = m\widehat{AF} + m\widehat{HD}$$

$$m\widehat{PE} - m\widehat{AF} = \underbrace{m\widehat{HD} + m\widehat{GC}}$$

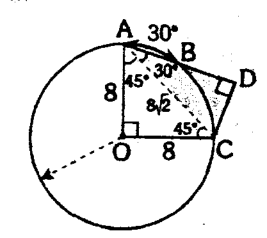
$$\therefore \quad m\widehat{PE} - m\widehat{AF} = 50°$$

PROBLEMA 28

Según el gráfico calcule CD, si $m\widehat{AB}=30°$ y $R=8\mu$



Resolución:



Piden CD.

- Trazamos $\overline{AC}$ ⇉ ⊿AOC es notable (45° y 45° ⇉ $AC=8\sqrt{2}\mu$
- Luego: $m\measuredangle BAC=\dfrac{m\widehat{BC}}{2}=\dfrac{60°}{2}=30°$
- ⊿ADC es notable (30° y 60°)

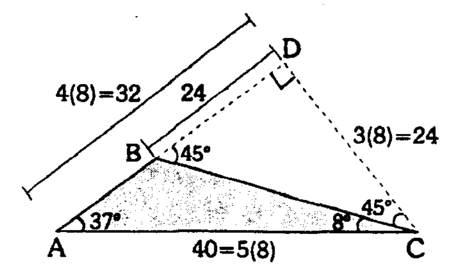
  $DC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2}\,\mu$

  $\therefore\ DC=4\sqrt{2}\mu$

PROBLEMA 29

Se traza un triángulo ABC tal que $m\measuredangle BAC=37°$, $m\measuredangle BCA=8°$ y $AC=40$. Calcule AB.

Resolución:



Piden AB.

- Prolongamos $\overline{AB}$ y trazamos $\overline{CD}\perp\overline{AB}$
- ⊿ADC es notable (37° y 53°) como AC=40 ⇉ AD=32 y DC=24
- ⊿BDC es notable (45° y 45°)

  ⇒ BD=DC=24
- Luego: AB = AD − BD

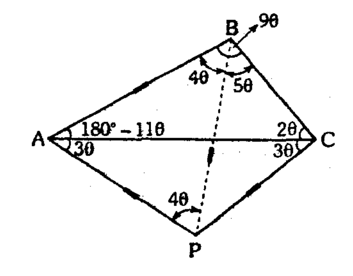
  AB = 32 − 24

  ∴ AB = 8

PROBLEMA 30

En la región exterior a un triángulo ABC y relativo al lado AC se ubica el punto P, tal que: AB=AP=PC; $m\measuredangle ABC=9\theta$; $m\measuredangle PAC=3\theta$ y $m\measuredangle ACB=2\theta$. Calcule θ.

Resolución:



Piden θ.

- ΔAPC es isósceles: $m\measuredangle CAP=m\measuredangle ACP=3\theta$
- En el ΔABC: $m\Delta BAC=180°-11\theta$
- Trazamos $\overline{PB}$ ⇉ ΔBAP es isósceles: AB=AP

  Como: $m\measuredangle BAP=180°-8\theta$

  ⇉ $m\measuredangle ABP=m\measuredangle BPA=4\theta$

  ⇉ $m\measuredangle PBC=5\theta$

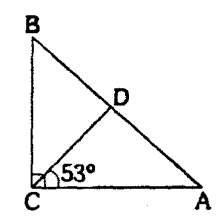
  ⇉ ΔBPC es isósceles: $m\measuredangle PBC=m\measuredangle PCB$

  ⇉ BP = PC
- Luego el ΔABP es equilátero: AB = AP = PB

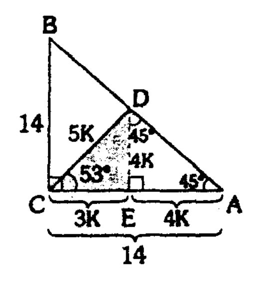
∴ $4\theta=60°$ ⇉ $\theta=15°$

PROBLEMA 31

En el triángulo mostrado, calcule CD, si los catetos miden 14cm.



Resolución:



Piden CD.

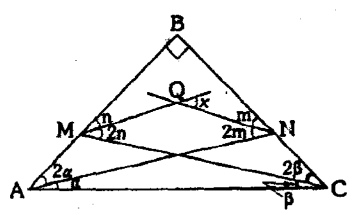
- Trazamos $\overline{DE} \perp \overline{CA}$
- ◺CED es notable (37° y 53°) ⇒ DE=4k, CE=3k y CD=5k
- ◺DEA es isósceles, DE = EA = 4k
- Del gráfico:

  $3k + 4k = 14 \Rightarrow k = 2$
- Luego:

  $CD = 5k = 5(2)\ \therefore\ CD = 10$ cm

PROBLEMA 32

Del gráfico, calcule x.

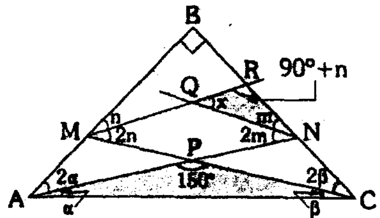


Resolución:

Piden x.

En el ◺ABC : $3\alpha + 3\beta = 90° \Rightarrow \alpha+\beta=30°$

En el ΔAPC : m∢APC = 150°



- Prolongamos $\overline{MQ}$

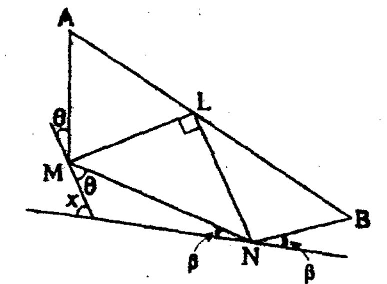
  ⇒ ΔMBR: m∢MRN=90°+n
- En el cuadrilátero MBNP:

  $90°+3n+150°+3m=360° \Rightarrow m+n=40°$
- En el ΔQRN

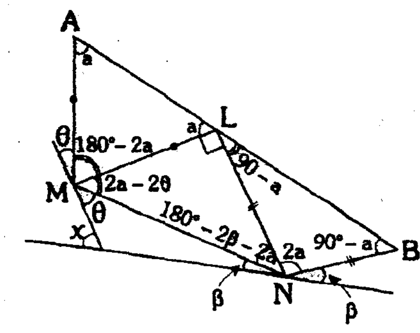
  $x + \underbrace{90°+n+m}_{40°}=180° \Rightarrow x=50°$

PROBLEMA 33

Del gráfico, calcule x, si: AM=ML y LN=NB



Resolución:



Del ΔMPN: $x = \theta + \beta$

Después de completar todos los ángulos y aprovechando la condición de los dos triángulos isósceles, obtenemos del ⊿MLN:

$$(2a - 2\theta) + (180° - 2\beta - 2a) = 90°$$

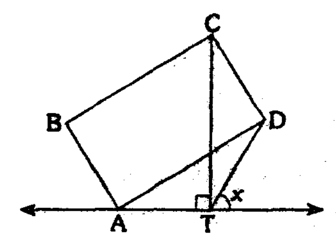
$$2\theta + 2\beta = 90°$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 45°$$

$$\therefore \quad x = 45°$$

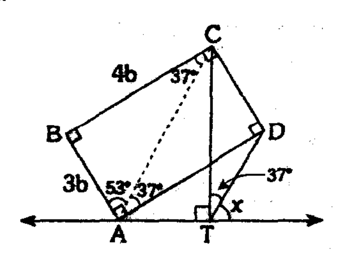
PROBLEMA 34

En la figura, ABCD es un rectángulo. Calcule x, si: 4AB=3BC



Resolución:

Piden x.



- Del dato: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AB=3b$; $BC=4b$
- Trazamos $\overline{AC} \Rightarrow$ ⊿ABC es notable (37° y 53°) y el cuadrilátero ATDC es inscriptible ($m\sphericalangle ADC = m\sphericalangle ATC = 90°$)

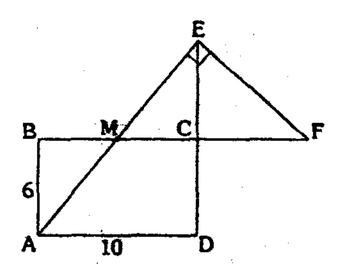
  $\Rightarrow m\sphericalangle CAD = m\sphericalangle CTD = 37°$

  $x + 37° = 90°$

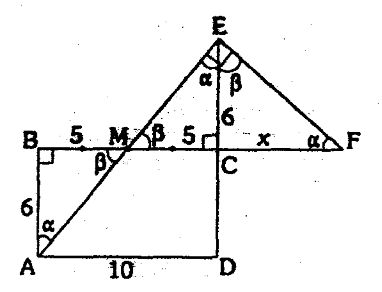
$\therefore \quad x = 53°$

PROBLEMA 35

En el gráfico ABCD: rectángulo, BM=MC. Calcule CF.



Resolución:



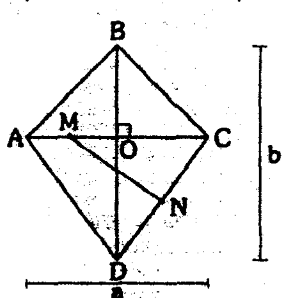
Piden x.

- Del gráfico ⊿ABM ≅ ⊿MCE, entonces: BA=CE=6
- Ahora en ⊿MEF por relaciones métricas: $6^2=5x$.

$\therefore \quad x = 7{,}2$

PROBLEMA 36

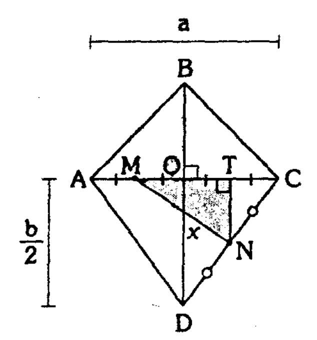
En el gráfico, ABCD es un rombo; calcule MN.



Resolución:

- Como ABCD es un rombo ⇒ $OD=\frac{b}{2}$ y $OC=\frac{a}{2}$
- Trazamos $\overline{NT} \perp \overline{AC}$ ⇒ T es punto medio de $\overline{OC}$
- En el ΔCOD : $\overline{NT}$ es base media

$$\Rightarrow NT=\frac{OD}{2}=\frac{b/2}{2}=\frac{b}{4}$$



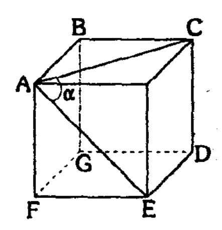
- También, del gráfico: $MT=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$
- Luego, en el ⊿MTN (Teorema de Pitágoras)

$$\Rightarrow x=\sqrt{MT^2+NT^2}$$

$$\therefore\ x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2}$$

PROBLEMA 37

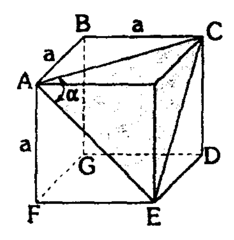
Calcule el valor del ángulo α, si la figura es un cubo.



Resolución:

Piden α.

- Trazamos $\overline{CE}$, luego AC=CE=EA (por ser diagonales de los cuadrados)

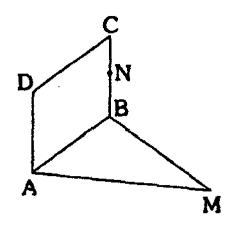


Entonces ΔACE es equilátero.

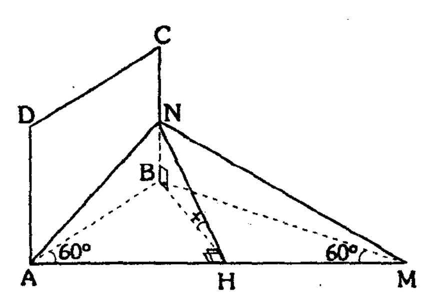
$\therefore\ \alpha=60°$

PROBLEMA 38

En el gráfico el cuadrado ABCD y el triángulo equilátero ABM, se encuentran en planos perpendiculares. Calcule la medida del diedro determinado por las regiones triangulares ABM y ANM siendo N punto medio $\overline{BC}$



Resolución:



- Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AM} \Rightarrow \overline{NH} \perp \overline{AM}$

  (Teorema de las tres perpendiculares)

  $\Rightarrow$ Piden x.

  Además: AH = HM = b

  $\Rightarrow$ AB = BC = 2b

  $\Rightarrow$ NB = b

- Luego ⊿ABH es notable (30° y 60°)

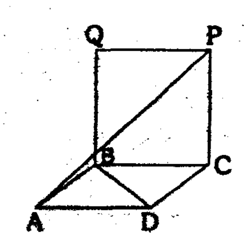
  $\Rightarrow$ $BH = b\sqrt{3}$

  $\Rightarrow$ ⊿NBH es notable.

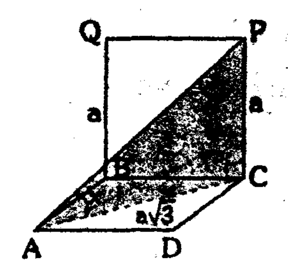
$\therefore$ $x = 30°$

PROBLEMA 39

En la figura el rectángulo ABCD y el cuadrado BCPQ están contenidos en planos perpendiculares. Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y el plano que contiene al rectángulo ABCD; si $BD = \sqrt{3}(BQ)$



Resolución:



Piden x.

- Sea BQ=a $\Rightarrow$ del dato: $BD = \sqrt{3}(BQ) = \sqrt{3}a$

- En el rectángulo ABCD:

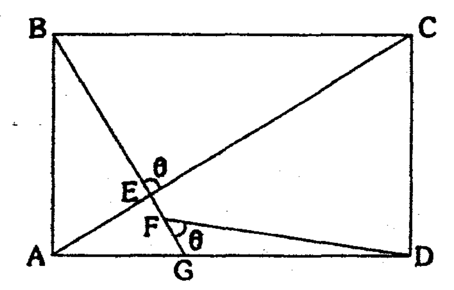
  $BD = AC = \sqrt{3}a$

  $\Rightarrow$ ⊿ACP es notable (30° y 60°)

$\therefore$ $x = 30°$

PROBLEMA 40

En la figura ABCD es un rectángulo, donde AE=4, FD=8. Calcule EC.



Resolución:

Piden EC.

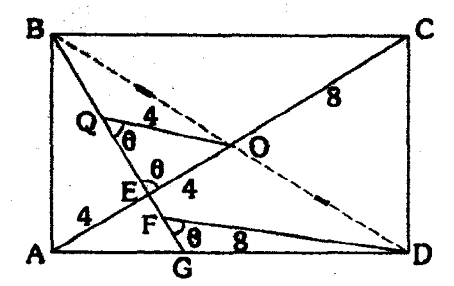
- Trazamos BD $\Rightarrow$ BO=OD
- En el ΔBDF: trazamos $\overline{OQ} // \overline{DF}$

  $\Rightarrow$ $\overline{OQ}$ es base media del ΔBDF, entonces

  $OQ = \frac{FD}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

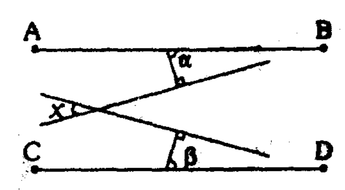
- Ahora m∢OQE=m∢DFG=θ (por paralelas) entonces el ΔQEO es isósceles, OQ=OE=4.
- Luego OC=OA=8

$\therefore$ EC=12



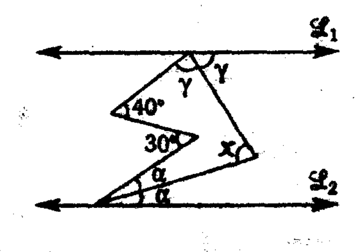
Problemas Propuestos

1. Si: $\overline{AB} // \overline{CD}$, además $\alpha+\beta=140°$.
Calcule: x



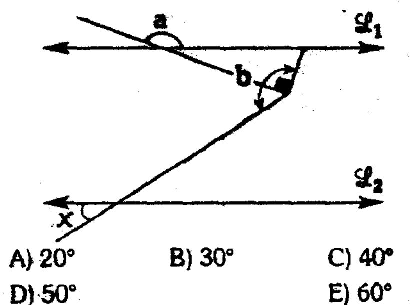
A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 30°

2. En el gráfico mostrado $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$
Calcule: x



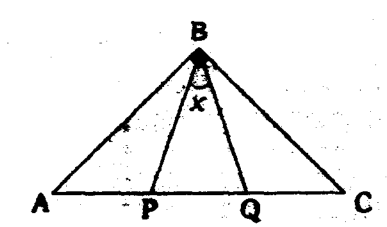
A) 85° B) 80° C) 75°
D) 60° E) 45°

3. Calcule x, si se sabe que:
$a + b = 300°$
además $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$



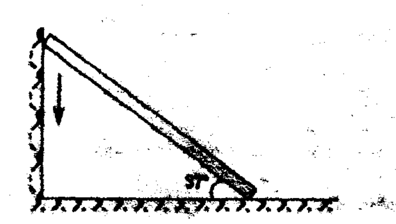
A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

4. En la figura AB=BC y AP=PQ=QC.
Calcule x.



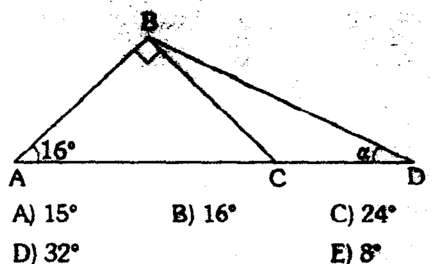
A) 53°/2 B) 37°/2 C) 37°
D) 53° E) 45°

5. La figura muestra una barra de 10 m de longitud, que forma 37° con el piso. Si su extremo superior se desliza verticalmente 1 m hacia el piso. ¿Qué ángulo formará ahora con el piso?



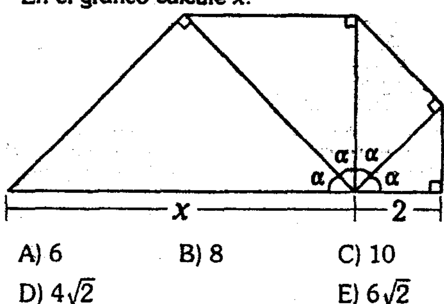
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 33° E) 53°

6. Halle α, si AC=2(BD).



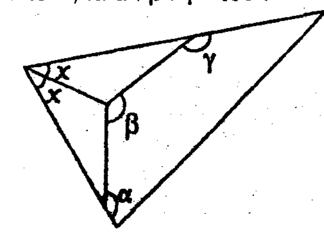
A) 15° B) 16° C) 24°
D) 32° E) 8°

7. En el gráfico calcule x.



A) 6 B) 8 C) 10
D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

8. Calcule x, si: $\alpha+\beta+\gamma=400°$.



A) 30° B) 40° C) 15°
D) 20° E) 25°

9. Calcule α en la figura mostrada:

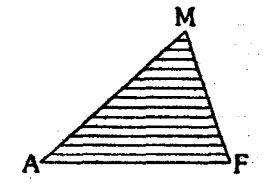
A) 40°
B) 50°
C) 30°
D) 45°
E) 60°

10. El suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es igual a 2/3 de la diferencia entre el suplemento del ángulo y el suplemento del suplemento del mismo ángulo. Calcule la medida de dicho ángulo.

A) 20° B) 30° C) 25°
D) 22,5° E) 40°

11. Halle la suma de la medida de los segmentos paralelos a $\overline{AF}$, si ellos dividen a $\overline{AM}$ en partes de longitudes iguales y $AF=7\mu$.

A) 45μ
B) 40μ
C) $45,5\mu$
D) 39μ
E) 49μ

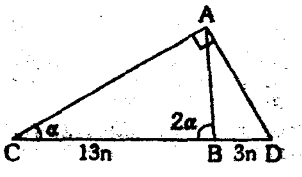


12. Si al suplemento de un ángulo le disminuimos el doble de su complemento, resulta 3/7 del suplemento de dicho ángulo. Calcule su medida.

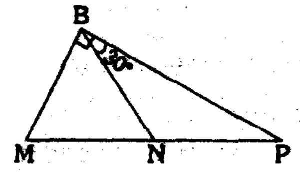
A) 50° B) 45° C) 60°
D) 48° E) 54°

13. Calcule la longitud de $\overline{AB}$, en el gráfico mostrado:

A) 6 n
B) 7 n
C) 8 n
D) 9 n
E) 10 n



14. En la figura, calcule BN; si: BP=2; BM=$\sqrt{3}$

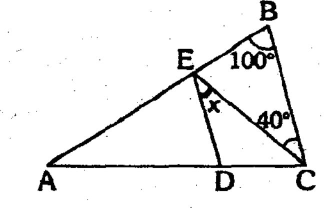


A) $\frac{2}{5}\sqrt{2}$ B) $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ C) $\frac{2}{7}\sqrt{3}$

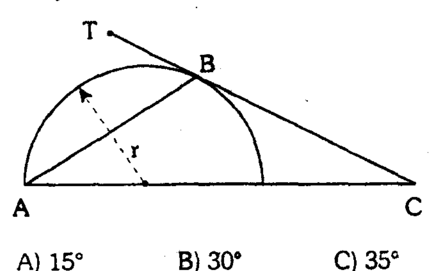
D) $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ E) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

15. De la figura mostrada, calcule x; si AE=EC, EB=CD.

A) 30°
B) 20°
C) 40°
D) 35°
E) 25°



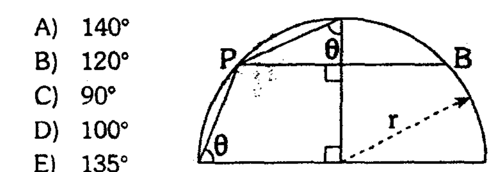
16. En el gráfico, calcule m∢BCA, si m∢TBA=55°.
B: punto de tangencia.



A) 15° B) 30° C) 35°
D) 20° E) 10°

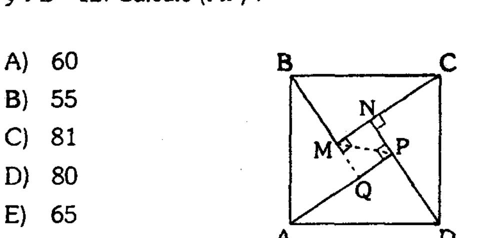
17. En la figura, calcule la $m\overset{\frown}{PB}$.

A) 140°
B) 120°
C) 90°
D) 100°
E) 135°



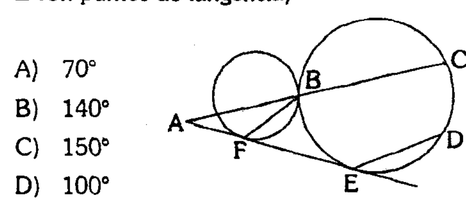
18. Si: ABCD es un rectángulo, AB=25, BC=20 y PD=12. Calcule $(MP)^2$.

A) 60
B) 55
C) 81
D) 80
E) 65



19. En el gráfico, calcule la $m\overset{\frown}{BED}$, si m∢BAE=20° y AF=FB, y $\overline{AC} // \overline{ED}$. (B, F y E son puntos de tangencia)

A) 70°
B) 140°
C) 150°
D) 100°
E) 120°

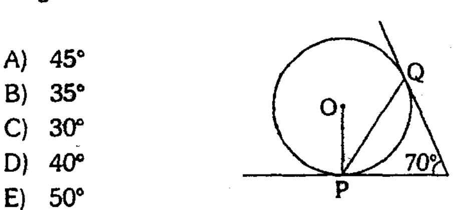


20. En la figura mostrada, se tiene $\overline{AB}$: lado de un exágono regular inscrito y $\overline{CD}$: lado del triángulo equilátero inscrito.
Calcule: m∢AMD.

A) 80°
B) 100°
C) 110°
D) 90°
E) 70°

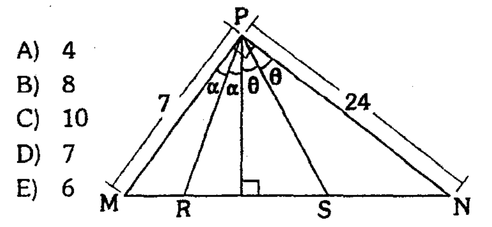
21. Dada la figura, calcule la m∢OPQ, si O es centro. Además P y Q son puntos de tangencia.

A) 45°
B) 35°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

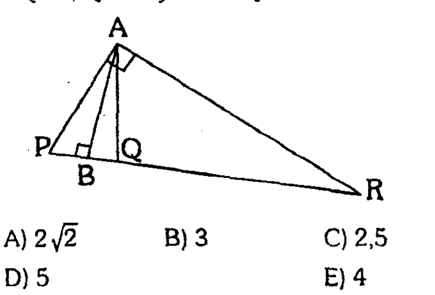


22. En la figura, se muestra un triángulo rectángulo recto en P.
Calcule RS.

A) 4
B) 8
C) 10
D) 7
E) 6

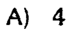
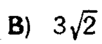
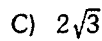


23. En el triángulo mostrado, calcule AB, si PQ=2, QR=7 y AP=AQ.



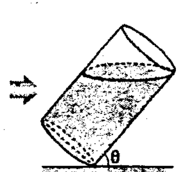
A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) 2,5
D) 5 E) 4

24. Una araña teje su tela en el marco de una ventana, para ello dispone 4 hilos que parten cada uno de un distinto vértice. Si 3 de ellos miden 3, 4 y 5 m, el cuarto hilo medirá:


A) 4

B) $3\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{3}$
D) 3,5
E) 5

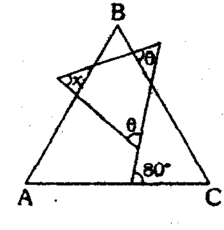
25. En la figura, calcule el ángulo θ; para el cual la caída del agua en el vaso es inminente:

A) 30°
B) 60°
C) 45°
D) 50°
E) 37°

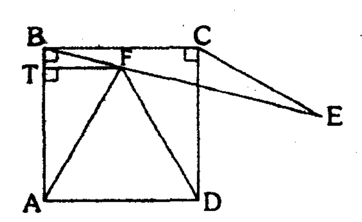


26. En la figura AB=BC=AC. Halle x.

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 35°



27. Calcule FE, si ABCD es un cuadrado, AFD es un triángulo equilátero, además TF=5 cm y CE=10 cm.



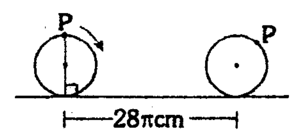
A) 10 cm B) 12 cm C) 15 cm
D) $10\sqrt{2}$ cm E) $10\sqrt{3}$ cm

28. En la figura, calcule α; si AB = BC = CD.

A) 30°
B) 45°
C) 20°
D) 15°
E) 25°

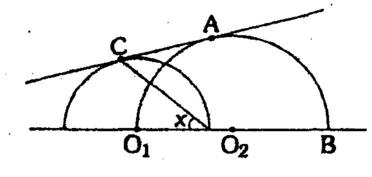
29. En la figura se muestra una rueda cuyo diámetro es 2 cm. Si la rueda gira, sin resbalar, una distancia de 28 πcm. ¿A qué altura se encontrará el punto P?

A) 1cm
B) 1/2 cm
C) 3/2 cm
D) 2 cm
E) 3/4 cm



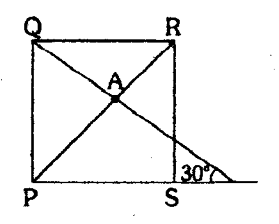
30. Si $m\widehat{AB} = 100°$, O_1 y O_2 son centros de las semicircunferencias, además A y C son puntos de tangencia. Calcule x.

A) 80°
B) 50°
C) 40°
D) 45°
E) 30°



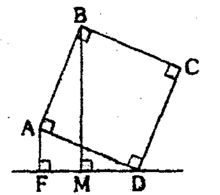
31. Si se desea que el área de la región cuadrada PQRS sea $(4+2\sqrt{3})cm^2$. Entonces AP deberá medir:

A) $\sqrt{2}$ cm
B) $\sqrt{3}$ cm
C) $\sqrt{5}$ cm
D) $\sqrt{6}$ cm
E) $\sqrt{7}$ cm



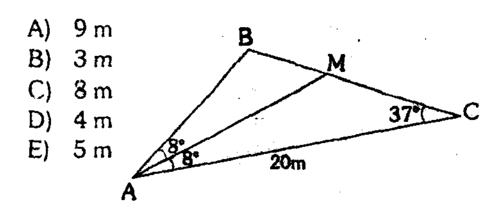
32. En la figura: ABCD es un cuadrado, donde AF=2m y FD=5m. Calcule BM.

A) 6m
B) 8m
C) 9m
D) 7m
E) 10m



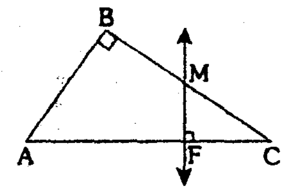
33. En la figura calcule la medida de $\overline{CM}$.

A) 9 m
B) 3 m
C) 8 m
D) 4 m
E) 5 m



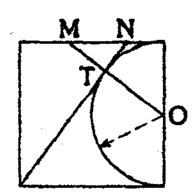
34. Calcule BM; si $\overline{MF}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, AC=12 y BC=10 m.

A) 2,5 m
B) 3 m
C) 4 m
D) 2 m
E) 2,8 m



35. El lado cuadrado mostrado mide 12μ. Calcule MN, si T es punto de tangencia.

A) 3μ
B) 4μ
C) 5μ
D) 6μ
E) 7μ



36. Sobre el suelo se ha dibujado un polígono de "n" lados. Un tirador se para sobre un vértice y dispara sobre los otros. Si esto lo repite sobre cada uno de los vértices, en total, ha disparado 90 tiros. ¿Cuántos lados tienen el polígono?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

37. Sobre los lados de un cuadrado de lado k, se trazan rectángulos congruentes, la altura que deben tener estos rectángulos para que al unir los vértices resulte un octógono regular, es:

A) $k\sqrt{2}$ B) $k\sqrt{3}$ C) $\frac{k\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{k\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{k\sqrt{2}}{2}$

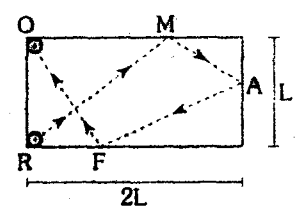
38. Se muestra una mesa de billar, desde el punto R se lanza una bola que toca sucesivamente en M, A, F y, finalmente. toca con otra bola en O. Entonces, $\overline{OM}$ mide:

A) $\frac{4L}{3}$

B) $\frac{2L}{3}$

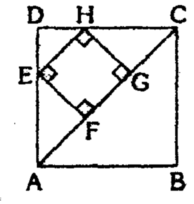
C) $\frac{2L}{5}$

D) $\frac{3L}{5}$ E) $\frac{1L}{3}$



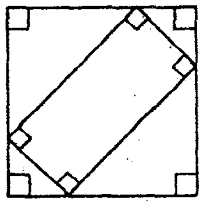
39. En la figura mostrada, ABCD es un cuadrado de lado "n", EFGH, un cuadrado de lado m. Halle m/nz12.

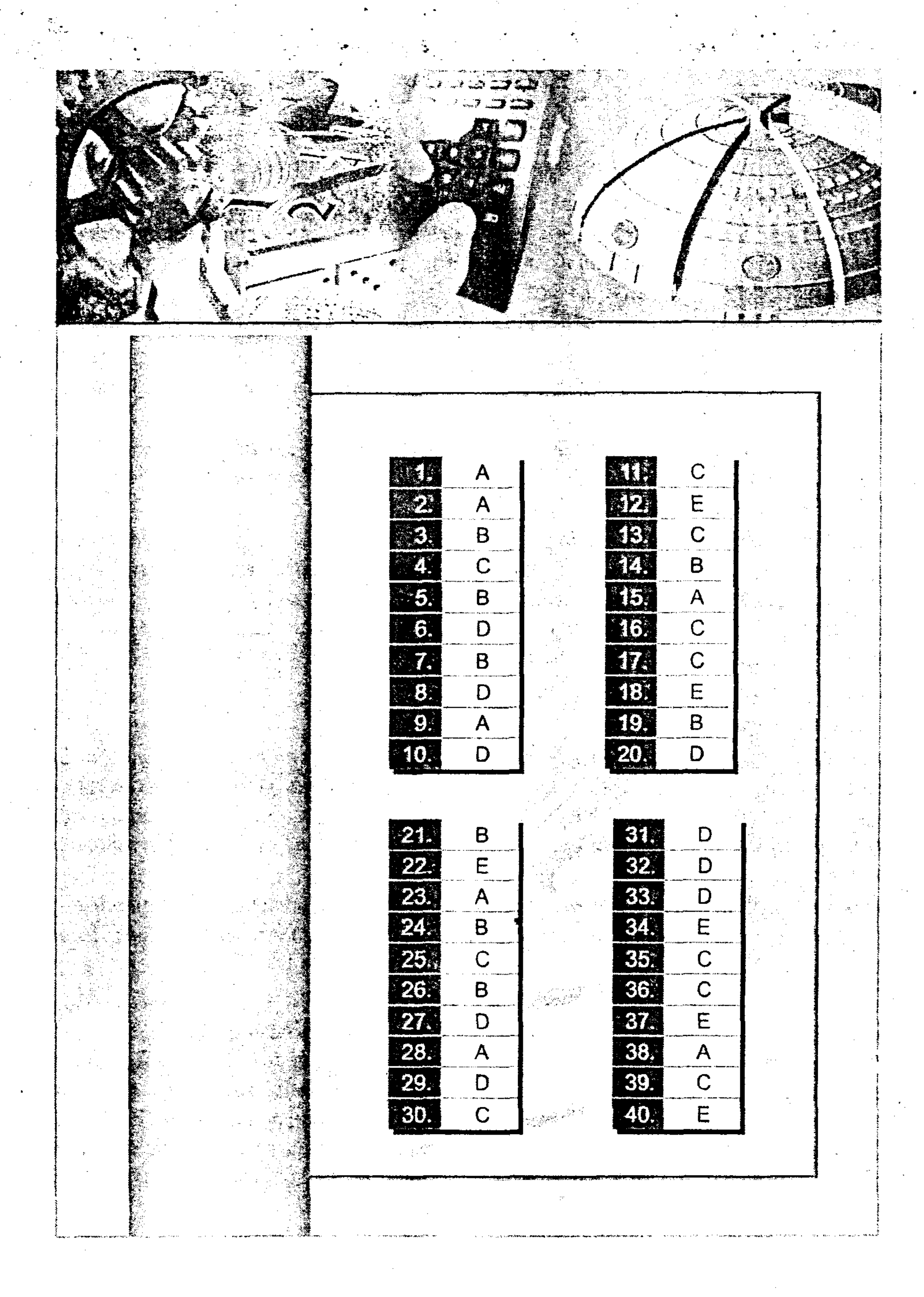
A) 3/5
B) $\sqrt{3}/2$
C) $\sqrt{2}/3$
D) 1/4
E) 2/3



40. El lado del cuadrado mide $3\sqrt{2}$ cm. Entonces el perímetro de la región rectangular inscrita es:

A) 10 cm
B) $6\sqrt{3}$ cm
C) $12\sqrt{2}$ cm
D) 8 cm
E) 12 cm





1.	A	11.	C
2.	A	12.	E
3.	B	13.	C
4.	C	14.	B
5.	B	15.	A
6.	D	16.	C
7.	B	17.	C
8.	D	18.	E
9.	A	19.	B
10.	D	20.	D

21.	B	31.	D
22.	E	32.	D
23.	A	33.	D
24.	B	34.	E
25.	C	35.	C
26.	B	36.	C
27.	D	37.	E
28.	A	38.	A
29.	D	39.	C
30.	C	40.	E

Euclides

La muerte de Alejandro Magno había conducido a una feroz contienda entre los generales del ejército griego. Pero, hacia el año 306 a.n.e. el control de la parte egipcia del imperio estaba ya firmemente en las manos de Ptolomeo I[1], y este ilustrado gobernante pudo dirigir al fin su atención a esfuerzos más constructivos.

Entre sus primeras decisiones estuvo el establecimiento de una escuela o instituto en Alejandría[2], conocido como el Museo; y, como integrantes de esta escuela, hizo llamar a un grupo de sabios de primera línea, entre los cuales estaba el autor del texto de matemáticas de éxito más fabuloso que se haya escrito nunca: "Los elementos de Euclides".

Todo, lo que se sabe de Euclides se debe a lo que escribió Proclo, el historiador de la matemática griega. El nos dice que Euclides nació en Grecia, que estudió en la "Academia", el centro de estudios fundado por Platón en el año 380 a.n.e.

Las leyendas asociadas a Euclides nos lo pintan como un viejo amable y gentil, quien escribió sobre música y sobre óptica; tiene también una obra titulada "sofismas" (para ejercitar la inteligencia); pero se le conoce más por sus trabajos en matemáticas, que durante más de 20 siglos se consideró la base de los conocimientos matemáticas en todo el mundo y que todavía hoy se toma como fundamento de la geometría, en la enseñanza media actual:

– Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.

– El todo es mayor que la parte, etc.

Cuenta Proclo que uno de sus alumnos le preguntó qué utilidad tenía estudiar geometría. Euclides ordenó a uno de sus esclavos que le diera unas monedas, "ya que debe ganar algo necesariamente de lo que aprende". También cuenta que un día Ptolomeo I preguntó si no existía un camino más breve que el de los elementos para estudiar geometría, la respuesta fue que no existía ningún camino especial para los reyes.

Cuando Alejandro Magno conquistó Egipto, fundó una nueva ciudad llamada Alejandría. En ella se construyeron una biblioteca maravillosa y una universidad. Llegó a ser el lugar más visitado y al que viajaban más personas para estudiar.

Destacados matemáticos, como Euclides, se trasladaron desde Grecia para trabajar en Alejandría.

*Euclides estaba especialmente interesado en la Geometría y escribió un libro de texto llamado **Elementos**, que se ha descrito como "el libro más estudiado después de la Biblia". Durante más de **2000** años, los escolares estudiaron el libro de texto de Euclides como introducción a la Geometría. Incluso los libros de esta materia que utilizamos en la actualidad están basados en él. Euclides escribió otros libros, pero muchos se han perdido. Aunque parezca extraño, no sabemos nada sobre la vida de Euclides, ni siquiera cuándo nació o murió, pero su nombre sigue siendo uno de los más famosos en el mundo de las matemáticas.*

---

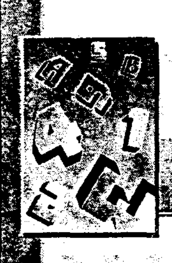
(1) No confundir con el astrónomo Claudio Ptolomeo que vivió en el siglo II y fue creador de la Teoría Geocéntrica del Mundo.

(2) Ciudad fundada en el año 332 a.C. por Alejandro Magno.

PERÍMETROS y ÁREAS de REGIONES PLANAS

"A la matemática no le importa tanto la materia en sí, sino las formas que ésta adopta". Los objetos no son motivo de su estudio, sino sus interrelaciones. Así, es indiferente reemplazarlos por otros mientras las relaciones no varíen.

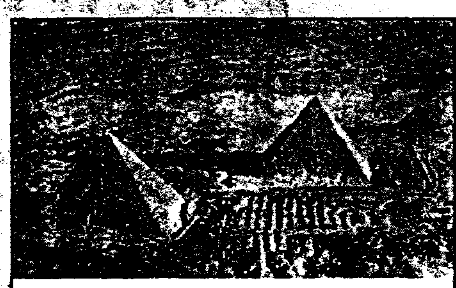
Poincaré



Lectura 18

Las Pirámides: Manifestaciones Geométricas Egipcias

La pirámide de Keops tiene como base un cuadrado perfecto y sus caras son triángulos equiláteros orientados a los cuatro puntos cardinales.



"Todo le teme al tiempo pero el tiempo le teme a las pirámides". Obra maestra de la arquitectura egipcia y única de las siete maravillas del mundo antiguo que queda en pie.

La cara sur está construida de tal modo que recibe perpendicularmente la luz de Sirio y al pasar por el meridiano alumbra un conducto de ventilación que termina en la Cámara del rey. En la cara norte está la galería de entrada, que conduce a la cámara subterránea; paralela a ella hay otro conducto de ventilación, orientado hacia la estrella polar de la época (Alfa de la constelación del Dragón) que no es la de hoy, ya que el eje del mundo, a causa del movimiento de balanceo de la Tierra, describe un círculo alrededor del polo ideal y es preciso que transcurran veinticinco mil ochocientos años para que vuelva a la misma posición.

La Cámara del Rey está unida por una galería a la de entrada, la cual recibe la luz de la estrella polar en el momento de su paso inferior por el meridiano.
Las dimensiones de la cripta faraónica son proporcionales a 3, 4 y 5, números que según Plutarco representan a los dioses Horus, Osiris e Isis, respectivamente.

En el centro de la Cámara del Rey se alza una especie de pilón de granito rojo pulimentado, tallado en ángulos rectos, cuyo volumen es sesenta y nueve mil pulgadas cúbicas piramidales, que es un décimo del cociente de un cubo de cincuenta pulgadas (fracción del eje terrestre), por la densidad media de la Tierra, que a presión normal representa la unidad de peso en la escala de la pirámide y el volumen exterior del misterioso cofre es doble de su capacidad y coincide con el del Arca de la Alianza, que, según la Biblia, había construido Moisés para guardar las Tablas de la Ley y cuya medida anota en el Éxodo el historiador sagrado.

Una leyenda difundida por los autores griegos atribuye la invención de la geometría a los egipcios (siglo IV a.C.). Se dice que ésta se debió a la necesidad de volver a encontrar los límites de los campos después de las inundaciones del Nilo.

FUENTE: El mundo de las matemáticas.

ÁREA DE REGIONES SOMBREADAS

Objetivos

1. *Desarrollar la capacidad de abstracción, utilizando ahora los conceptos de perímetro y área de regiones planas.*
2. *Utilizar, de manera adecuada, las fórmulas para el cálculo de áreas de regiones limitadas por figuras geométricas conocidas.*
3. *Relacionar con la realidad los conceptos de área y perímetro.*

Introducción

En las matemáticas, uno de los aspectos más importantes que influye en el aprendizaje de usted, estimado lector, es la capacidad de abstracción que pueda tener. Hablamos de triángulos, cubos, troncos de pirámides, binomio suma al cuadrado, teorema de Pitágoras, etc. y muchas veces no entendemos, con claridad, lo que se nos explica, lo que quisiéramos palpar, maniobrar, experimentar, medir, para entender cabalmente lo que se nos dice en clase. Esto sucede, principalmente, porque no hemos desarrollado adecuadamente esta capacidad; uno de los capítulos, dentro de nuestro curso, que enfatiza bastante en el ejercicio para el desarrollo de nuestra capacidad de abstracción es el de razonamiento geométrico, en perímetros y áreas de regiones sombreadas.

Ya que estamos empezando, veamos cómo resuelve usted la siguiente situación: "Un maestro le dice a su alumno que tome un pliego de cartulina y que dibuje una figura cerrada de cualquier forma (digamos como la que se indica en la figura 1). Luego, le pide que calcule el área de la región limitada por esa figura cerrada. Para ello le proporciona una tijera y una balanza de precisión, además le dice que el área de una región limitada por un rectángulo es igual al producto de la longitud de la base por la altura". Bien, estimado estudiante piense, y trate de dar una respuesta a este problema, para luego ver si su respuesta coincide con la solución que dio el alumno a su profesor.

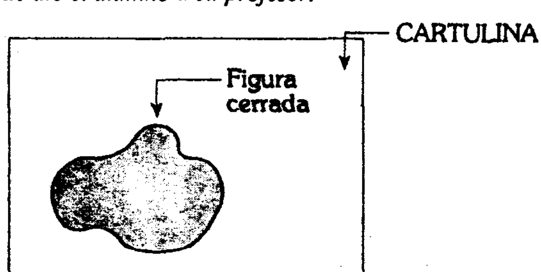


Figura 1

Estamos seguros de que usted ya tiene una respuesta para indicarnos cómo calcular el área de dicha región encerrada; veamos si coincide con la solución del alumno: "Con la tijera se corta por su contorno a la región encerrada y, luego, en una esquina de la cartulina se recorta un rectángulo (ver figura 2), de modo que un lado mida un número exacto de centímetros y el otro lado no necesariamente, pero sí que sea más largo (que el rectángulo sea más grande que la región). Luego, en la balanza se compara los pesos de ambos trozos de cartulina y como se supone no van a ser iguales; entonces a la región rectangular se le va recortando poco a poco hasta que su peso coincida aproximadamente con el peso del otro trozo del cual queremos calcular su área. Una vez que los pesos de los trozos coincidan, tendremos que el área de ambos trozos serán aproximadamente iguales y fácilmente la calculamos multiplicando las longitudes de los lados del rectángulo". ¡Qué ingeniosa solución, verdad!.

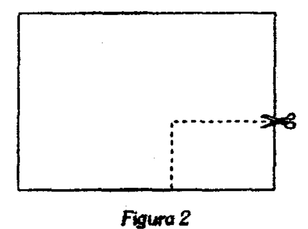


Figura 2

Para empezar el tema de perímetros y áreas, daremos primero los conceptos respectivos; posteriormente veremos su aplicación en figuras geométricas como el triángulo, cuadriláteros, circunferencias y sus respectivas regiones.

PERÍMETRO Y ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

¿Qué es una región plana?

Es una porción de plano cuyo contorno es una línea cerrada. La línea que limita a la región puede ser poligonal o una curva cualquiera.

¿A qué se llama área de una región?

Es la medida de una región que indica cuántas veces contiene dicha región **a la región unitaria**.

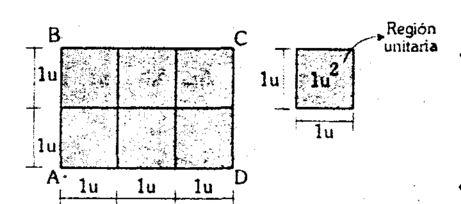
¿Qué es una región unitaria?

Convencionalmente es una región cuadrada, cuyo lado mide la unidad de longitud (1 u) y su área es una unidad cuadrada (1 u^2).

¿Qué es el perímetro de una región?

Es la medida de la longitud de la línea (o líneas) que conforma el borde o contorno de una región. El perímetro de una región se denota como: 2p

Ejemplo:



- La región ABCD contiene 6 veces a la región unitaria.

  $\Rightarrow A_{\square ABCD} = 6(1u^2) = 6u^2$

- Perímetro de $\square$ABCD : 2p

  $\Rightarrow 2p = 2u + 2u + 3u + 3u = 10\,u$

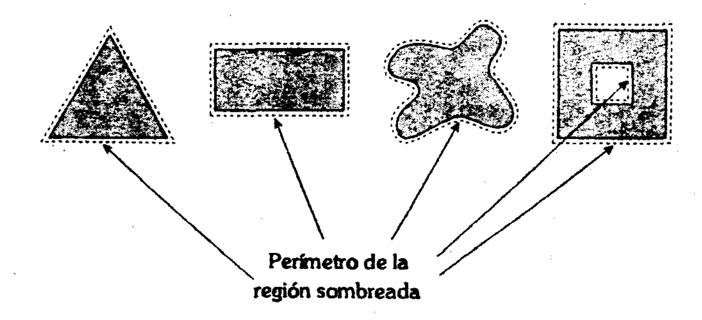
Observación: p : semiperímetro de una región.
2p: perímetro de una región.

A continuación haremos un estudio práctico, por separado, de perímetros y áreas.

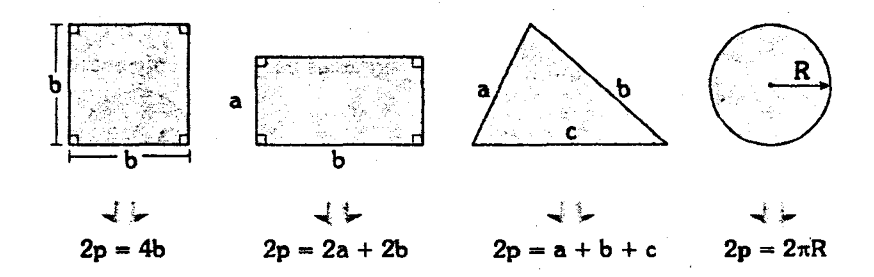
PERÍMETROS

Como ha sido ya mencionado, a la medida del borde o contorno de una región se le denomina **perímetro**.

Ejemplo:



Seguidamente se anota el perímetro de las principales regiones planas:

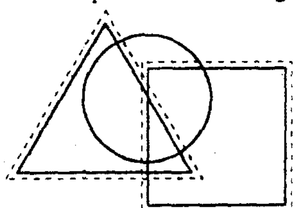


$2p = 4b$ $\qquad$ $2p = 2a + 2b$ $\qquad$ $2p = a + b + c$ $\qquad$ $2p = 2\pi R$

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1

Halle el perímetro de la región sombreada:

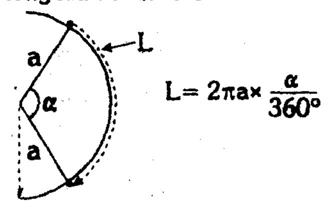


Se observa que el perímetro total de la región sombreada es:

Perímetro△ + Perim○ + Perim□

Ejemplo 2

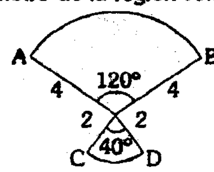
Halle la longitud de un arco.



$$L = 2\pi a \times \frac{\alpha}{360°}$$

Ejemplo 3

Halle el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

$$\text{Longitud de } \widehat{AB} = 2\pi(4) \times \frac{120}{360} = \frac{8\pi}{3}$$

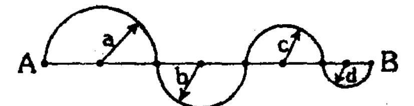
$$\text{Longitud de } \widehat{CD} = 2\pi(2) \times \frac{40}{360} = \frac{4\pi}{9}$$

$$\therefore \text{ Perímetro} = \frac{8\pi}{3} + 4 + 4 + \frac{4\pi}{9} + 2 + 2$$

$$= \frac{28}{9}\pi + 12 = \frac{28\pi + 108}{9}$$

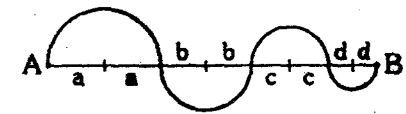
Ejemplo 4

Calcule la longitud de la línea curva, formada por semicircunferencias que van desde A hasta B y que corte al segmento AB en los puntos mostrados.



Resolución:

Debemos considerar que el contorno de una curva, formado por semicircunferencias y que corta al segmento se calcula como sigue:



Longitud de toda la curva:

$$\pi a + \pi b + \pi c + \pi d = \pi(a + b + c + d)$$

Como:

$$AB = 2a + 2b + 2c + 2d$$

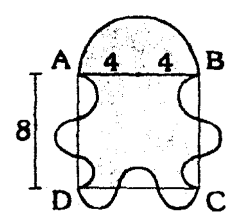
$$\rightarrow a + b + c + d = \frac{AB}{2}$$

Luego:

$$\text{Longitud de la curva} = \pi\,\frac{AB}{2}$$

Ejemplo 5

Halle el perímetro de la región sombreada, si el lado de cuadrado es 8 cm; las curvas están formadas por semicircunferencias.



Resolución:

Considerando el ejemplo anterior (ejemplo 4) concluimos que:

$\Rightarrow$ Long. curva $AB = \pi\dfrac{AB}{2} = 4\pi$

Long. curva $BC = \pi\dfrac{BC}{2} = 4\pi$

Long. curva $CD = \pi\dfrac{CD}{2} = 4\pi$

Long. curva $DA = \pi\dfrac{DA}{2} = 4\pi$

$\therefore$ Perímetro de la región sombreada: 16π

Ejemplo 6

Halle el perímetro de la región sombreada si:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 12\text{ u}$$

Resolución:

El perímetro de la región sombreada será igual a la suma de los perímetros de las 4 círculos.

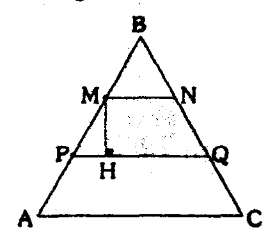
$\therefore\ 2p = 2\pi R_1 + 2\pi R_2 + 2\pi R_3 + 2\pi R_4$

$2p = 2\pi(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$

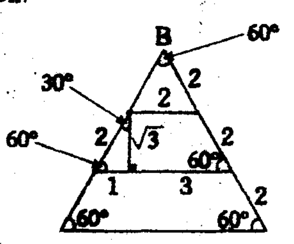
$2p = 2\pi \cdot 12 = 24\pi$

Ejemplo 7

Si el lado del triángulo equilátero ABC mide 6 y AP = PM = MP = BN = NQ = AC. Calcule el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

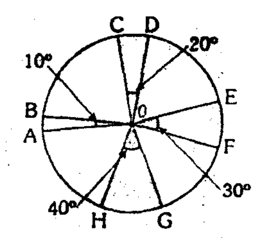


$\therefore$ Perímetro de la Región sombreada

$$= \sqrt{3} + 2 + 2 + 3 = 7 + \sqrt{3}$$

Ejemplo 8

Si el radio de la circunferencia es 4u, halle el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

Longitud de los arcos:

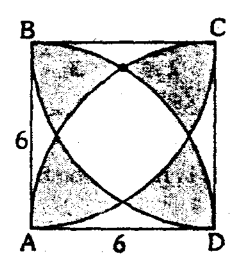
$$\left.\begin{aligned} L_{\widehat{AB}} &= \frac{10}{360}2\pi(4) \\ L_{\widehat{CD}} &= \frac{20}{360}2\pi(4) \\ L_{\widehat{EF}} &= \frac{30}{360}2\pi(4) \\ L_{\widehat{GH}} &= \frac{40}{360}2\pi(4) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} L_{Arcos} &= \frac{(10+20+30+40)}{360}2\pi(4) \\ &= \frac{100}{360}2\pi(4) = \frac{20\pi}{9} \end{aligned}$$

Longitud de los radios: $8(4) = 32$

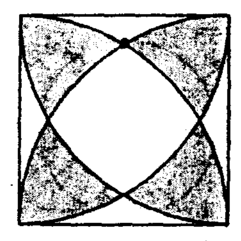
$$\therefore\ 2p = \frac{20\pi}{9} + 32 = \frac{288 + 20\pi}{9}$$

Ejemplo 9

Halle el perímetro de la región sombreada, si el lado del cuadrado ABCD mide 6. ABCD es un cuadrado.



Resolución:



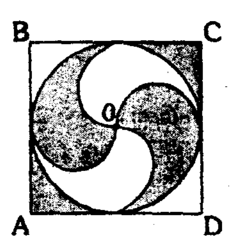
$\therefore$ 2p = 4(cuarto de circunferencia de radio 6)

Luego:

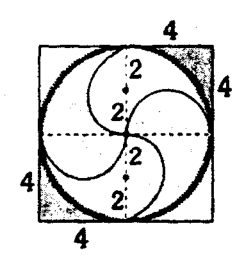
El perímetro es: $2p = 4\left(\dfrac{2\pi\times 6}{4}\right) = 12\pi$

Ejemplo 10

Halle el perímetro de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 8.



Resolución:



Longitud de las semicircunferencias pequeñas = $[\pi(2)] \times 4$

Longitud de la $\odot = 2\pi(4)$

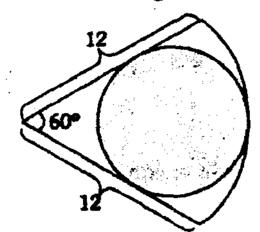
Longitud de los segmentos = $4(4)$

$\therefore\quad 2p = 8\pi + 8\pi + 16$

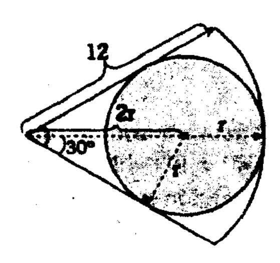
$= 16\pi + 16 = 16(\pi+1)$

Ejemplo 11

Halle el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

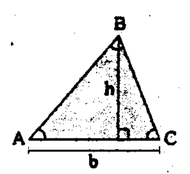


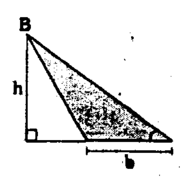
$3r = 12 \Rightarrow r = 4$

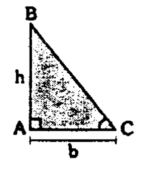
$\therefore\ 2p = 2\pi\,(4) = 8\pi$

ÁREAS

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES



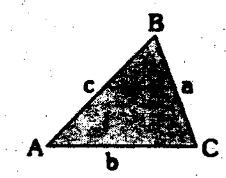




Fórmula Básica

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bh}{2}$$

Fórmula de Herón

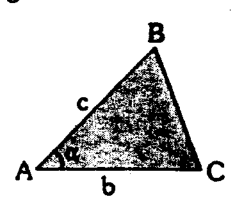


$$A_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

(p: semiperímetro del $\triangle ABC$)

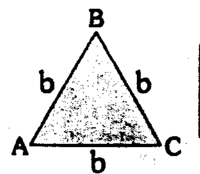
Fórmula trigonométrica

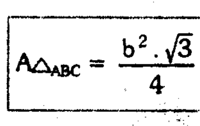


$$A_{\triangle ABC} = \frac{b \cdot c\,\mathrm{sen}\alpha}{2}$$

Observación:

Si el $\triangle$ ABC es equilátero.

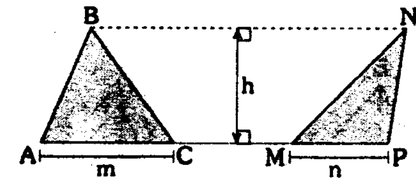




$$A_{\triangle ABC} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

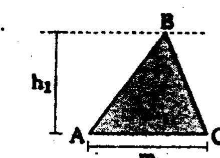
Relación de áreas

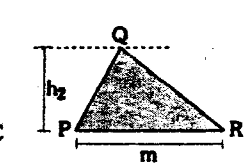
1.



$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}} = \frac{m}{n}$$

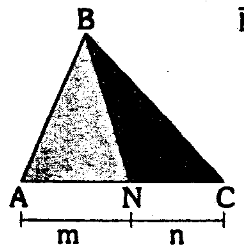
2.





$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta PQR}} = \frac{h_1}{h_2}$$

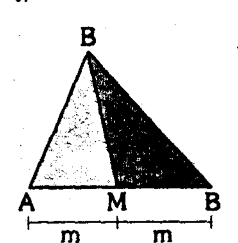
3.



$\overline{BN}$: ceviana relativa a $\overline{AC}$

$$\frac{A_{\Delta ABN}}{A_{\Delta NBC}} = \frac{m}{n}$$

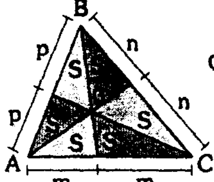
4.



$\overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

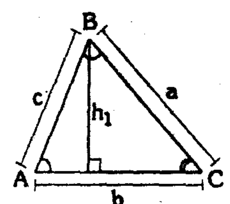
$$A_{\Delta ABM} = A_{\Delta BMC}$$

5.



G : baricentro del $\triangle ABC$

6.



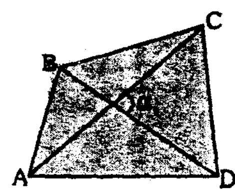
Si: $\Delta ABC \sim \Delta MNP$

$$\Rightarrow \frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta MNP}} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{p^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRANGULARES

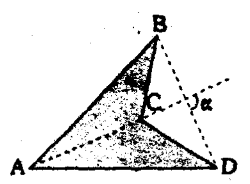
Fórmula general

- $\square$ABCD: Convexo



$$A_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD).\text{sen}\alpha}{2}$$

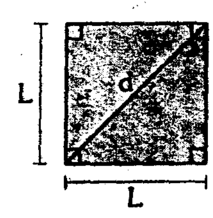
- ABCD: Cóncavo



$$A_{ABCD} = \frac{(AC)(BD).\text{sen}\alpha}{2}$$

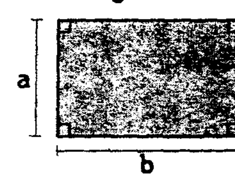
Área de una región limitada por:

1° Un cuadrado



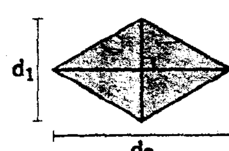
$$A_{\blacksquare} = L^2 \quad ó \quad A_{\blacksquare} = \frac{d^2}{2}$$

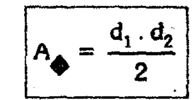
2° Un rectángulo



$$A_{\blacksquare} = a \cdot b$$

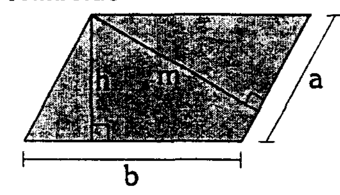
3° Un rombo





$$A_{\blacklozenge} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

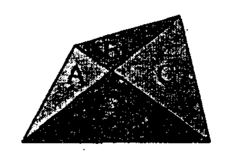
4° Un romboide

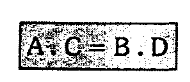


$A_{\text{▱}} = b \cdot h$ ó $A_{\text{▱}} = a \cdot m$

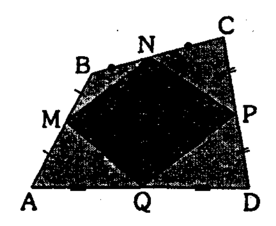
Relaciones de áreas

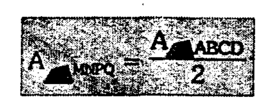
1 En todo cuadrilátero



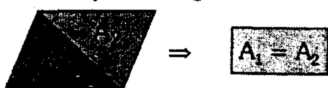

$A \cdot C = B \cdot D$

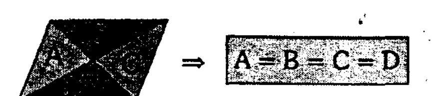
Si: M, N, P y Q son puntos medios:

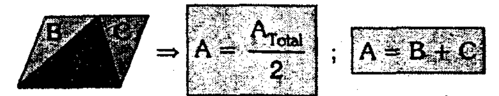



$$A_{MNPQ} = \frac{A_{ABCD}}{2}$$

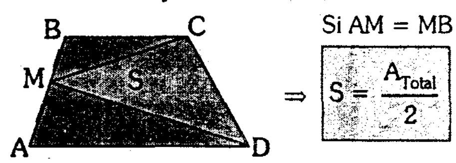
2 En todo paralelogramo


$\Rightarrow A_1 = A_2$


$\Rightarrow A = B = C = D$

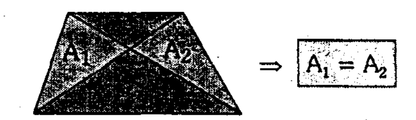

$\Rightarrow A = \dfrac{A_{Total}}{2}$; $A = B + C$

3. En todo trapecio

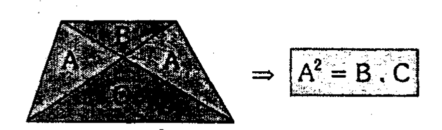


Si AM = MB

$\Rightarrow S = \dfrac{A_{Total}}{2}$



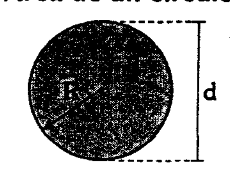
$\Rightarrow A_1 = A_2$

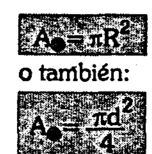


$\Rightarrow A^2 = B \cdot C$

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

Área de un círculo



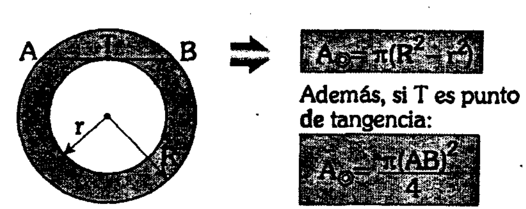

$A_{\bullet} = \pi R^2$

o también:

$$A_{\bullet} = \frac{\pi d^2}{4}$$

donde: d es la longitud del diámetro

Área de una corona circular

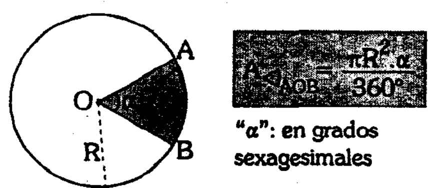


$\Rightarrow A_{\circledcirc} = \pi(R^2 - r^2)$

Además, si T es punto de tangencia:

$$A_{\circledcirc} = \frac{\pi (AB)^2}{4}$$

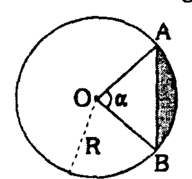
Área de un sector circular

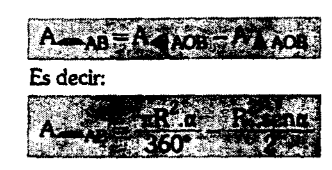


$$A_{\measuredangle AOB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°}$$

"α": en grados sexagesimales

Área de un segmento circular



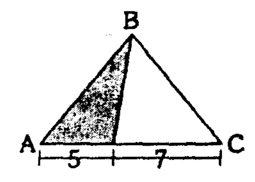


"α": en grados sexagesimales

Ejemplos de aplicación

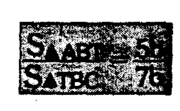
Ejemplo 1

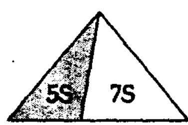
Calcule el área de la región sombreada si el área de la región triangular ABC es 120 u.



Resolución:

Propiedad:





Por dato: $5S + 7S = 120\ u^2$

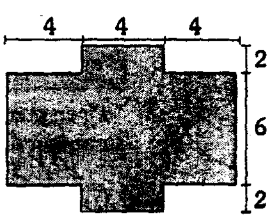
$12S = 120\ u^2$

$S = 10\ u^2$

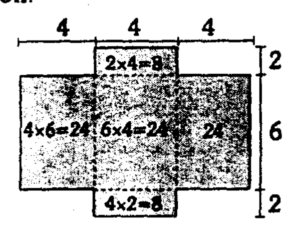
$\therefore\ A_{\Delta ABT} = 5(10) = 50\ u^2$

Ejemplo 2

Halle el área de la región sombreada:



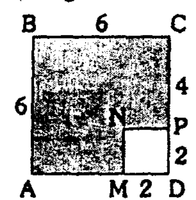
Resolución:



$\therefore\ A_{sombreada} = 3(24) + 2(8) = 88\ u^2$

Ejemplo 3

Halle el área de la región sombreada.



Resolución:

Resulta más sencillo, en este caso, calcular el área de la región sombreada por diferencia:

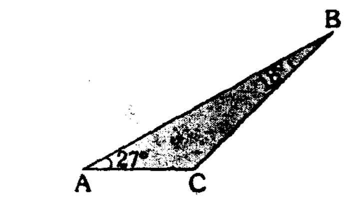
$A_{sombreada} = A_{ABCD} - A_{MNPD}$

$A_{sombreada} = 6^2 - 2^2 = 32$

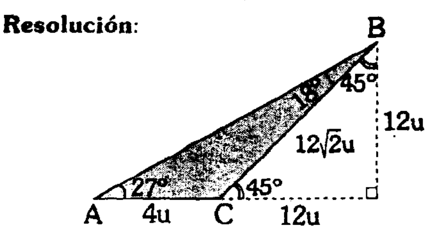
Ejemplo 4

Calcule el área de la región sombreada si:

$AC = 4\ u;\ BC = 12\sqrt{2}\,u$



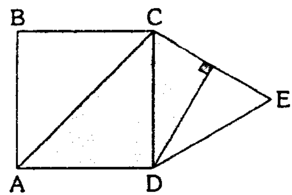
Resolución:



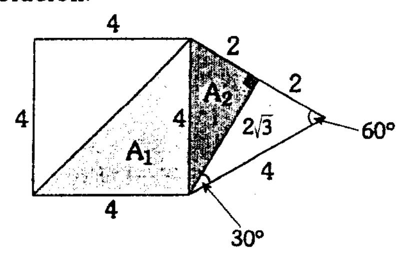
$A_{sombreada} = \dfrac{4.12}{2} = 24u^2$

Ejemplo 5

Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 u y CED es un triángulo equilátero, calcule el área de la región sombreada.



Resolución:



Piden: $A_1 + A_2$

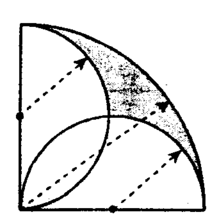
$A_1 = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8\ u^2$

$A_2 = \dfrac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}u^2$

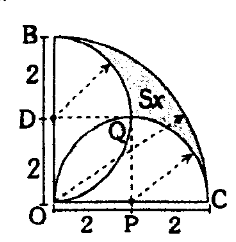
$\therefore\ A_{sombreada} = (8 + 2\sqrt{3})u^2$

Ejemplo 6

Halle el área de la región sombreada, si el cuadrante tiene radio 4u.



Resolución:



Del gráfico:

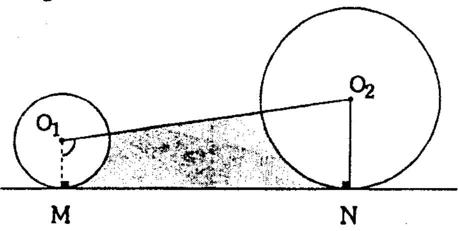
$Sx = S_{\triangle BOC} - (S_{\triangle BDQ} + S_{\triangle QPC} + S_{\square ODQP})$

$Sx = \dfrac{\pi 4^2}{4} - \left(\dfrac{\pi 2^2}{4} + \dfrac{\pi 2^2}{4} + 2^2\right)$

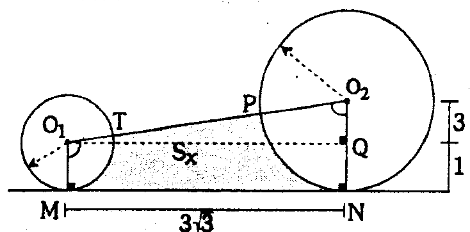
$\therefore\quad 5x = 2(\pi - 2)\ u^2$

Ejemplo 7

Halle el área de la región sombreada si los radios miden 4μ y 11μ ; $MN = 3\sqrt{3}\mu$ (M y N) son puntos de tangencia.



Resolución:



Piden Sx

$\triangle\ O_1QO_2$: es notable (30° y 60°)

$\rightarrow m\sphericalangle O_1O_2Q = 60°$ y

$m\sphericalangle O_2O_1M = 120°$

Ahora:

$S_x = S_{\square MNO_1O_2} - (S_{\triangleleft TO_1M} + S_{\triangleleft PO_2N})$

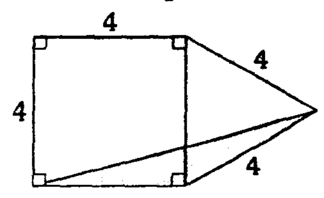
$Sx = \left(\dfrac{4+1}{2}\right) 3\sqrt{3}$

$\left(\dfrac{120}{360}\pi 1^2 + \dfrac{60}{360} . \pi 4^2\right)$

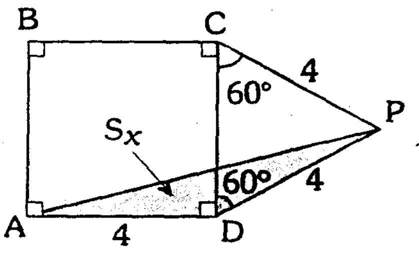
$Sx = \dfrac{5}{6}(9\sqrt{3} - 2\pi)u^2$

Ejemplo 8

Halle el área de la región sombreada aplicando el método de la fórmula trigonométrica.



Resolución:



Piden S_x

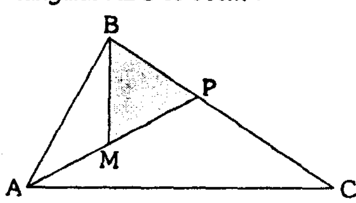
Se deduce que: ΔCPD es equilátero por fórmula trigonométrica

$$S_x = \frac{(4)(4)\text{sen}150°}{2}$$

$\therefore = S_x = 4u^2$

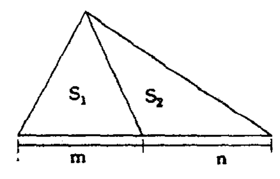
Ejemplo 9

Calcule el área de la región sombreada, si 4.(BP)=PC, AP = 3(AM) y, además, el área de la región triangular ABC es 60cm^2.

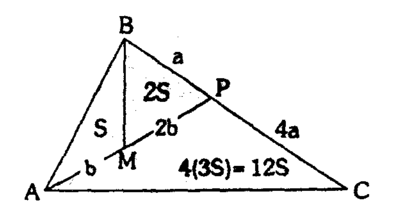


Resolución:

Recordar:



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$$



$\Rightarrow$ $3S + 12S = 60\text{ cm}^2$

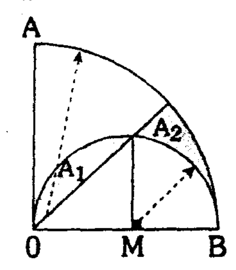
$15S = 60\text{ cm}^2$

$S = 4\text{ cm}^2$

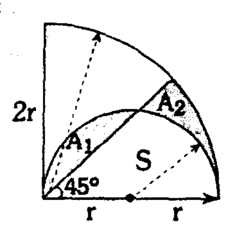
$\therefore$ $A_{sombreada} = 2(4) = 8\text{ cm}^2$

Ejemplo 10

De la figura, calcule el área de la región sombreada "A_1", si el área de la región sombreada "A_2" es de 4 cm^2



Resolución:



Del gráfico

- $S + A_1 = \dfrac{\pi r^2}{2}$

- $S + A_2 = \dfrac{45\,\pi(2r)^2}{360} \Rightarrow S + A_2 = \dfrac{\pi r^2}{2}$

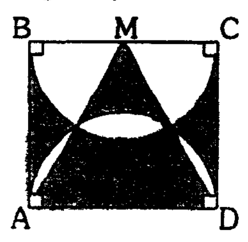
$\Rightarrow S + A_1 = S + A_2$

$A_1 = A_2 \;\therefore\; A_1 = 4\text{ cm}^2$

Problemas Resueltos

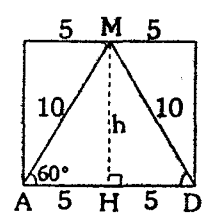
PROBLEMA 1

Calcule el perímetro de la región sombreada; si AMD es un triángulo equilátero de lado 10 cm.



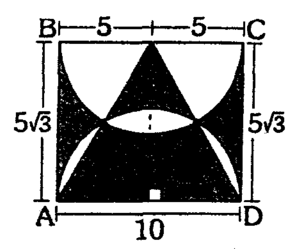
Resolución:

Nos piden el perímetro de la región sombreada, para ello primero trazamos la altura $\overline{MH}$ del ΔAMD



ΔAHM es notable (30° y 60°) $\Rightarrow h = 5\sqrt{3}$

Luego:



Perímetro de la región sombreada:

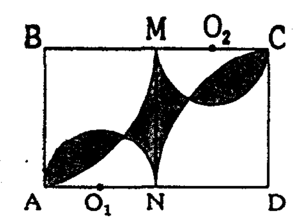
$$2p = AM + MD + DA + \log \overset{\frown}{BC} + \log \overset{\frown}{AD} + AB + CD$$

$$2p = 10 + 10 + 10 + 5\pi + 5\pi + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

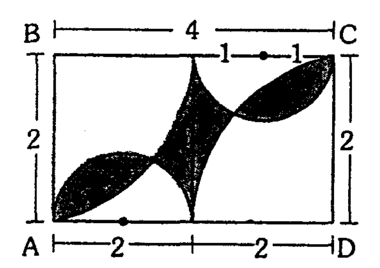
$$= 10(3 + \pi + \sqrt{3})\ u$$

PROBLEMA 2

En el rectángulo ABCD, BC = 4 m, M y N son puntos medios. Halle el perímetro de la región no sombreada.



Resolución:



Perímetro de la región no sombreada:

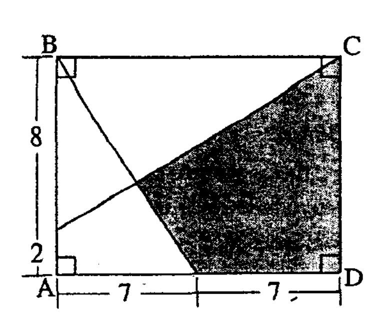
$$2p = 2(4) + 2(2) + 2\pi(1) + \frac{(2\pi(2))}{2}$$

$$2p = 12 + 2\pi + 2\pi$$

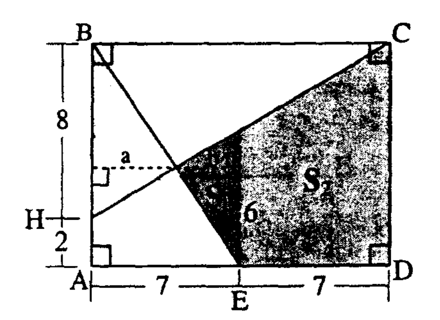
$$2p = 4(3 + \pi)$$

PROBLEMA 3

En la figura calcule el área de la región sombreada.



Resolución:



En el trapecio AHCD, trazamos la base media $\overline{EG}$, que es paralela a las bases $\overline{AH}$ y $\overline{CD}$.

Entonces: $EG = \dfrac{2+10}{2} = 6$

Luego la región sombreada queda dividida en dos regiones cuyas áreas son S_1 y S_2

Nos piden: $A_{sombreada} = S_1 + S_2$ . . . . (1)

Del gráfico: $\Delta BFH \sim \Delta EFG$

$\dfrac{BH}{GE} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{8}{6} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{4}{3} = \dfrac{a}{b}$ . . . . (2)

Del gráfico también se observa: $a+b = 7$ . . . .(3)

Resolviendo (2) y (3): $a=4$ y $b = 3$

Entonces:

$S_1 = \dfrac{6\times 3}{2} = 9\ u^2$

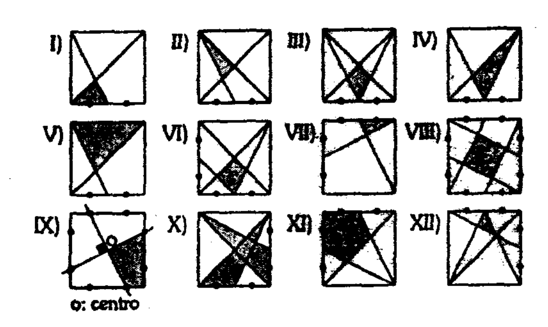
$S_2 = \left(\dfrac{6+10}{2}\right)\times 7 = 56u^2$

En (1):

$\therefore\ A_{sombreada} = 9 + 56 = 63\ u^2$

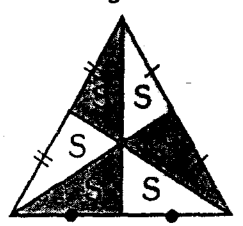
PROBLEMA 4

En cada uno de los gráficos mostrados tenemos un cuadrado cuyo lado mide a. Halle el área de las regiones sombreadas.

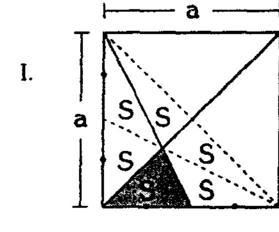


Resolución

Recordemos que en cualquier triángulo si trazamos las tres medianas, obtenemos seis regiones triangulares pequeñas las cuales son equivalentes; es decir, sus áreas son iguales.

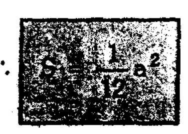


I.



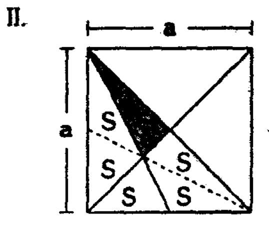
Del gráfico:

$6S = \dfrac{1}{2}a^2$

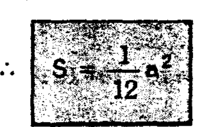


$\therefore\ S = \dfrac{1}{12}a^2$

II.

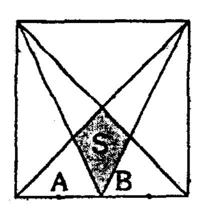


$6S = \dfrac{1}{2}a^2$



$\therefore\ S = \dfrac{1}{12}a^2$

III.



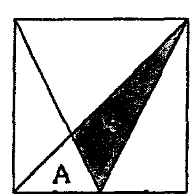
Podemos observar que: $A + B + S = \frac{1}{4}a^2$

Pero $A = B = \frac{1}{12}a^2$

Despejando:

$S = \frac{1}{4}a^2 - 2\left(\frac{1}{12}a^2\right) \quad \therefore \quad \boxed{S = \frac{1}{12}a^2}$

IV.



Notamos que :

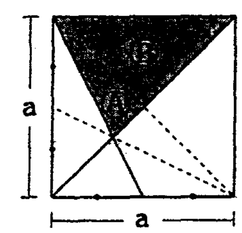
$A + S = \frac{1}{4}a^2$

Pero: $A = \frac{1}{12}a^2$

Luego: $S = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$

$\therefore \boxed{S = \frac{1}{6}a^2}$

V.



Notamos que:

$A_{sombreada} = A + B$

Pero sabemos que:

$A = \frac{1}{12}a^2$

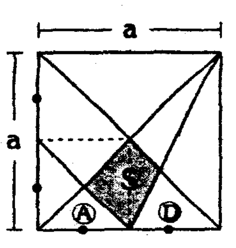
$B = \frac{1}{4}a^2$

Luego: $A_{sombreada} = \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}a^2$

$\therefore$

$A_{sombreada} = \frac{1}{3}a^2$

VI.



Observamos que:

$A = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a^2\right)$

$A = \frac{1}{16}a^2$

$D = \frac{1}{12}a^2$

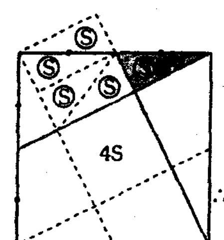
Luego: $A + S + D = \frac{1}{4}a^2$

Despejando:

$S = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{12}a^2$

$\boxed{S = \frac{5}{48}a^2}$

VII.



Del problema VIII:

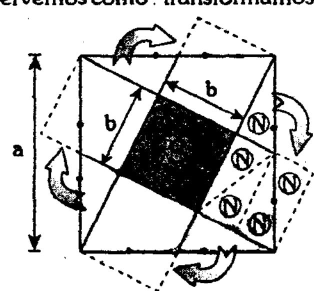
$4S = \frac{1}{5}a^2$

$\therefore \boxed{S = \frac{1}{20}a^2}$

Luego:

$5b^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{5}a^2}$

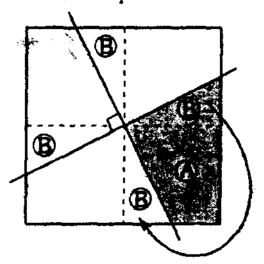
VIII. Observemos cómo "transformamos" la figura:



Con las partes que formaban el cuadrado hemos formado una "cruz " contenida por 5 cuadrados iguales. Es decir, el área del cuadrado original equivale al área de la "cruz". $\Rightarrow$ $5S = a^2$

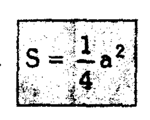
$$\therefore \boxed{S = \frac{1}{5}a^2}$$

IX. Notamos que $S = A + B$



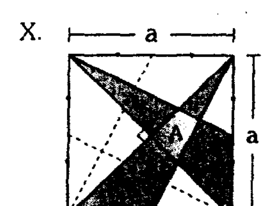
Las regiones triangulares denominados **B** son congruentes (¿recuerdas por qué?); luego, pasando la región sombreada **B**.

$S = A + B$



$$\therefore \boxed{S = \frac{1}{4}a^2}$$

X.



De los problemas **VII** y **VIII** podemos darnos cuenta que la región **A** es:

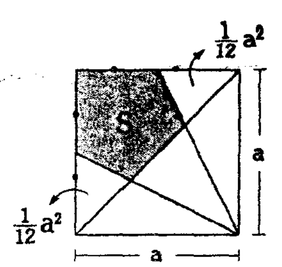
$$A = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}a^2\right) = \frac{1}{20}a^2$$

luego:

$$S = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{20}a^2$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{9}{20}a^2}$$

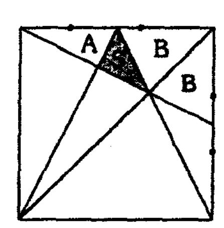
XI.



$$S = \frac{1}{2}a^2 - 2\left(\frac{1}{12}a^2\right) = \frac{1}{3}a^2$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{1}{3}a^2}$$

XII. $A + 2B + S = \frac{1}{4}a^2$



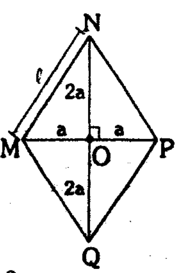
$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{1}{12}a^2 \\ A = \frac{1}{20}a^2 \end{array}\right\} S = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{20}a^2 - 2\left(\frac{1}{12}a^2\right)$$

$$\therefore \boxed{S = \frac{1}{30}a^2}$$

PROBLEMA 5

Se tiene un rombo con una diagonal de doble longitud que la otra. Exprese el lado del rombo en función de K, donde K es el área de la región que limita el rombo en pulgadas cuadradas.

Resolución:



Nos piden: ℓ =?

Trazamos las diagonales: MP = 2a y NQ = 4a

Por teorema de Pitágoras en el ⊿MON:

$$\ell = a\sqrt{5}$$

Por dato: $A_{MNPQ} = K \ldots (\alpha)$

Del gráfico: $A_{MNPQ} = \dfrac{4a \times 2a}{2} = 4a^2 \quad \ldots (\beta)$

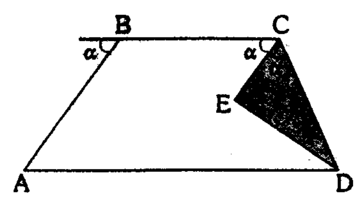
Pero (α) = (β):

$$4a^2 = K \rightarrow a^2 = \frac{K}{4} \rightarrow a = \frac{\sqrt{K}}{2}$$

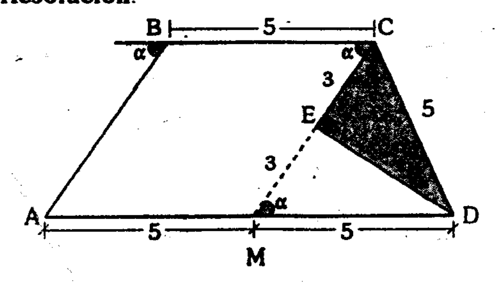
$$\therefore \ell = \frac{\sqrt{K}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{5K} \text{ pulgadas}$$

PROBLEMA 6

En la siguiente figura, halle el área de la región triangular CED; si CE = 3, BC = 5, AD = 10 y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



Resolución:



Nos piden: $S_{\triangle CED}$

Del gráfico: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

→ Prolongamos $\overline{CE}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en M.

→ ABCM es un paralelogramo ⇒ BC=AM=5

Como AD = 10 → MD = 5

Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ → m∢CMD = α

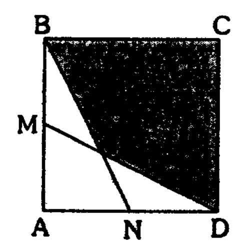
→ ΔCDM es isósceles → MD=CD=5 y CE=EM=3

⊿CED es notable (37° y 53°) → DE=4

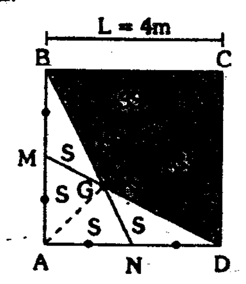
$$\therefore S_{\triangle CED} = \frac{3 \times 4}{2} = 6\,u^2$$

PROBLEMA 7

Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 m, M y N son puntos medios. Calcule el área de la región sombreada.



Resolución:



Nos piden: S_{GBCD}

Trazamos las diagonales del cuadrado.

G: es baricentro del ΔBAD

$S_{GBCD} = 8\,S$

Del gráfico: $A_{\blacksquare} = 12\,S \quad \ldots (\alpha)$

Además sabemos: $A_{\square} = (4\text{ m})^2 = 16\text{ m}^2 \ldots (\beta)$

$\Rightarrow$ De (α) y (β) $12S = 16\text{ m}^2$

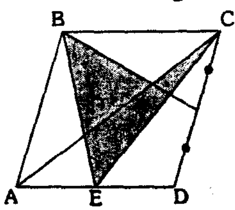
$\Rightarrow S = \frac{4}{3}\text{m}^2$

$\Rightarrow S_{GBCD} = 8S = 8\left(\frac{4}{3}\text{m}^2\right)$

$\Rightarrow S_{GBCD} = \frac{32}{3}\text{m}^2$

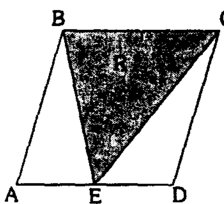
PROBLEMA 8

El área de la región paralelográmica ABCD es $24u^2$. Calcule el área de la región sombreada.



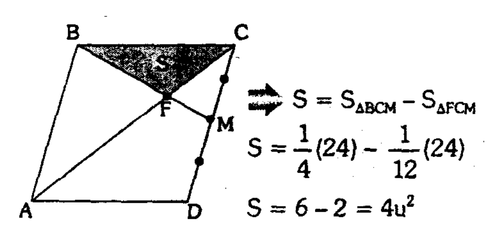
Resolución:

Lo resolveremos por partes:



Por propiedad:

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}(24u^2) = 12u^2$

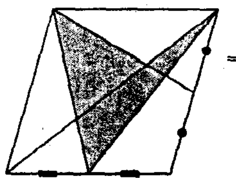


$\Rightarrow S = S_{\Delta BCM} - S_{\Delta FCM}$

$S = \frac{1}{4}(24) - \frac{1}{12}(24)$

$S = 6 - 2 = 4u^2$

Luego nos piden:

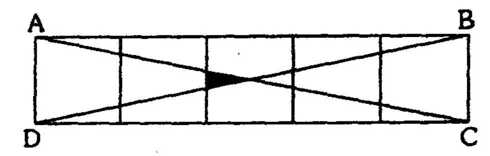


$\Rightarrow A_{Somb} = R - S = 12 - 4$

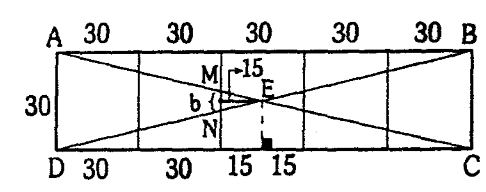
$\therefore A_{Somb} = 8\text{ u}^2$

PROBLEMA 9

El rectángulo ABCD se ha formado con 5 cuadrados; si AD=30 m, el área de la región sombreada será:



Resolución:



Piden: $S_{MNE} = \frac{b(15)}{2}$

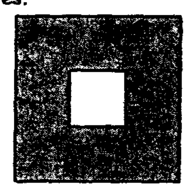
$\triangle ADE \sim \triangle MNE$:

$\frac{30}{75} = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 6\text{m}$

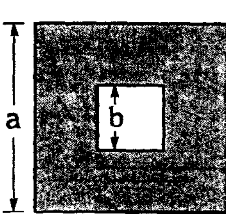
$\therefore S_{MNE} = \frac{6(15)}{2} = 45\text{m}^2.$

PROBLEMA 10

El área de la región sombreada es igual a 15 veces el área de la región no sombreada y la suma de los perímetros de ambos cuadrados es 40 m. El área no sombreada es:



Resolución:



- De los datos:

$4a + 4b = 40 \Rightarrow a + b = 10 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\underbrace{S_1 = 15S_2}$

$a - b = 15\, S_2$

$\Rightarrow \; a^2 = 16\, b^2 \;\Rightarrow\; a = 4b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

Reemplazamos:

(2) en (1):

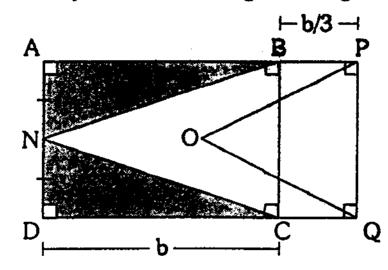
$4b + b = 10 \;\Rightarrow b = 2$

$\therefore S_2 = 2^2$

$\therefore \; S_2 = 4m^2$

PROBLEMA 11

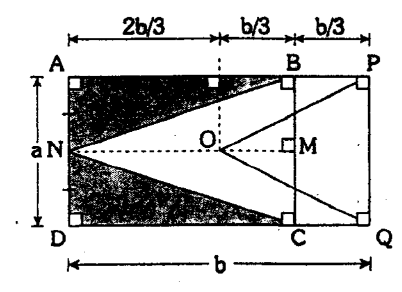
El punto O es el baricentro de la región triangular BNC; calcule la razón entre el área de la región sombreada y el área de la región triangular POQ.



Resolución:

Nos piden: $\dfrac{A_{Somb.}}{A_{\Delta POQ}}$

- Como O es baricentro del △ BNC, entonces: $OM = \dfrac{b}{3}$ y $ON = \dfrac{2}{3}b$

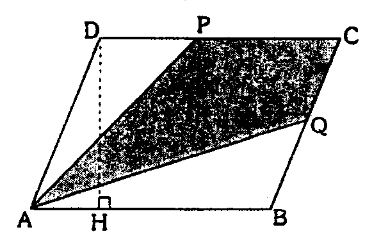


Luego del gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} A_{somb} = \dfrac{A_{\square ABCD}}{2} = \dfrac{ab}{2} \\ A_{\Delta POQ} = \dfrac{a\left(\dfrac{2b}{3}\right)}{2} = \dfrac{ab}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \therefore \frac{A_{somb}}{A_{\Delta POQ}} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{ab}{3}} = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA 12

Calcule el área de la región sombreada, si P y Q son puntos medios de los lados del paralelogramo ABCD; además DH= 4 y AB=10 u.



Resolución:

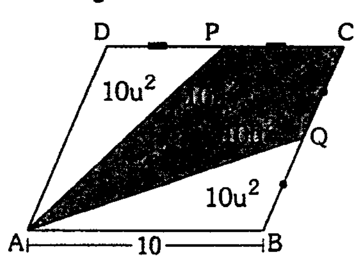
Nos piden: S_{APCQ}

Primero calculamos el área total:

$S_{ABCD} = (AB)(DH)$

$S_{ABCD} = (10)(4) = 40\, u^2$

Trazamos la diagonal $\overline{AC}$:



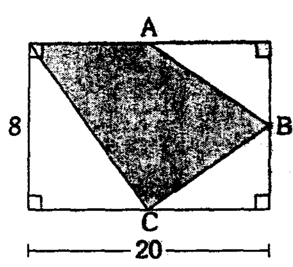
Además en los triángulos ADC y ABC, $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son medianas, respectivamente, entonces:

$\Rightarrow \; S_{APCQ} = 10\, u^2 + 10\, u^2$

$\therefore \; S_{APCQ} = 20\, u^2$

PROBLEMA 13

Calcule el área de la región sombreada, si A, B y C son puntos medios



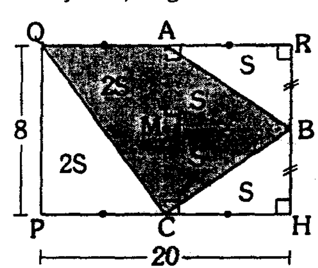
Resolución:

Nos piden: S_{ABCQ}

Calculamos el área total:

$S_{PQRH} = 20 \times 8 = 160\ u^2 \ldots\ldots (\alpha)$

Trazamos $\overline{AC}$ y $\overline{BM}$, luego:



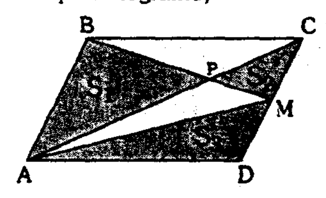
Del gráfico $S_{PQRH} = 8S \ldots\ldots (\beta)$

De (α) y (β): $8S = 160\ u^2 \Rightarrow S = 20\ u^2$

$\therefore S_{ABCQ} = 4S = 80\ u^2$

PROBLEMA 14

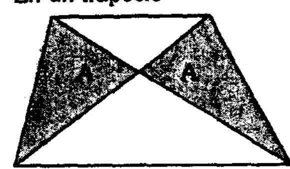
Calcule el área S_1, si las áreas S_2 y S_3 suman $4\ cm^2$ (ABCD es un paralelogramo)



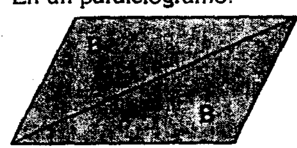
Resolución:

Recordando:

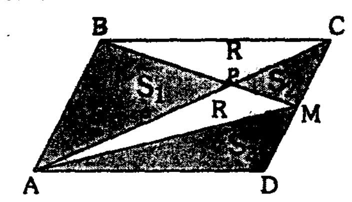
I. En un trapecio



II. En un paralelogramo:



En el problema:



Nos piden: S_1

Dato: $S_2 + S_3 = 4\ cm^2$

- En el trapecio ABCM:

  $A_{\triangle BPC} = A_{\triangle APM} = R$

- En el paralelogramo ABCD:

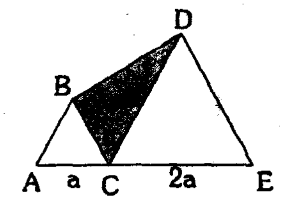
  $S_1 + R = S_2 + R + S_3$

  $\Rightarrow S_1 = S_2 + S_3$

  $\therefore S_1 = 4\ cm^2$

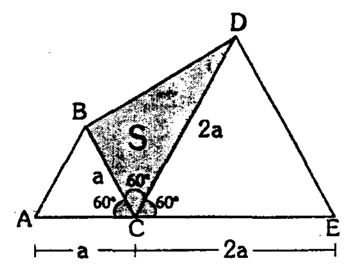
PROBLEMA 15

Se sabe que ABC y CDE son 2 triángulos equiláteros de lados a y 2a. Calcule el área de la región sombreada.

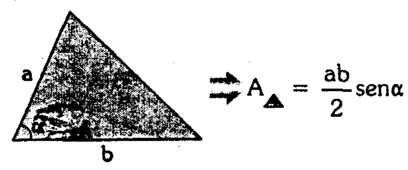


Resolución:

Nos piden: S



Recordando:



$\Rightarrow A_{\triangle} = \frac{ab}{2}\text{sen}\alpha$

En el problema:

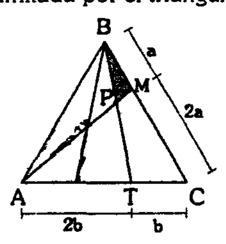
Del dato: BC = a y CD = 2a

$$S = \frac{(a)(2a)}{2} . \text{sen } 60°$$

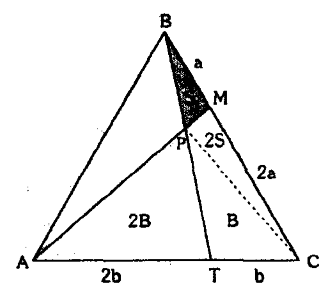
$$\therefore\ S = a^2\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PROBLEMA 16

Halle el área de la región sombreada, si el área de la región limitada por el triángulo ABC es S_1.



Resolución:



Nos piden: S

Dato: $A_{\triangle ABC} = S_1$

Trazamos $\overline{CP}$, entonces:

$$\frac{A_{\Delta MPC}}{A_{\Delta MPB}} = \frac{2a}{a} \Rightarrow A_{\triangle MPC} = 2 . A_{\triangle MPB}$$

$$A_{\triangle MPC} = 2 . S$$

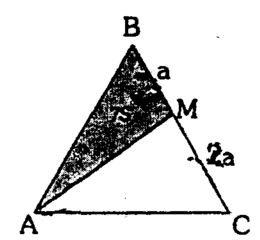
Sea: $A_{\triangle TPC} = B$, entonces por la proporción anterior $A_{\triangle TPA} = 2B$

Además: $\underbrace{A_{\triangle TBA}} = 2 . \underbrace{A_{\triangle TBC}}$

$$A_{\triangle PBA} + 2B = 2(3S + B)$$

$$\Rightarrow A_{\triangle PBA} = 6S$$

Luego tenemos:



$\Rightarrow A_{\triangle AMC} = 14\, S$

Ahora: $A_{\triangle ABC} = 21\, S$

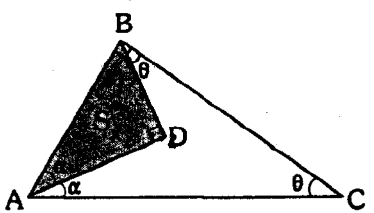
Por dato: $A_{\triangle ABC} = S_1$

$$\Rightarrow 21\, S = S_1$$

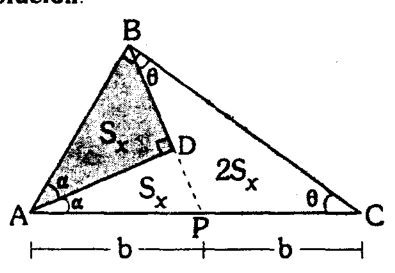
$$\therefore\quad S = \frac{S_1}{21}$$

PROBLEMA 17

Sabiendo que: $S_1 = 20\ u^2$, calcule el área de la región triangular ABC.



Resolución:

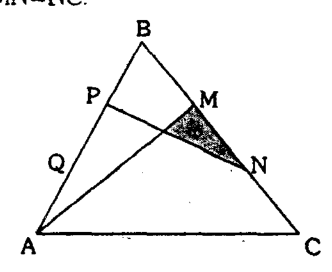


Nos piden: $S_{\triangle ABC}$

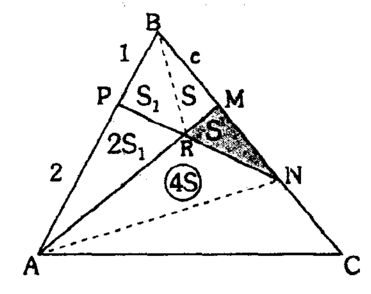
- Prolongamos BD
  $\Rightarrow$ $\triangle$BPC es isósceles: BP = PC = b y m∢ABP = m∢PAB = 90° − θ = 2α
  $\Rightarrow$ BP = AP = b
- Luego en el $\triangle$ABP, $\overline{AD}$ es altura y bisectriz $\Rightarrow$ $\overline{AD}$ también es mediana, es decir: BD = DP
  $\Rightarrow$ $S\triangle_{ADP} = Sx$
- En el ⊿ABC, AP = PC
  $\Rightarrow$ $S\triangle_{PCB} = S\triangle_{ABP} = 2Sx$
  $\Rightarrow$ $S⊿_{ABC} = 4Sx$
  Pero $Sx = 20\ u^2$ (Dato)
  $\therefore$ $S\triangle_{ABC} = 80\ u^2$

PROBLEMA 18

Calcule el área de la región sombreada, si el área de la región ABC es 30 u^2 ; AP=2(PB) y BM=MN=NC.



Resolución:



Piden: S

Dato: $A_{\triangle ABC} = 30\ u^2$

- Trazamos $\overline{BR}$ y $\overline{AN}$
- Como AP= 2(PB) $\Rightarrow$ $A_{\triangle APR} = 2 . A_{\triangle PBR} = 2S_1$
  y $A_{\triangle APN} = 2 . A_{\triangle PBN} = 2S_1 + 4S$
  $\Rightarrow$ $A_{\triangle ARN} = 4S$

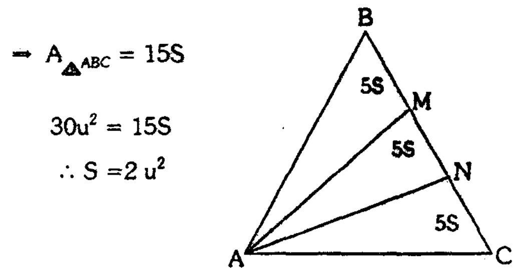
Luego:

$A_{\triangle AMN} = A_{\triangle ABM} = A_{\triangle ANC} = 5S$ (BM=MN=NC)

$\Rightarrow$ $A_{\triangle ABC} = 15S$

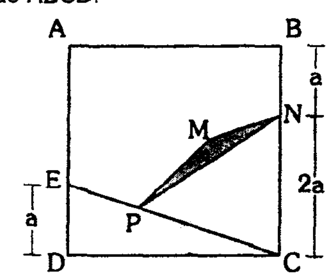
$30u^2 = 15S$

$\therefore$ $S = 2\ u^2$

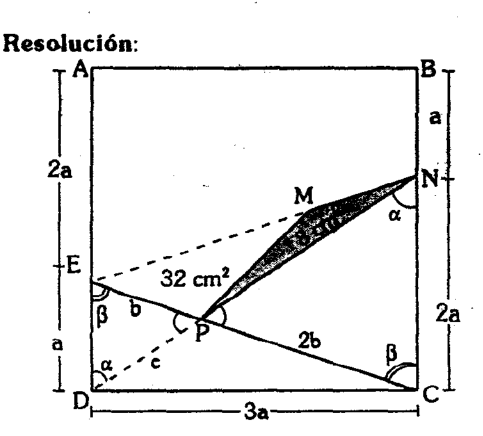


PROBLEMA 19

El punto P está en $\overline{ND}$ y el área de la región sombreada es 8 cm^2; EN=5(MN); y M está en $\overline{EN}$, calcule el área de la región limitada por el cuadrado ABCD.



Resolución:



Piden: $A_{\square ABCD}$

- Prolongamos $\overline{NP}$ hasta D y $\overline{NM}$ hasta E

Como EN = 5(MN) ⇒ EM=4(MN)

$\Rightarrow A_{\triangle EPM} = 4.\underbrace{A_{\triangle PMN}}_{8\ cm^2}$

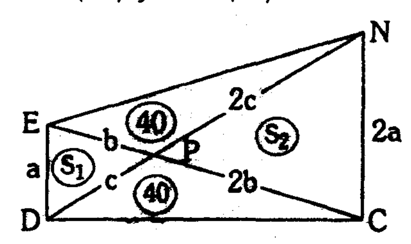
$\Rightarrow A_{\triangle EPM} = 32\ cm^2$

- Luego como $\square$DENC es un trapecio

  $\Rightarrow A_{\triangle DPC} = A_{\triangle EPN} = 40\ cm^2$

Del gráfico observamos que: $\Delta EDP \sim \Delta NPC$ y que los lados homólogos $\overline{ED}$ y $\overline{NC}$ están en la relación de 1 a 2.

⇒ NP = 2(DP) y CP=2(PE)

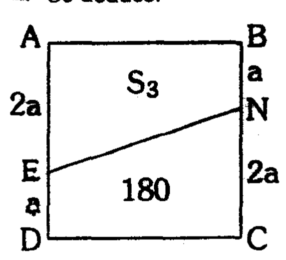


Entonces:

En el $\Delta DEN: S_1 = \frac{40}{2} = 20\ cm^2$

En el $\Delta DNC: S_2 = 2(40) = 80\ cm^2$

⇒ Se deduce:



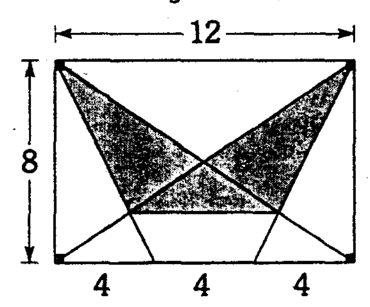
Finalmente:

$S_3 = 180\ cm^2$

$\therefore\ A_{\square ABCD} = 360\ cm^2$

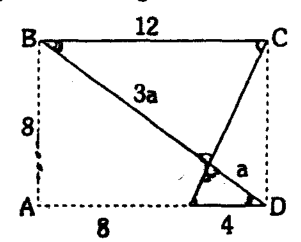
PROBLEMA 20

Calcule el área de la región sombreada



Resolución:

Por semejanza de triángulos:

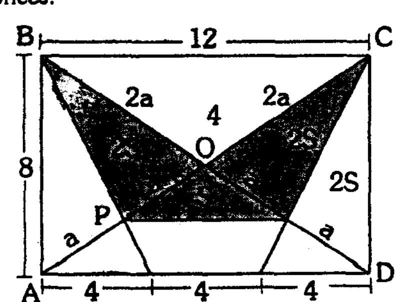


Además: AO=OC=OB=OD=2a

Ahora recordando:

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{n}{m}$

Entonces:



Nos piden: $A_{Somb} = 5S$

$S_{\blacksquare ABCD} = (8)(12) = 96\ u^2$

Pero:

$$\underbrace{S_{\triangle COD}}_{} = \frac{1}{4} \cdot S_{\blacksquare ABCD}$$

$$4S = \frac{1}{4}(96\ u^2)$$

$$\Rightarrow S = 6\ u^2$$

Luego

$$\Rightarrow A_{somb.} = 5(6)$$

$$\therefore A_{somb.} = 30\ u^2$$

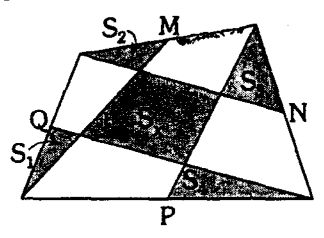
PROBLEMA 21

En la figura mostrada se tiene que:

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 20\ u^2$

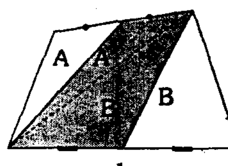
Además: M, N, P y Q son puntos medios.

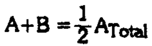
Calcule S



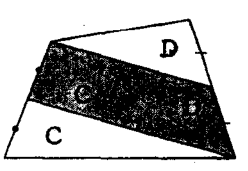
Resolución:

Recordemos:





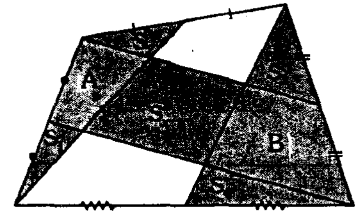
$A+B = \frac{1}{2}A_{Total}$



$C+D = \frac{1}{2}A_{Total}$

Nos piden: $S_x = ??$

Dato: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 20u^2$



Luego del gráfico:

$$S_1 + A + S_2 + S_3 + B + S_4 = \frac{1}{2}A_{Total} \ldots (\alpha)$$

También:

$$A + S_x + B = \frac{1}{2}A_{Total} \ldots (\beta)$$

Igualando (α) y (β):

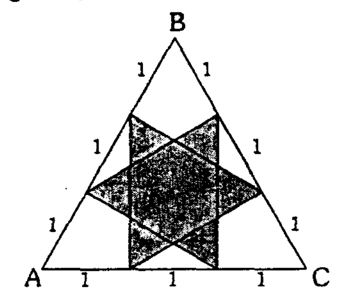
$$S_1 + A + S_2 + S_3 + B + S_4 = A + S_x + B$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_x$$

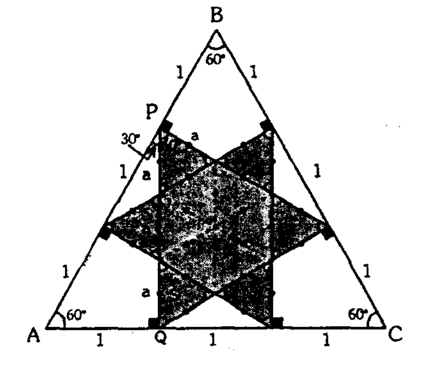
$$\therefore S_x = 20u^2$$

PROBLEMA 22

Calcule el área de la región sombreada, si ABC es un triángulo equilátero de lado 3.



Resolución:



Nos piden: $A_{sombreada} = ??$

En el △ AQP: como m∢A = 60° , AQ = 1 y AP = 2, entonces △AQP es ◺ notable (30° y 60°) y m∢AQP = 90°.

Análogamente en los demás triángulos.

La región sombreada queda dividida en 12 regiones triangulares equiláteras congruentes, de lado a.

Luego: $\underbrace{PQ}_{3a} = \sqrt{3}$

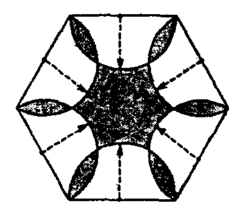
$$3a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow A_{sombreada} = 12\ S$$

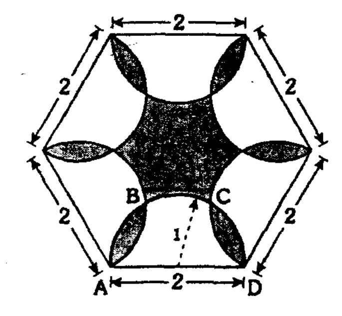
$$\therefore\ A_{sombreada} = 12\left[\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = \sqrt{3}\ u^2$$

PROBLEMA 23

En la figura, calcule el perímetro de la región sombreada, si el lado del hexágono regular mide 2 cm.



Resolución:



Las longitudes de arcos: AB, BC y CD son parte del perímetro buscado con ellos se cumple:

$$\text{Long}\widehat{AB} + \text{Long}\widehat{BC} + \text{Long}\widehat{CD} = \text{Long}\widehat{AD} = \pi \text{ cm}$$

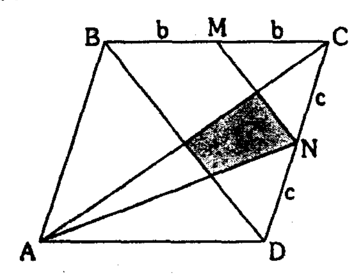
Es decir, que por cada lado del hexágono se cuenta una semicircunferencia de radio 1cm, las cuales son parte perímetro buscado. Como el hexágono tiene 6 lados, concluimos que:

$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Perímetro de la}\\ \text{región sombreada}\end{matrix} = 6\ .\ \text{Long}\widehat{AD}$$

$\therefore$ Perímetro de la región sombreada $= 6\pi$ cm

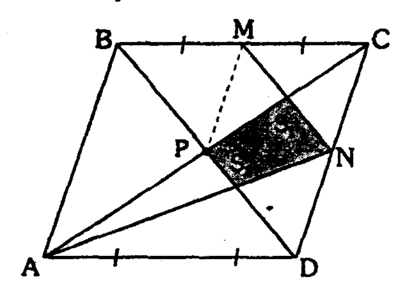
PROBLEMA 24

Calcule el área de la región sombreada, si el área de la región limitada por el paralelogramo ABCD es 48 u^2.



Resolución:

Trazamos $\overline{MP}$ y $\overline{PN}$:



Piden: 5x

$Sx = S_1 + S_2$

Dato: $A_{▱ABCD} = 48\ u^2$

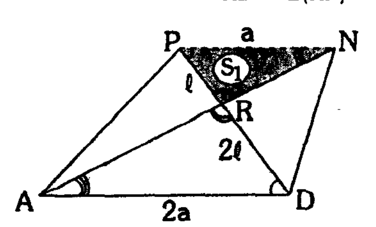
Del gráfico:

$$S_1 = \frac{1}{16}(48) = 3\ u^2$$

Luego: $\triangle PNR \sim \triangle ARD$

La razón de sus lados homólogos es de 1 a 2.

$$\Rightarrow RD = 2(RP)$$



Entonces:

$A_{\triangle NRD} = 2A_{\triangle PNR}$

$A_{\triangle NRD} = 2S_1$

$A_{\triangle PND} = \frac{1}{8}(48) = 6$

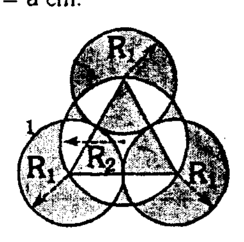
$S_1 + 2S_1 = 6$

$\Rightarrow S_1 = 2u^2$

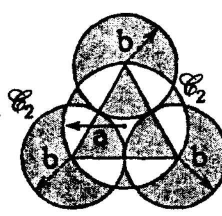
$\therefore \quad S_x = 3 + 2 = 5u^2$

PROBLEMA 25

Calcule el perímetro de la región sombreada, si: $R_1 = b$ cm y $R_2 = a$ cm.



Resolución:



Perímetro = 2p

Datos: $R_1 = b$; $R_2 = a$

Se observa que recorriendo los contornos de la parte sombreada se obtiene:

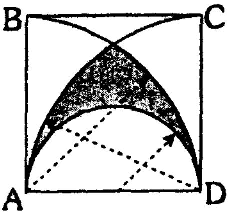
$$2p = 3L_{\mathscr{C}} + L_A + L_{\mathscr{C}_2}$$

$2p = 3[2\pi(b)] + 3(2b) + 2\pi(a)$

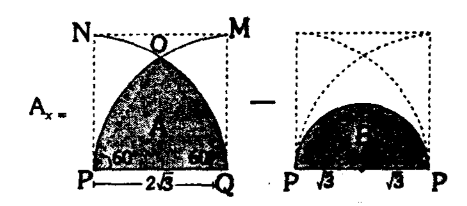
$2p = 2(3b\pi + 3b + \pi a)$ cm.

PROBLEMA 26

Calcule el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide $2\sqrt{3}$m



Resolución:



$A = S_{\diamond OPQ} + S_{\frown PO}$

$A = S_{\diamond OPQ} + (S_{\diamond PQO} - S_{\diamond POQ})$

Pero : $S_{\diamond OPQ} = S_{\diamond PQO}$

$$\Rightarrow A = 2\left[\frac{\pi(2\sqrt{3})^2}{6}\right] - \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$A = 4\pi - 3\sqrt{3}$

$B = \frac{\pi(\sqrt{3})^2}{2} = \frac{3\pi}{2}$

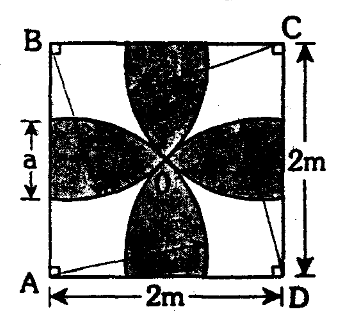
Como $A_x = A - B$

$$\Rightarrow A_x = (4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{3\pi}{2}$$

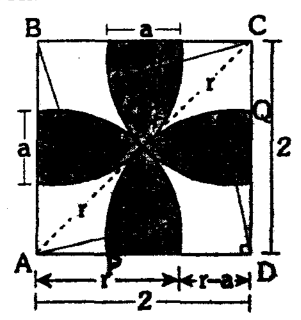
$$\therefore Ax = \left(\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{2}\right)m^2$$

PROBLEMA 27

Calcule el perímetro de la región sombreada si O es el centro del cuadrado ABCD.



Resolución:



Se observa que:

$2p = 4.\text{long}.PQ$

Del gráfico:

$2r = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$

También:

$r + r - a = 2$

$\Rightarrow a = 2r - 2 \rightarrow a = 2\sqrt{2} - 2$

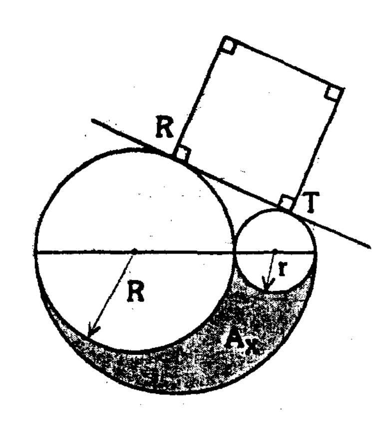
$\therefore\ 2p = 4\left[\dfrac{2\pi . r}{4}\right] + 4a$

$2p = 2\pi\sqrt{2} + 4(2\sqrt{2} - 2)$

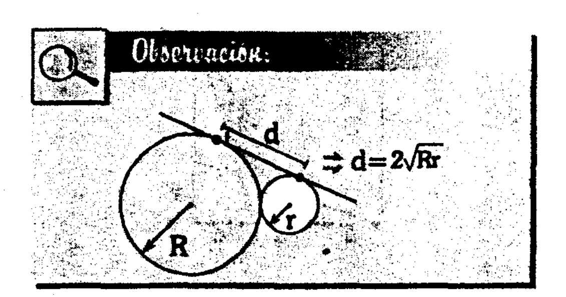
$2p = \left(2\sqrt{2}\pi + 8\sqrt{2} - 8\right)m$

PROBLEMA 28

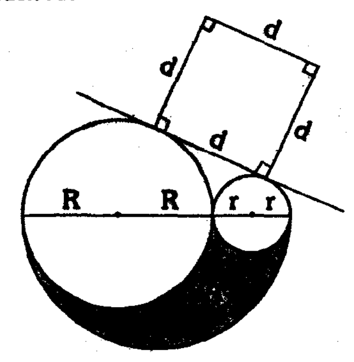
En la figura mostrada, el área de la región cuadrada es numéricamente igual a su perímetro; P y T son puntos de tangencia, entonces el área de la región sombreada es:



Resolución:



Nos piden Ax



Dato:

Área ■ = perímetro ■

$\Rightarrow d^2 = 4d$

$d = 4$

Luego, de la observación:

$2\sqrt{Rr} = 4 \Rightarrow Rr = 4$

$A_x =$ (R+r) − (R) − (r)

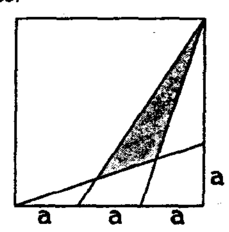
$$A_x = \frac{\pi(R+r)^2}{2} - \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$$

$A_x = \pi Rr = \pi(4)$

$\therefore\ A_x = 4\pi u^2$

PROBLEMA 29

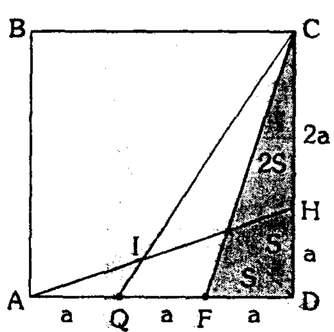
En la figura adjunta se tiene un cuadrado cuyo lado mide 14 m; entonces el área de la región sombreada es:



Resolución:

Piden S_{AICE}

Trazamos $\overline{ED}$.



Sea: $A_{\triangle EFD} = S$, entonces $A_{\triangle EHD} = S$ y $A_{\triangle EHC} = 2S$.

Del gráfico: $\dfrac{A_{\triangle EFD}}{A_{\triangle EDC}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{EF}{EC} = \dfrac{1}{3}$

Luego:

Trazamos $\overline{FI}$, entonces:

$\dfrac{A_{\triangle IFE}}{A_{\triangle IEC}} = \dfrac{EF}{FC} = \dfrac{1}{3} \rightarrow$ $A_{\triangle IFE} = B$, $A_{\triangle IEC} = 3B$

También se observa que $A_{\triangle AIG} = A_{\triangle GIF} = A$

$\Rightarrow A_{\triangle AIC} = A_{\triangle CIF} = 4B$

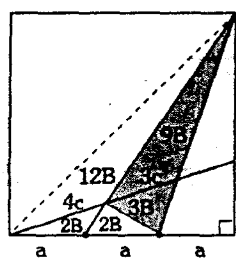
B C H E I 4B 3B 3c B A 4c A A D a G a F a

Pero:

$\dfrac{AI}{IE} = \dfrac{A_{\triangle AIC}}{A_{\triangle ICE}} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{AI}{IE} = \dfrac{4}{3}$

Entonces:

$\dfrac{A_{\triangle IFE}}{A_{\triangle AIF}} = \dfrac{3}{4}$, entonces triplicamos los valores de las áreas y obtenemos:



Luego:

$S_{\triangle AIC} = 9B$

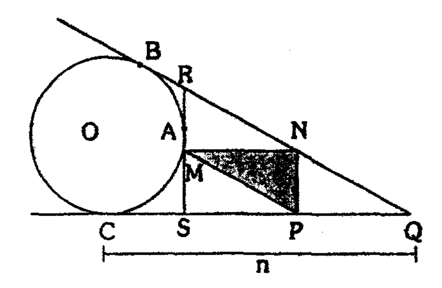
Del gráfico: $14B = \dfrac{1}{6} A_{\blacksquare ABCD}$

$14B = \dfrac{1}{6}(14)^2 \Rightarrow B = \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow A_{Somb.} = 9B = 9\left(\dfrac{7}{3}\right) = 21\ u2$

PROBLEMA 30

En el siguiente gráfico, calcule el perímetro de la región triangular MNP; si A, B y C son puntos de tangencia; M, N y P son puntos medios, de $\overline{RS}$, $\overline{RQ}$ y $\overline{SQ}$, respectivamente.

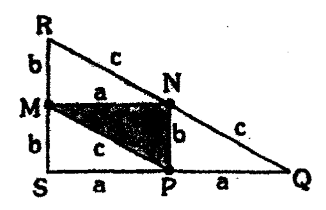


Resolución:

$2p_{\triangle MNP} = ??$

Dato: $CQ = n$

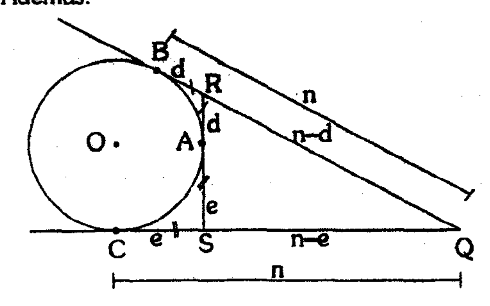
En el $\triangle RSQ$; aplicamos el teorema de la base media:



Del gráfico:

$2p_{\triangle MNP} = 2p_{\triangle RSQ} = \frac{1}{2} = (_{\triangle RSQ})$ ....(α)

Además:



Del gráfico:

$BQ = CQ = n$

$BR = AR = d$

$CS = AS = e$

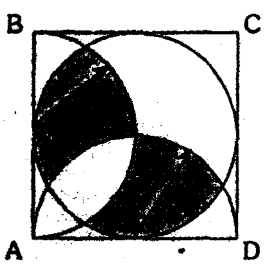
$2p_{\triangle RSA} = = n - d + d + e + n - e = 2n$ ...(β)

Luego reemplazamos (β) en (α):

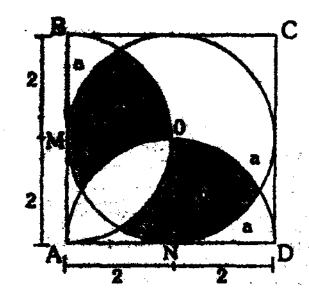
$\therefore\ 2p_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}(2n) = n$

PROBLEMA 31

En el siguiente cuadrado ABCD cuyo lado mide 4 mide cm, determine el área de la región sombreada.



Resolución:



Al trazar $\overline{0M}$ y $\overline{0N}$, se observan regiones equivalentes a cuyas áreas le asignamos valores a y b.

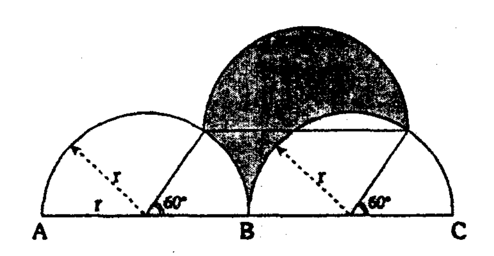
Nos piden: $A_{Somb.} = 2a + 2b = ??$

Pero del gráfico: $a + b = A_{◀OND} = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi cm^2$

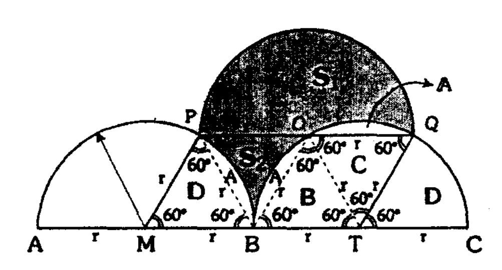
$\therefore\ A_{SOMB.} = 2(a + b) = 2\pi\ cm^2$

PROBLEMA 32

En la figura mostrada, sobre el lado mayor del paralelogramo se ha trazado un semicírculo. Calcule el área de la región sombreada.



Resolución:



Piden: $S_1 + S_2$ = ??

- Como ▭MPQT es un paralelogramo
  $\Rightarrow m\measuredangle PQT = m\measuredangle QTC = 60°$ y $PQ = 2r$

- Trazamos $\overline{OT} = \Delta OQT$ es equilátero
  $\Rightarrow OQ = r$ y $PO = r$.
  $\Rightarrow S_{\frown PQ} = S_{\frown BC}$

  $S_1 + \cancel{A} = \cancel{A} + B + C + D$

  $S_1 = B + C + D$

Además: $S_{\triangleleft PMB} = S_{\triangleleft QTC} = D$

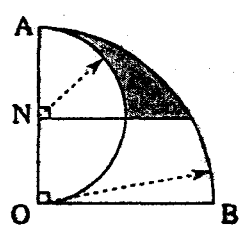
- Luego: $\underbrace{S_{▱ MPQT}} = S_2 + \underbrace{D + B + C}_{S_1} = D$

$$2r \cdot \left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right) = S_2 + S_1$$

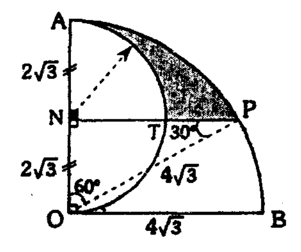
$$\therefore\ S_1 + S_2 = r^2\sqrt{3}$$

PROBLEMA 33

Calcule el área de la región sombreada si: $ON = NA = 2\sqrt{3}$m



Resolución:



Piden: S

Datos: $ON = NA = 2\sqrt{3}$

Trazamos radio $\overline{OP} \rightarrow OP = OA = OB = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow \triangle ONP$ es notable de (30° y 60°) $\rightarrow NP = 6$

Luego:

$$S = S_{\triangleleft AOP} - S_{ANT} - S_{\triangle ONP}$$

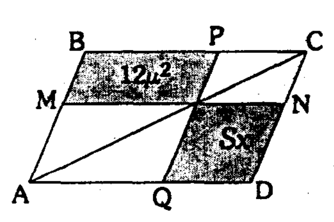
$$S = \frac{\pi(4\sqrt{3})^2}{6} - \frac{\pi(2\sqrt{3})^2}{4} - \frac{6(\cancel{2}\sqrt{3})}{\cancel{2}}$$

$$S = (8\pi - 3\pi - 6\sqrt{3})m^2$$

$$\therefore\ S = (5\pi - 6\sqrt{3})\,m^2$$

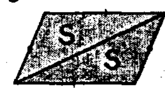
PROBLEMA 34

Siendo ABCD un paralelogramo, calcule el área de la región Sx si $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $\overline{PQ} // \overline{AB}$.



Resolución:

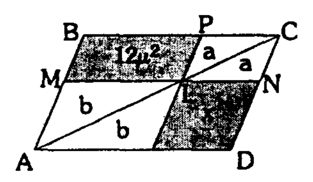
En todo paralelogramo



Ahora, como $\overline{PQ} // \overline{AB}$ y $\overline{MN} // \overline{BC}$

=> ▱PLNC y ▱AMLQ: paralelogramos

Luego, se obtiene:



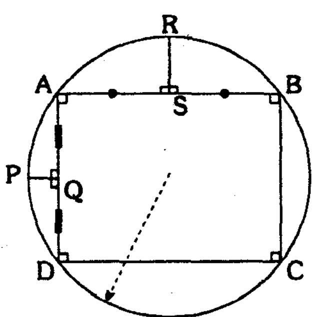
Entonces en el ▱ABCD

$\not{b} + 12 + \not{a} = \not{b} + x + \not{a}$

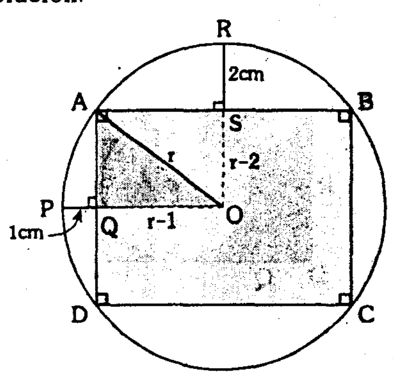
$\therefore\ x = 12\mu^2$

PROBLEMA 35

Calcule el área de la región limitada por el rectángulo inscrito en una circunferencia, si las flechas PQ y RS miden 1 cm y 2 cm. respectivamente.



Resolución:



Piden: $S_{\square ABCD}$

Datos: PQ = 1 cm ; RS = 2 cm

Sea el radio igual a r, entonces PO = RO = r

$\Rightarrow$ QO = r − 1 y SO = r − 2

En el ◺ AQO, aplicando el teorema de Pitágoras

$\Rightarrow (r-2)^2 + (r-1)^2 = r^2$

$r^2 - 4r + 4 + r^2 - 2r + 1 = r^2$

$r^2 - 6r + 5 = 0$

r ⟍ −5 $\Rightarrow$ r = 5

r ⟋ −1 $\Rightarrow$ r = 1(no válido r>2)

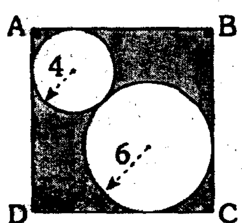
Entonces: AB=8cm, AD=6cm

$S_{\square ABCD}$ = (8cm)(6cm)

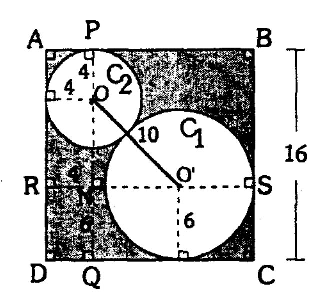
$S_{\square ABCD}$ = 2(4)×2(3) = 48 cm²

PROBLEMA 36

Calcule el área de la región sombreada si BC=16 m



Resolución:



Piden: Sx

- Se observa:

$$Sx = S^{\square}_{ABCD} - Sc_1 - Sc_2$$

Como $BC = PQ = 16 \Rightarrow 4 + ON + 6 = 16$

$\therefore \Rightarrow ON = 6.$

Luego en el ◺ONO' =NO' =8

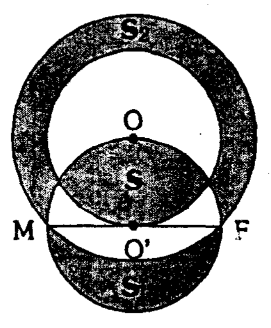
$\rightarrow AB=RS=4+8+6=18$

$\rightarrow Sx=16(18)-\pi(6)^2-\pi(4)^2$

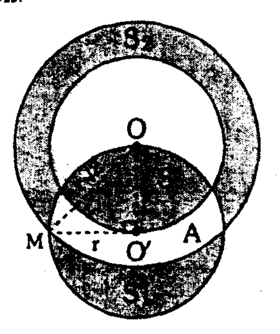
$\therefore Sx=4(72-13\pi)m^2$

PROBLEMA 37

En la figura, las áreas de las regiones sombreadas son: $S_2 = 20\ u^2$ y $S_1 = 12u^2$; además: $\overline{MF}$ es diámetro, O y O' son centros. Entonces, el área S es:



Resolución:



Piden: S

- Datos: $S_1 = 20u^2$ y $S_2 = 12\ u^2$

  Sea $OO' = r \Rightarrow OM = r\sqrt{2}$

- Para el círculo de centro O':

  $S + A + S_1 = \pi r^2 \ldots\ldots (1)$

- Para la corona:

  $S_2 + A = \pi(r\sqrt{2})^2 - \pi r^2$

  $S_2 + A = \pi r^2 \ldots\ldots (2)$

- Igualando (1) y (2):

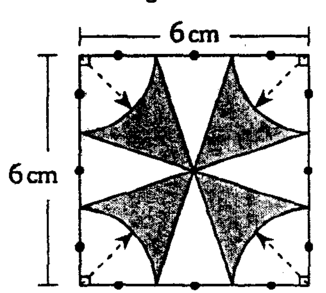
  $S + A + S_1 = S_2 + A$

  $\Rightarrow S = S_2 - S_1$

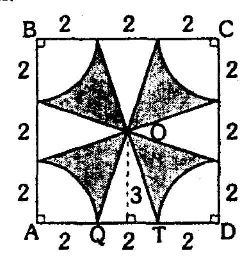
  $\therefore S = 20 - 12 = 8\ u^2$

PROBLEMA 38

Calcule el área de la región sombreada



Resolución:



Del gráfico se observa:

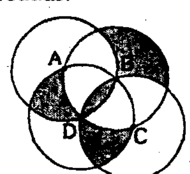
$$A_{reg.somb} = S_{\square ABCD} - 4S_{PAQ} - 4S_{\triangle QTO}$$

$$\Rightarrow A_{reg.somb'} = 6^2 - 4\left(\frac{\pi.2^2}{4}\right) - 4\left(\frac{2.3}{4}\right)$$

$$\therefore \ S = 4(6-\pi)\ m^2$$

PROBLEMA 39

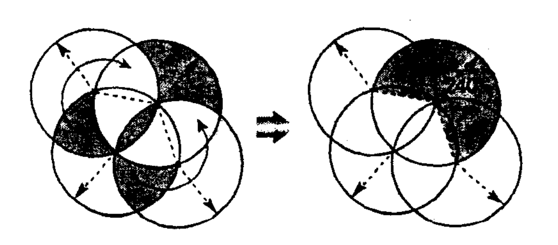
En la figura A, B, C y D son centros y el radio mide $\sqrt{3}$. Calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



Resolución:

Según el gráfico y las condiciones del problema las cuatro circunferencias tiene radio igual a $\sqrt{3}$u.

- Si trazamos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ se observan regiones equivalentes, las cuales podemos trasladar.



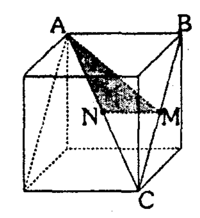
- Además: $\triangle$ABD y $\triangle$BDC son equilátero.

$$\Rightarrow \ S = \pi(\sqrt{3})^2\left(\frac{240°}{360°}\right)$$

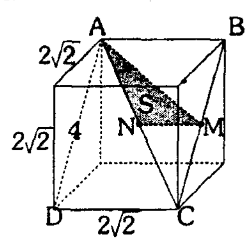
$$\therefore \ S = 2\pi u^2$$

PROBLEMA 40

Si la arista del cubo mide $2\sqrt{2}$ u, calcule el área de la región triangular AMN, si N es punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{NM}$ // $\overline{AB}$



Resolución:

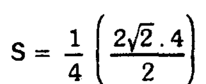


Nos piden: S

En el $\triangle$ ABC: m∢ABC = 90° ($\overline{AB} \perp \overline{BC}$)

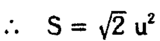
Por dato: N es el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{NM}$// $\overline{AB}$ → M es punto de $\overline{BC}$.

Luego:

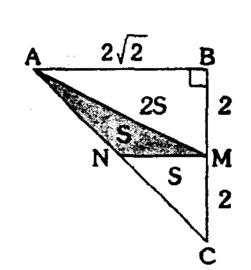


$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} A_{\triangle ABC}$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}.4}{2}\right)$$



$$\therefore \ S = \sqrt{2}\ u^2$$

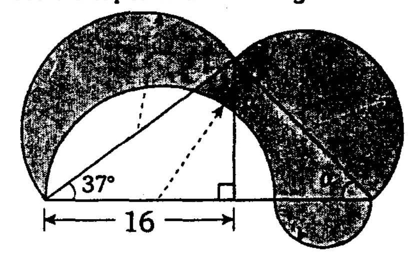


Problemas Propuestos

1. Se tiene dos circunferencias ortogonales de 5 cm y 12 cm de radio; entonces, la distancia entre sus centros es:

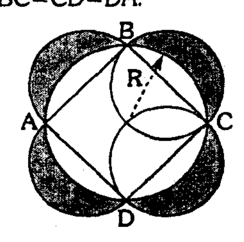
A) 13 B) 10 C) 17
D) cero E) 9

2. Calcule el perímetro de la región sombreada



A) $6\pi(2+\sqrt{2})$
B) $4\pi(6+\sqrt{2})$
C) $6\pi(3+\sqrt{2})$
D) $6\pi(4+\sqrt{2})$
E) $6\pi(1+\sqrt{2})$

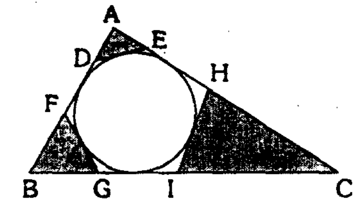
3. Calcule el perímetro de la región sombreada, si AB=BC=CD=DA.



A) $2\pi R\,(1+\sqrt{2})$ u
B) $\pi R\,(2+\sqrt{2})$ u
C) $3\pi R\,(\sqrt{2}-1)$ u
D) $2\pi R(2\sqrt{2}-1)$ u
E) $\pi R\,(2+3\sqrt{2})$ u

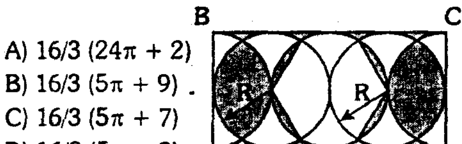
4. Siendo los perímetros de las regiones triangulares ADE, BFG y CHI: 3,4 y 5 m, respectivamente; calcule el perímetro de la región triangular ABC.

A) 12 m
B) 15 m
C) 24 m
D) 18 m
E) 30 m



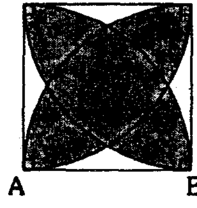
5. La figura muestra a tres circunferencias de radios iguales a 4cm. Calcule el perímetro de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.

A) 16/3 (24π + 2)
B) 16/3 (5π + 9)
C) 16/3 (5π + 7)
D) 16/3 (5π + 2)
E) 16/3 (5π + 3)



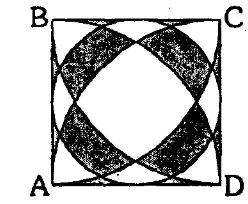
6. Si ABCD es un cuadrado de lado 3a, calcule el perímetro de la región sombreada.

A) 4a π
B) 5a π
C) 6a π
D) 8a π
E) 9a π



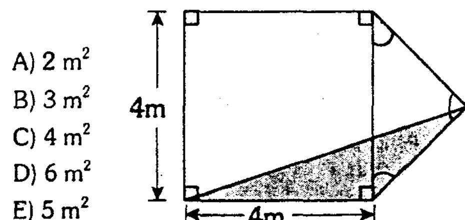
7. Calcule el perímetro de la región sombreada, si ABCD en un cuadrado cuyo lado mide a. (A, B, C y D son centros).

A) $a(4+\pi)$
B) $a(3+3\pi)$
C) $a(4+3\pi)$
D) $a(3+4\pi)$
E) $a(4+2\pi)$



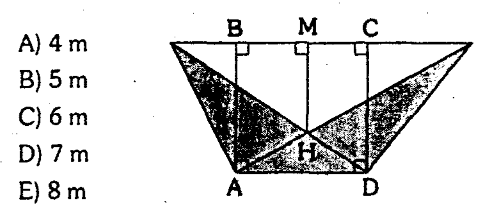
8. Calcule el área de la región sombreada:

A) 2 m^2
B) 3 m^2
C) 4 m^2
D) 6 m^2
E) 5 m^2



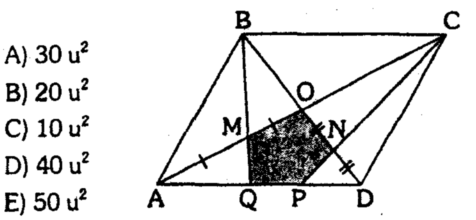
9. ABCD es un cuadrado de 12m. ¿Cuál debe ser la longitud de $\overline{HM}$ para que el área de la región sombreada sea 120 m^2?.

A) 4 m
B) 5 m
C) 6 m
D) 7 m
E) 8 m

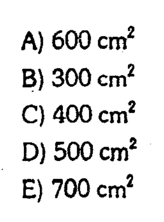


10. Siendo ABCD un paralelogramo; AM = MO, ON = ND y el área de ABCD = 120 u^2. Calcule el área de la región sombreada.

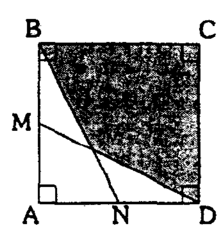
A) 30 u^2
B) 20 u^2
C) 10 u^2
D) 40 u^2
E) 50 u^2



11. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 30 cm, M y N son puntos medios, calcule el área de la región sombreada.

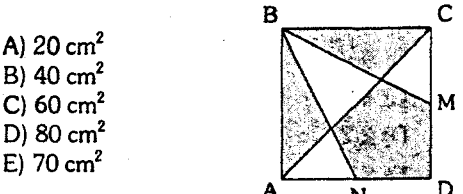


A) 600 cm^2
B) 300 cm^2
C) 400 cm^2
D) 500 cm^2
E) 700 cm^2



12. Halle el área de la región sombreada, si ABCD es una región cuadrada de área 120 cm^2, M y N son puntos medios.

A) 20 cm^2
B) 40 cm^2
C) 60 cm^2
D) 80 cm^2
E) 70 cm^2



13. Calcule el área de la región sombreada, en:

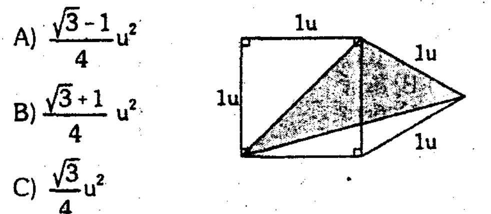
A) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}u^2$

B) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}u^2$

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}u^2$

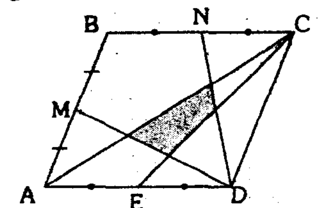
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

E) $1u^2$



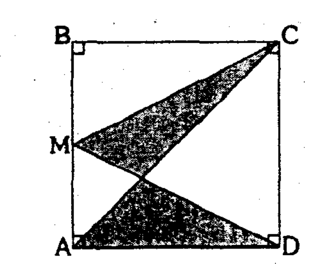
14. En la figura, M, N y E son puntos medios de los lados del paralelogramo ABCD donde el área de la región que limita es 120 m^2, halle el área de la región sombreada.

A) 7 m^2
B) 8 m^2
C) 9 m^2
D) 10 m^2
E) 11 m^2

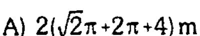


15. En la figura se tiene un cuadrado ABCD. Si M es punto medio, ¿qué parte del total representa el área de la región sombreada?

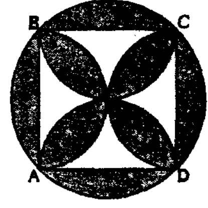
A) 1/3
B) 1/4
C) 1/6
D) 1/10
E) 1/12



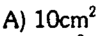
16. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4m, calcule el perímetro de la región sombreada.



A) $2(\sqrt{2}\pi+2\pi+4)$ m
B) $4(\sqrt{2}\pi+2\pi+4)$ m
C) $4(2\sqrt{2}\pi+\pi+4)$ m
D) $2(2\sqrt{2}\pi+2\pi+2)$ m
E) $3(4\sqrt{2}\pi+\pi+2)$ m



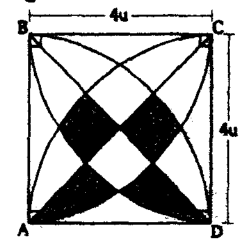
17. En el paralelogramo, M y N son puntos medios. Calcule el área de la región sombreada.



A) $10cm^2$
B) $8cm^2$
C) $6cm^2$
D) $12cm^2$
E) $9cm^2$

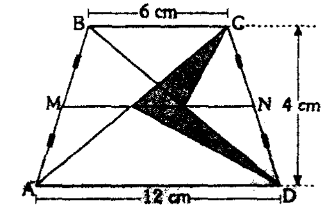
18. Calcule el área de la región sombreada.

A) $2(\pi-4)u^2$
B) $3(2\pi-1)u^2$
C) $6(\pi-2)u^2$
D) $4(\pi-2)u^2$
E) $(\pi-4)u^2$



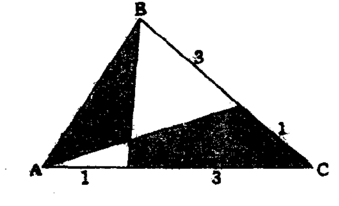
19. Calcule el área de la región sombreada, si $\overline{MN}$ es la base media del trapecio ABCD.

A) $5cm^2$
B) $9cm^2$
C) $8cm^2$
D) $7cm^2$
E) $6cm^2$



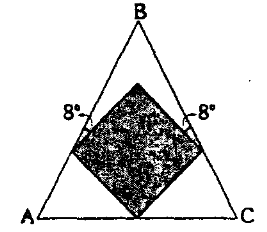
20. Halle la razón entre las áreas de las dos regiones sombreadas.

A) 1
B) 1/2
C) 1/3
D) 2/3
E) 1/4



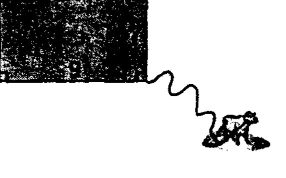
21. Calcule el área de la región cuadrada sombreada, si sabemos que se trata de un cuadrado, y el triángulo ABC es isósceles, donde AB=BC=35m.

A) $290m^2$
B) $250m^2$
C) $200m^2$
D) $244m^2$
E) $288m^2$



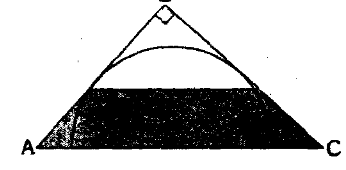
22. Un buey está atado a un poste en la esquina de la cabaña rectangular que se muestra en el diagrama; la cabaña tiene un largo de 9m y un ancho de 7m y la cuerda es de 10m. El área, en m^2, donde puede pastar el buey es:

A) 80π
B) $76{,}2\pi$
C) $77{,}5\ \pi$
D) $85{,}5\pi$
E) 90π



23. En la figura calcule el área de la región sombreada si: AD = 4cm y EC = 9cm. Además D y E son puntos de tangencia.

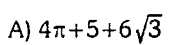
A) $49cm^2$
B) $50cm^2$
C) $57cm^2$
D) $55cm^2$
E) $60cm^2$



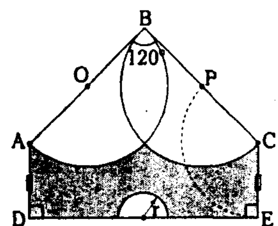
24. De la figura, calcule el área de la región sombreada si AQ=10cm; ABCD es un cuadrado T y Q: puntos de tangencia y $\overline{CD}$ diámetro.

A) $50cm^2$
B) $30cm^2$
C) $45cm^2$
D) $36cm^2$
E) $40cm^2$

25. Calcule el perímetro de la región sombreada. Si O, P y C son centros de circunferencias de radio igual a 3, r=1; ∢ABC=120°.

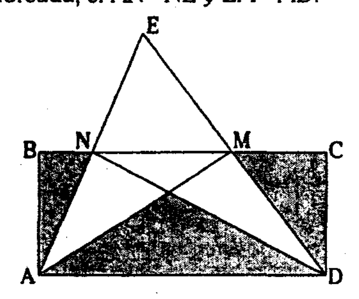


A) $4\pi+5+6\sqrt{3}$
B) $4\pi+4+6\sqrt{3}$
C) $2\pi+3+4\sqrt{3}$
D) $5\pi+4+6\sqrt{3}$
E) $2\pi+6+4\sqrt{3}$



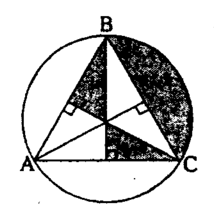
26. Si ABCD es un rectángulo y área de la región que limita es 36m², calcule el área de la región sombreada; si AN=NE y EM=MD.

A) 18m²
B) 24m²
C) 23m²
D) 20m²
E) 21m²



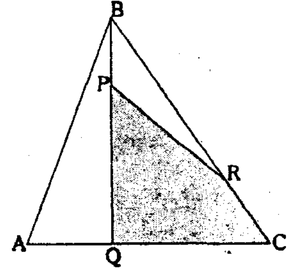
27. Calcule la razón entre el área de la región sombreada y el área del círculo. (ΔABC es equilátero).

A) 1/3
B) 1/2
C) 1/4
D) 2/3
E) 1/5



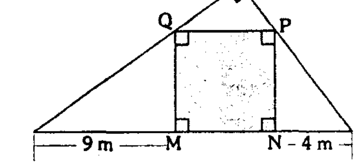
28. Si: $S_{ABQ}=12m^2$; AC=4(AQ); BC=6(RC); BQ=3(BP). Calcule el área de la región sombreada.

A) 28m²
B) 26m²
C) 20m²
D) 25m²
E) 27m²



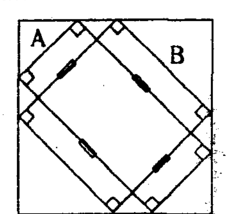
29. En la figura adjunta, calcule el área de la región cuadrada MNPQ.

A) 36m²
B) 49m²
C) 32m²
D) 25m²
E) 20m²



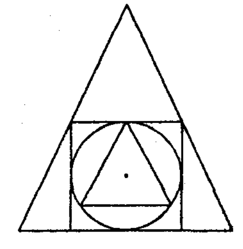
30. En la figura se muestra un cuadrado, entonces, la razón de los perímetros de las regiones rectangulares inscritas será:

A) 1
B) 2/3
C) 1/2
D) 3/4
E) 5/6



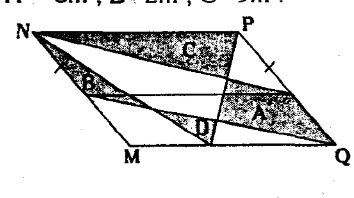
31. La figura muestra dos triángulos equiláteros, un cuadrado y una circunferencia. Si el lado del triángulo equilátero mayor mide $(4+2\sqrt{3})\mu$, calcule el perímetro de la región que limita el triángulo equilátero menor.

A) 12μ
B) 10μ
C) 9μ
D) 14μ
E) 15μ



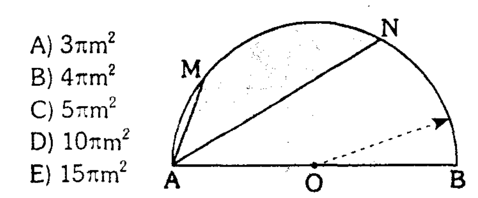
32. Si: MNPQ es un paralelogramo. Halle el área D si A = 8m²; B=2m²; C=9m².

A) 4m²
B) 0,5m²
C) 3m²
D) 2m²
E) 1m²



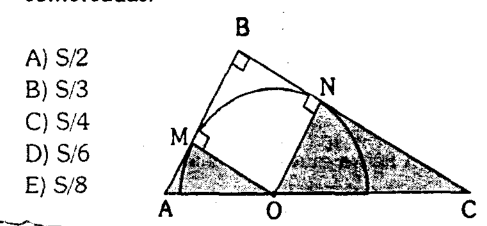
33. En una semicircunferencia de diámetro AB se ubican los puntos M y N de modo que $m\overset{\frown}{AM}=54°$ y $m\overset{\frown}{MN}=72°$, si AB=10m. Halle el área de la región sombreada.

A) $3\pi m^2$
B) $4\pi m^2$
C) $5\pi m^2$
D) $10\pi m^2$
E) $15\pi m^2$



34. En la figura mostrada O es centro, AB=2(AM), M y N son puntos de tangencia y el área de la región ABC es S. Calcule la suma de las áreas de las regiones sombreadas.

A) S/2
B) S/3
C) S/4
D) S/6
E) S/8



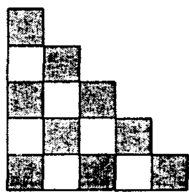
35. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo rectángulo ABC se obtiene un triángulo rectángulo cuyo cateto e hipotenusa miden 3 m y 5 m respectivamente. El área de la región que limita el triángulo ABC es:

A) $32\ m^2$ B) $30\ m^2$ C) $24\ m^2$
D) $48\ m^2$ E) $36\ m^2$

36. En un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes de 50 m y 120 m, se inscribe un rectángulo que tienen dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determine el área máxima de dicho rectángulo.

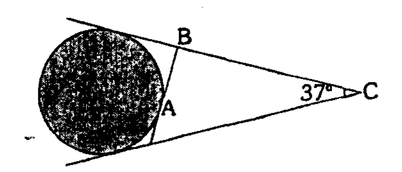
A) $1200\ m^2$ B) $1500\ m^2$ C) $1750\ m^2$
D) $2000\ m^2$ E) $2500\ m^2$

37. ¿Qué porcentaje del área total representa la suma de las áreas de las regiones no sombreadas? (Todos los cuadraditos son iguales).



A) 50% B) 60% C) 80%
D) 90% E) 40%

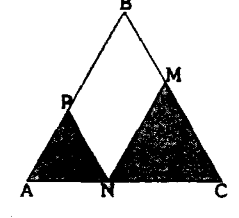
38. Halle el área de la región sombreada si AB+BC=24 m.



A) $64\pi\ m^2$ B) $36\pi\ m^2$ C) $48\pi\ m^2$
D) $81\pi\ m^2$ E) $16\pi\ m^2$

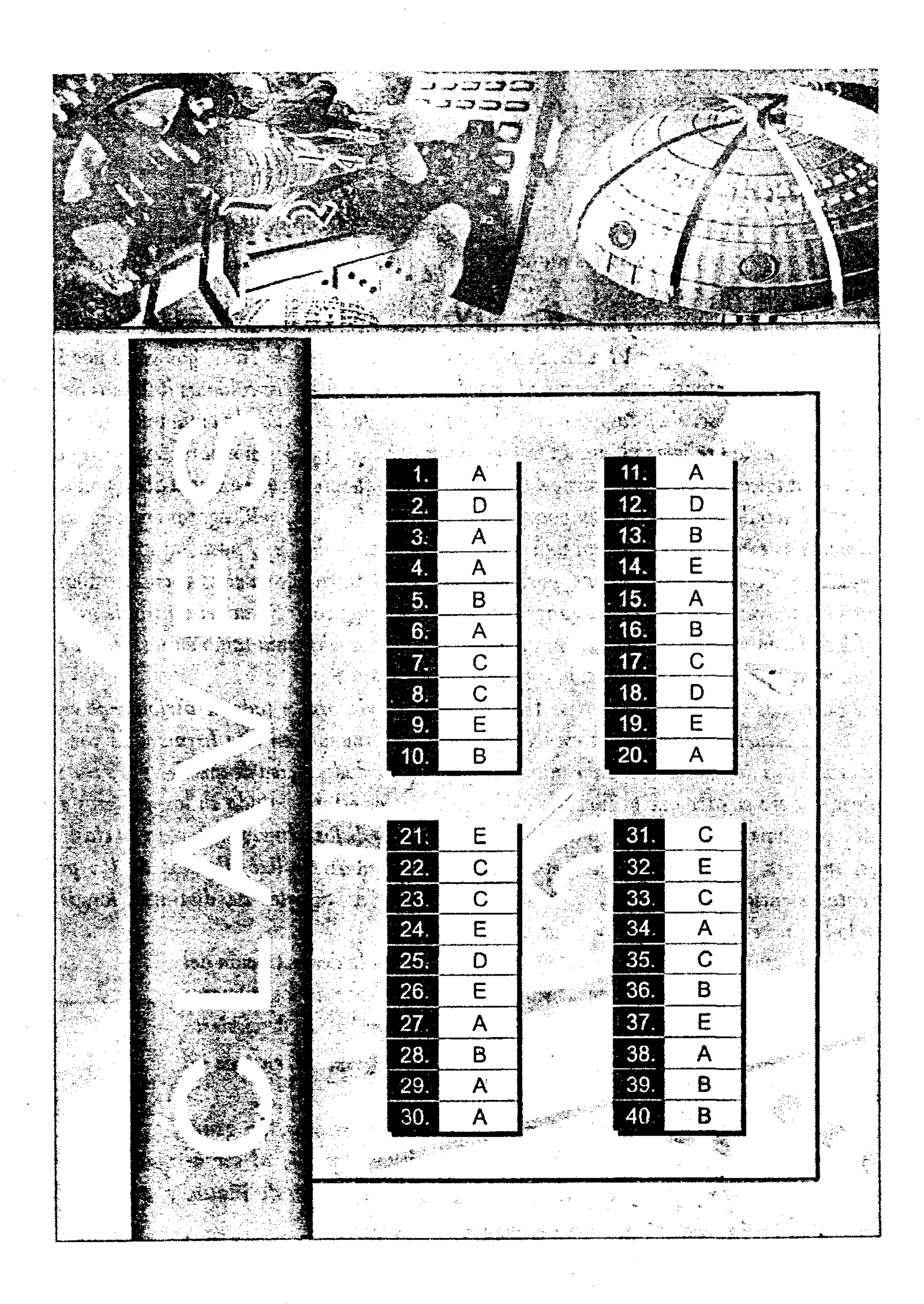
39. En el triángulo equilátero ABC, PN//BC y MN//AB, cuál es la razón entre el perímetro de la superficie sombreada y el perímetro de la superficie no sombreada.

A) 1/2
B) 3/2
C) 2/3
D) 1/4
E) 1/3



40. En un trapecio rectángulo el perímetro es 18 m y el lado mayor no paralelo es 7 m. Calcule el área de la región que limita la circunferencia inscrita en este trapecio.

A) $\pi^2 m^2$ B) πm^2 C) $\pi^2/2m^2$
D) $\pi/2m^2$ E) $4\pi m^2$



1.	A	11.	A	21.	E	31.	C
2.	D	12.	D	22.	C	32.	E
3.	A	13.	B	23.	C	33.	C
4.	A	14.	E	24.	E	34.	A
5.	B	15.	A	25.	D	35.	C
6.	A	16.	B	26.	E	36.	B
7.	C	17.	C	27.	A	37.	E
8.	C	18.	D	28.	B	38.	A
9.	E	19.	E	29.	A	39.	B
10.	B	20.	A	30.	A	40.	B

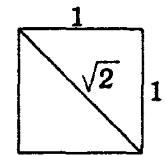
Pitágoras

Nació hacia el año 582 a.C. en la isla griega de Samos. Recordado por su estudio de los sonidos musicales y sus estudios matemáticos. Murió hacia el año 497 a.C., a la edad de 85 años aproximadamente.

Pero en realidad, se sabe muy poco de la vida de Pitágoras; parece haber nacido en Grecia, en la isla Samos, a mediados del siglo VI a.C. Se piensa que fue discípulo de Tales, que viajó por Egipto, pero que, a su regreso, estando su país ocupado por los persas, se fue a las colonias italianas de Grecia donde fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona, al sur de Italia cuando tenía unos 40 años. En esta extraña comunidad religiosa llamada la Hermandad Pitagórica, los miembros vivían según unas normas que él estableció. No comían carne de ningún tipo porque creían que nuestra alma podía entrar en los animales cuando moríamos. Tampoco podían comer judías porque Pitágoras creía que también tenían alma. Los pitagóricos llevaban una vida muy estricta y simple, y pasaban gran parte de su tiempo trabajando con las matemáticas, porque Pitágoras pensaba que en ellas se encontraban todos los secretos del universo y creía que algunos números eran mágicos. En aquel centro de estudios se discutía filosofía, matemáticas y ciencias naturales, pero la escuela tenía también influencia política y religiosa, lo que provocó su destrucción a principios del siglo V.

Las enseñanzas de los pitagóricos se transmitían por vía oral y todo se atribuía al venerado fundador de la escuela. Además, la escuela se fue transformando en una hermandad con ritos y ceremonias secretas de los cuales se sabe muy poco (por eso se duda acerca de qué descubrieron y quién lo descubrió). Pero se sabe que la filosofía de los pitagóricos estaba basada en los números enteros, pilares del conocimiento humano; de ahí un estudio intensivo de los números enteros y su clasificación en pares, impares, perfectos, amigos, etc. Pitágoras también realizó algunos de los primeros experimentos científicos, escuchando los sonidos de cuerdas tirantes de distintas longitudes y resolviendo las matemáticas de las octavas y la armonía.

También, la tradición le atribuye a la escuela pitagórica la demostración del Teorema de Pitágoras y, como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela: habían descubierto que existían números inexpresables, como $\sqrt{2}$, *que no eran ni enteros ni fraccionarios.*



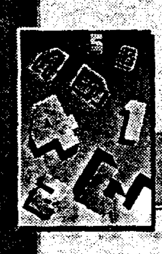
Se cuenta que los pitagóricos trataron de guardar el secreto de tan grave asunto y que Hipasus, uno de los miembros de la escuela, murió, al ser arrojado al mar, por divulgarlo. Sus ideas matemáticas fueron importantes para el filósofo Platón y, a través de éste, influyó a otros científicos como Galileo, Kepler y sir Isaac Newton.

"Episodios de la Historia Antigua
de la Matemática" cap. I
(Extractos)

GEOMETRÍA ANALÍTICA

"Como resultado de los trabajos de Gauss y Riemann se aceptó la idea de que aquello que llamamos espacio no es más que un caso particular de otro caso más general con múltiples dimensiones cuantitativas".

"El mundo de la matemática"



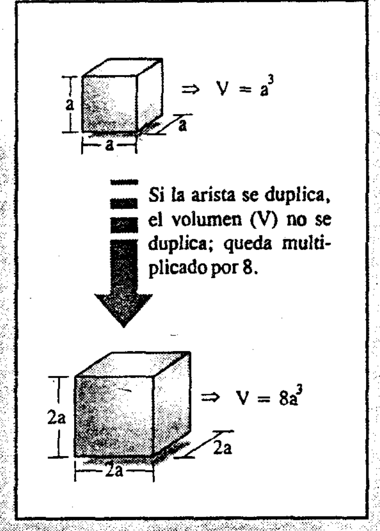
Lectura 19

El Sepulcro de Glauco y el altar de apolo

Muchas veces ciertos problemas teóricos tienen su origen histórico conocido en situaciones prácticas ocurridas a reyes, héroes o personajes importantes del pasado.

Dichas historias del título dieron origen a uno de los problemas geométricos más famosos, como es el que se refiere a la duplicación del cubo. Constituye el tema de una carta de Eratóstenes al rey Ptolomeo, que dice así: "Cuéntase que uno de los antiguos poetas trágicos hacía aparecer en escena a Minos en el momento en que se construía la tumba de Glauco, y al observar que sólo medía cien pies por cada lado, dijo: Es un espacio muy pequeño para sepulcro de un rey, duplicadla conservando su forma cúbica, duplicando cada lado".

Es evidente que se equivocaba, ya que duplicando los lados de una figura plana se cuadruplica, mientras que una sólida se octuplica. Entonces se propuso a los geómetras la cuestión de duplicar una figura sólida dada, conservando su forma. A este proceso se lo llamó duplicación del cubo.



Se cuenta también que más tarde, por orden de la pitonisa de Delos, se debía duplicar el altar dedicado a Apolo para aplacar la ira de los dioses, que habían desencadenado una epidemia en la isla.

Según Eratóstenes, el primero que intentó la resolución del primer problema fue Hipócrates de Chios, que transformó el problema en otro no menor. Luego, el problema del altar de Apolo fue estudiado por Arquitas de Tarento y Eudoxio, pero no pudieron efectuar la construcción y acomodarla a la práctica; sólo logró este fin, con gran trabajo, Menecmo.

La solución de Menecmo equivale a encontrar los puntos de intersección de dos parábolas, o de una parábola y una hipérbola, para lo cual se inventaron diversos instrumentos mecánicos, pero como conducían a curvas que no eran matemáticas en el sentido griego se decretó imposible la solución del problema.

FUENTE: El mundo de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN A LA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Objetivos

1. *Dar a conocer las nociones básicas de la geometría analítica.*
2. *Iniciar al lector en el estudio de las coordenadas rectangulares y su relación con el álgebra en el aspecto de la gráfica de funciones elementales.*
3. *Sentar las bases para un posterior estudio a nivel superior y motivar la investigación de otros sistemas de coordenadas (polares, cilíndricas, esféricas).*

Introducción

"Estamos en los albores del siglo XVII y han transcurrido 18 siglos desde la muerte del célebre siracusano Arquímedes y durante todo este tiempo la Geometría no volvió a ocupar el alto nivel alcanzado por el griego. Salvo algunas excepciones, esta rama de la matemática no tendría avances realmente considerables. Aletargada durante 1 800 años, muy pronto despertaría para alcanzar durante los siguientes años un impresionante y vertiginoso desarrollo".

El resurgimiento científico del Renacimiento desembocará en un siglo XVII lleno de importantes y revolucionarios descubrimientos que influirán decisivamente en el desarrollo del conocimiento humano.

Este siglo verá nacer en el seno de las matemáticas nuevas ramas que solucionarán problemas ya planteados desde la antigüedad: la teoría de los números, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal.

Así, el nacimiento de la Geometría Analítica señala un hito en el desarrollo de la matemática moderna y es obra de dos grandes hombres de ciencia: René Descartes (1 596–1 650), llamado Cartesio, y Pierre Fermat (1601–1 665). Escritor, filósofo, físico y matemático, Descartes es sin duda uno de los más eminentes representantes de la cultura en la historia de la humanidad. Por su parte, Fermat se interesó por la matemática con estudios sobre la teoría de números, con brillantes y agudos análisis de las obras del alejandrino Diofanto. La idea que da origen a la geometría analítica es la siguiente: fijar la posición de cada punto mediante unos números a los cuales se llama coordenadas del punto, de forma que, dando las coordenadas, ya sepamos a qué punto nos estamos refiriendo. Las rectas, curvas, planos, superficies, son conjuntos de puntos que tienen unas determinadas características. En el caso de la circunferencia, por ejemplo, una condición que caracteriza a sus puntos es que todos ellos se hallan a la misma distancia del centro.

Si traducimos las condiciones que cumplen los puntos a condiciones sobre sus coordenadas, dado que éstas son números, lo que obtenemos son relaciones entre cantidades numéricas, es decir, planos, circunferencias y en general de cualquier curva o superficie. De esta manera logramos prescindir de la necesidad que teníamos hasta ahora de imaginarnos los problemas geométricos, ya que podemos limitarnos al manejo y resolución de ecuaciones.

Independientemente de si la paternidad del descubrimiento hay que atribuirla a Descartes o a Fermat, la geometría analítica representa el momento tan esperado de la historia de la matemática: la acertada concepción griega de la geometría encuentra en el álgebra su potente instrumento de expresión. Será quizá por esto último que fue denominada durante un período "la geometría de los métodos algebraicos" dando lugar, así, al análisis de las variables del álgebra vectorial y la geometría analítica vectorial, de gran importancia en el campo de la matemática, de la física-matemática y de la revolucionaria teoría de la relatividad de Einstein.

SISTEMA DE COORDENADAS

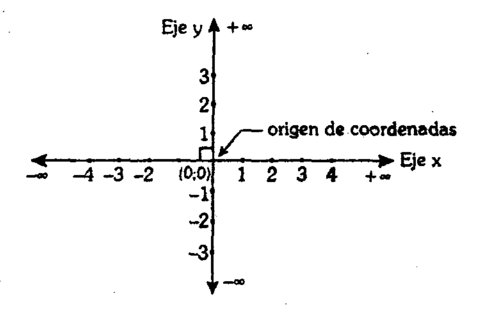
¿Qué es el plano cartesiano?

Es un sistema de referencia formada por 2 líneas rectas perpendiculares entre sí y que nos sirve para representar puntos de coordenadas conocidas.

Debemos mencionar que el sistema de los números reales (el conjunto R) está asociado a la recta numérica real o eje X.

Entonces, el producto $R \times R = R^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados del plano que está determinado por dos rectas numéricas reales perpendiculares, siendo estos horizontal y vertical respectivamente, dichas rectas son los ejes de coordenados rectangulares o **plano cartesiano** y a la intersección de los ejes se denomina origen de coordenadas.

En el gráfico, se muestra el plano cartesiano, con el origen de coordenadas.



Observación:

- Al plano cartesiano se le denomina también sistema de coordenadas rectangulares o sistema $X-Y$.
- El conjunto de todo los pares ordenados $(x; y)$ se denomina plano numérico y se denota por R^2, así:

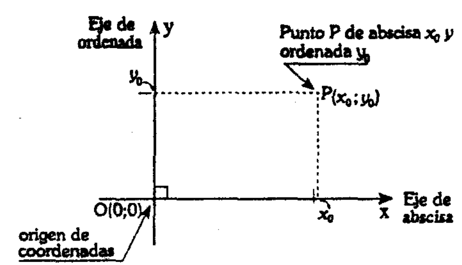
$$R^2 = ((x; y) / x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$$

¿Cómo se ubica un punto en el plano cartesiano?

Primero enunciaremos un importante postulado:

En todo plano existen infinitos puntos.

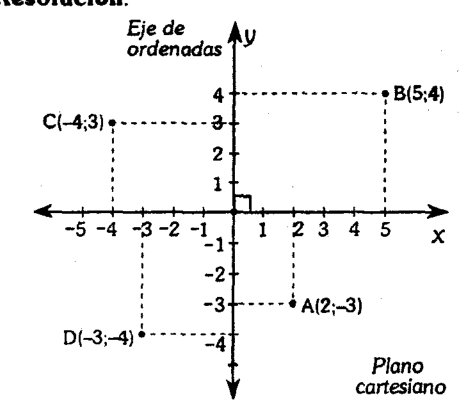
Entonces, en el plano cartesiano existen infinitos puntos y a cada punto se le asocia un único par o pareja de números al cual se denomina **par ordenado $(x_o ; y_o)$**.



Notación de par ordenado : $(x_0 ; y_0)$ donde:
x_0 : es primera componente o abscisa.
y_0 : es segunda componente u ordenada.

Ejemplo:
Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos:
A(2; –3), B(5;4), C(–4; 3), D(–3; –4)

Resolución:



¿Qué es una escala?

Para representar puntos de coordenadas conocidas hay que adoptar una escala adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados. Ambas escalas pueden ser iguales o distintas.

Probablemente, has visto muchas gráficas en las cuales las escalas horizontal y vertical han sido elegidas independientemente una de otra. Por ejemplo, si se quiere dibujar una gráfica para

representar cómo el precio de un artículo (considerándolo en soles) aumentó desde el año 1 960 hasta 1 990, no es necesario que haya alguna relación particular entre las escalas del eje horizontal y del vertical; pues en este caso las escalas miden diferentes clases de cosas. Una indica el precio en soles y la otra el año en que se vendía a dicho precio.

Por otra parte, cuando dibujamos un sistema de coordenadas para trazar una figura, ésta se deformará si las escalas en los ejes son diferentes. La razón es que las escalas se utilizan en esta oportunidad para medir distancias.

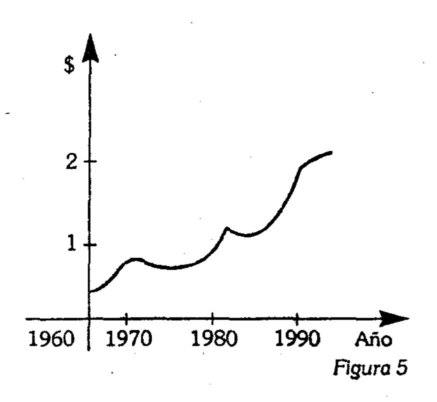


Figura 5

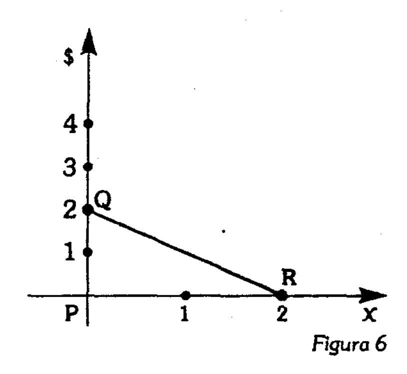


Figura 6

En la figura 6, las escalas nos dicen que PQ=2 y PR=2. Por lo tanto, el TPQR es isósceles. Pero, ¿realmente lo ves así?; desde luego, no parece isósceles y los ángulos ∠Q y ∠R ciertamente no parecen congruentes. Esto quiere decir que hemos trazado una figura deformada. Para evitar estas deformaciones, generalmente utilizamos la misma escala en ambos ejes.

En el plano cartesiano se realizan las siguientes aplicaciones:

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS (d)

Representados los puntos en el plano cartesiano podemos calcular la distancia entre ellos de manera sencilla. Veamos la figura 7 y consideremos el triángulo ⊿ P_1MP_2.

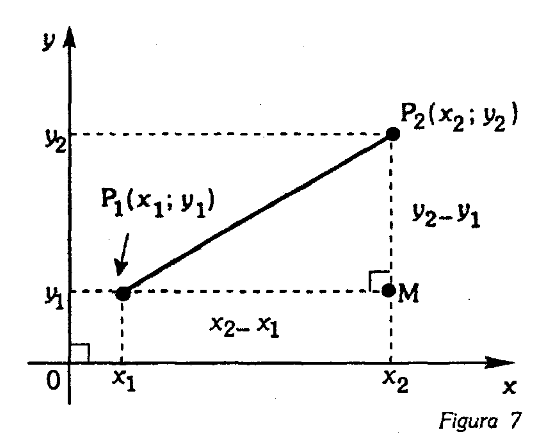


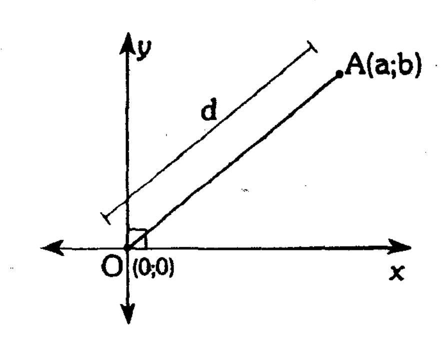
Figura 7

Entonces, aplicando aquí el teorema de Pitágoras, llegamos a determinar la distancia entre los puntos P_1 $(x_1 ; y_1)$ y P_2 $(x_2 ; y_2)$ así:

$$d(P_1 ; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

¿Cómo se calcula la distancia de un punto al origen de coordenadas?

Veamos:



Consideremos lo siguiente:

$A = (a; b)$ y

d : distancia de A al origen de coordenadas

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

Calcule la distancia entre

a. (–2;3) y (5;1)

b. (6;–1) y (–4;3)

Resolución:

Ver figura 8

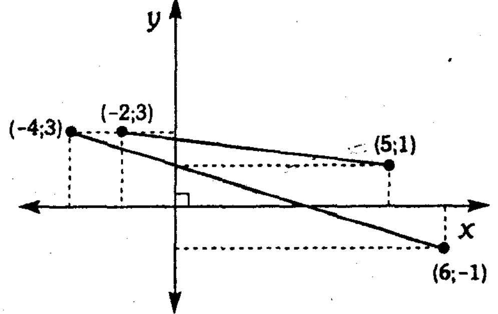


Figura 8

a. $d = \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-3)^2}$

$d = \sqrt{53}\,u$

b. $d = \sqrt{(6-(-4))^2 + (-1-3)^2}$

$d = 2\sqrt{29}\,u$

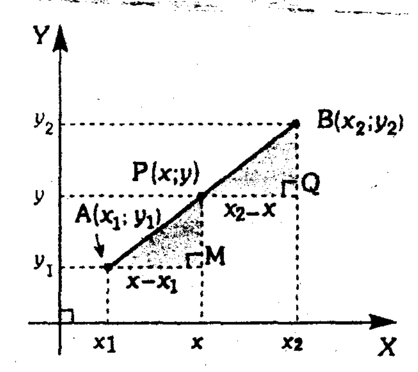
Observación:

Cuando uses la fórmula de la distancia recuerda que $d(P_1; P_2) = d(P_2; P_1)$ y, por lo tanto, no importa el orden en que se resten las abscisas y las ordenadas de los puntos.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Consideremos los puntos $A(x_1; y_1)$ y $B_2(x_2; y_2)$ y el segmento que determinan. Sea $P(x; y)$ un tercer punto que divida al segmento en la relación

$$\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n} = r \text{ (razón)}.$$



Teniendo en cuenta los triángulos semejantes de la figura tendremos:

$$\frac{AM}{PQ} = \frac{AP}{PB} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = r$$

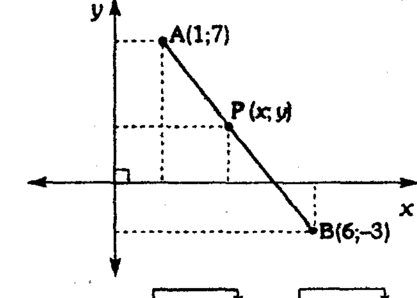
de donde se obtiene:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Ejemplo:

Halle las coordenadas de un punto $P(x;y)$ que divida al segmento cuyos extremos son $A(1;7)$ y $B(6;-3)$ en la razón de 2/3

Resolución:



Considerando $(x_1; y_1) = (1;7)$ $(x_2; y_2) = (6;-3)$

Se tiene $x = \dfrac{1+\frac{2}{3}(6)}{1+\frac{2}{3}} = 3$ $y = \dfrac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}} = 3$

Luego, $P(x;y) = P(3;3)$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

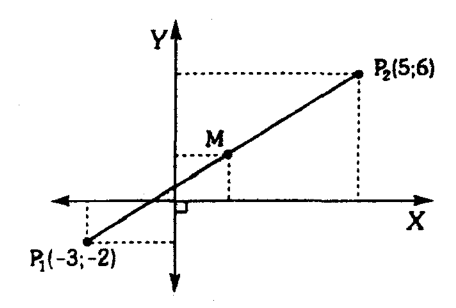
Si el punto $M(x;y)$ divide al segmento que tiene por extremos a los puntos $A(x_1;y_1)$ y $B(x_2;y_2)$ de tal modo que $r = \dfrac{AM}{MB} = 1$, de donde $AM=MB$, entonces diremos que **M es punto medio del segmento dado** y sus coordenadas están dadas por:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Ejemplo:

Halle las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son P_1 (–3; –2) y P_2 (5;6)

Resolución:



$(x_1; y_1) = (-3;-2)$ $(x_2; y_2) = (5;6)$

Luego:

$$x = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad y = \frac{-2+6}{2} = 2$$

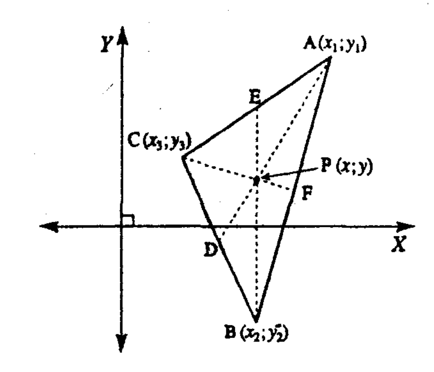
Así, las coordenadas del punto medio son M(1,2)

Cálculo de las coordenadas del baricentro de región triangular

Las medianas de un triángulo concurren en un punto $P(x;y)$ denominado baricentro. Halle las coordenadas del baricentro de un triángulo cuyos vértices tienen por coordenadas $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ y $C(x_3;y_3)$.

Resolución:

Consideramos la mediana AD.



- Como D es puto medio de $\overline{CB}$. Sus coordenadas son $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2};\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$
- Como $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{2}{1} = 2 = r$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1+2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1+2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Luego:

Las coordenadas del baricentro de un triángulo son:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Al mismo resultado hubiéramos llegado si consideramos las medianas $\overline{BE}$ o $\overline{CF}$.

Ejemplo 1

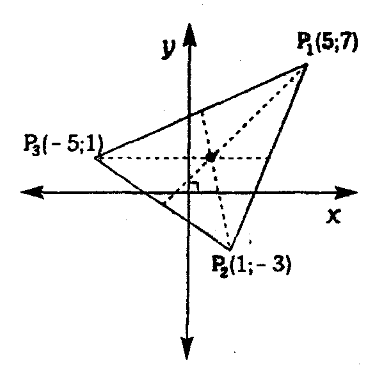
Halle las coordenadas del baricentro de los triángulo cuyos vértices son:

a. $P_1\ (5;7)\ ;\ P_2\ (1;-3)\ ;\ P_3\ (-5;1)$

b. $P_1\ (2;-1)\ ;\ P_2\ (6,7)\ ;\ P_3\ (-4;-3)$

Resolución:

a.



$P_1(x_1;y_1) = (5;7)$

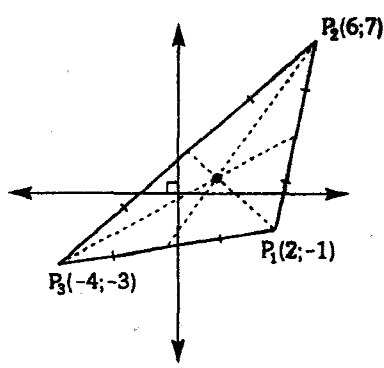
$P_2(x_2;y_2) = (1;-3)$

$P_3\ (x_3;y_3) = (-5;1)$

$$x = \frac{5+1+(-5)}{3} = \frac{1}{3};\ y = \frac{7+(-3)+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Las coordenadas del baricentro son $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$

b.



$P_1(x_1;y_1) = (2;-1)$

$P_2(x_2;y_2) = (6;7)$

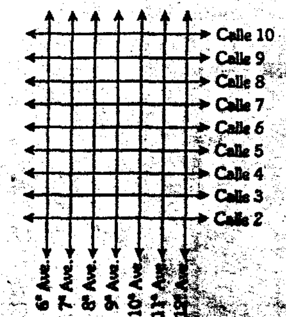
$P_3(x_3;y_3) = (-4;-3)$

$$x = \frac{2+6-4}{3} = \frac{4}{3}\ \ ;\ \ y = \frac{-1+7-3}{3} = 1$$

Luego, el baricentro tendrá por coordenadas $\left(\frac{4}{3}\ ;\ 1\right)$

El camino más corto

En una ciudad muy bien proyectada, las calles han sido trazadas como avenidas numeradas que van de norte a sur y como calles numeradas de este a oeste, de la manera indicada en la figura, formando cuadrados congruentes. *Si se toma un taxi en la esquina de la* segunda calle y la sexta avenida y se instruye al chofer que se dirija a la esquina de la calle 10 y la avenida 12 por la ruta más corta, ¿qué distancia (número de cuadras) se recorre? ¿Será esa la distancia más corta? Explícalo.

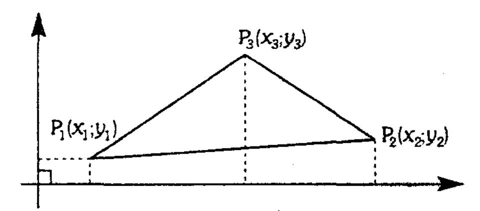


ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL EN FUNCIÓN DE LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES

Área de una Región Triangular

Sean $P_1\ (x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $P_3(x_3;y_3)$ los vértices de un triángulo. El área A en función de las coordenadas de los vértices viene dada por:

$$A=\frac{1}{2}\left|x_1 y_2+x_2 y_3+x_3 y_1-x_2 y_1-x_3 y_2-x_1 y_3\right|$$



Este resultado se puede expresar de otra manera, más fácil de recordar, teniendo en cuenta la notación de determinante.

Desarrollando mediante la regla de Sarrus, tendremos:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_1 y_2+y_1 x_3+x_2 y_3-x_3 y_2-y_3 x_1-x_2 y_1\right|$$

$$\therefore\ A=\left|\frac{1}{2}x_1 y_2+x_2 y_3+x_3 y_1-x_1 y_3-x_2 y_1-x_3 y_2\right|$$

Este cálculo puede realizarse más rápido mediante la siguiente regla práctica:

Obsérvese que se ha repetido la primera fila en la cuarta.

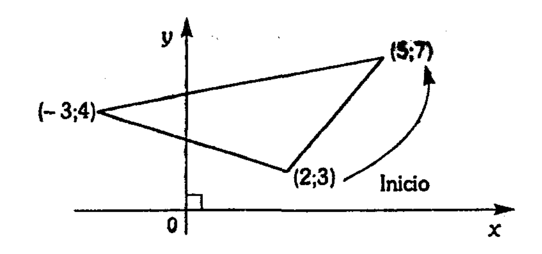
$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -x_2y_1 \\ -x_3y_2 \\ -x_1y_3 \\ +x_1y_2 \\ +x_2y_3 \\ +x_3y_1 \\ \hline N \end{matrix}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}|N|$$

Ejemplo:

Calcule el área de la región triangular cuyos vértices son los puntos de coordenadas (2;3) , (5;7) y (–3;4).

Resolución:



Consideremos $P_1(2;3)$, $P_2(5;7)$ $P_3(-3;4)$

Entonces:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \\ -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -(5)(3) & = & -15 \\ -(-3)(7) & = & 21 \\ -(2)(4) & = & -8 \\ +(2)(7) & = & 14 \\ +(5)(4) & = & 20 \\ +(-3)(3) & = & -9 \\ \hline & & 23 \end{matrix}$$

Por lo tanto:

$$S=\frac{1}{2}|23|=11{,}5\,u^2$$

Ejercicios

Calcule el área de las regiones triangulares de vértices:

a. A=(2;3), B=(5;7), C=(–1;2)

b. A=(0;0), B=(2;3), C=(–7;5)

c. A=(-3;-4), B=(4;-2), C=(1;7)

d. A=(-3;2), B=(-3;-9), C=(4;-3)

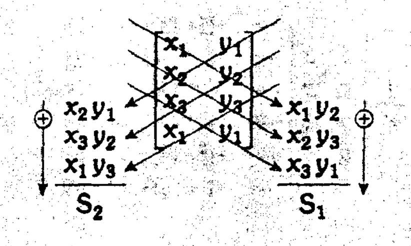
e. A=(2;-4), B=(-1;-6), C=(-5;-3)

Observación:

Es también usada la siguiente formulación:

$$S=\frac{1}{2}\left|\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}}_{M}\right| \leftarrow \text{valor absoluto}$$

Siendo el desarrollo de M.



donde $M = S_1 - S_2$

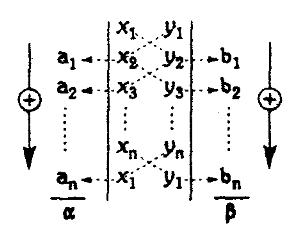
$\therefore\ S = \frac{1}{2}|S_1 - S_2|$

ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL DE MÁS DE 3 LADOS

Una expresión muy útil cuando se trata de hallar áreas de regiones poligonales de más de tres lados, en función de las coordenadas de sus vértices, es la siguiente:

$$\text{Área}=\frac{|\alpha-\beta|}{2}$$

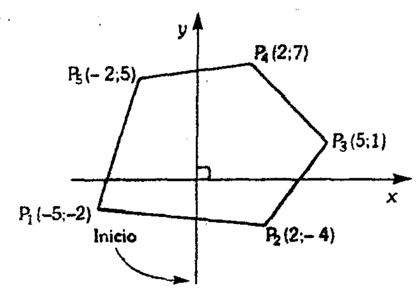
donde α y β se calculan así:



Recuerda que los vértices del polígono son los puntos $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$, $P_3(x_3;y_3)$; . . . . , $P_n(x_n;y_n)$

Ejemplo 1

Halle el área de la región que limita el pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas (–5;–2) , (–2;5) , (2;7) , (5;1), (2;–4)



Resolución:

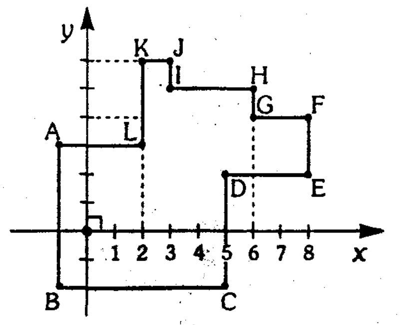
Ordenando los puntos adecuadamente y operando tendremos:

	-5	-2	
-4	2	-4	20
-20	5	1	2
2	2	7	35
-14	-2	5	10
-25	-5	-2	4
-61			71

$\therefore\ \text{Área} = \frac{1}{2}\,|\,71 - (-61)\,| = 66\ u^2$

Ejemplo 2

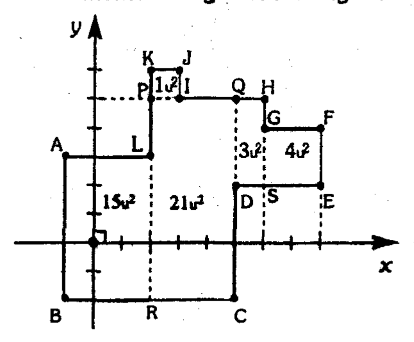
Dada la siguiente gráfica, calcule el área de la región sombreada.



Resolución:

Emplearemos en este caso otro procedimiento.

Observa como se ha dividido la figura convenientemente en regiones rectangulares.



$A_{total}=A_{\square ABRL}+A_{\square PRCQ}+A_{\square KPIJ}+A_{\square QHSD}+A_{\square GFES}$

$A_{total} = 15\,u^2+21\,u^2+1\,u^2+3\,u^2+4\,u^2$

$A_{total} = 44\,u^2$

Luego el área pedida será 44 u^2

¿Saldrá lo mismo si aplicamos la fórmula? Compruébalo.

Ejercicios

Procediendo en forma análoga de las descritas, calcula el área de cada una de las regiones planas cuyos vértices se dan a continuación:

1. Cuadrilátero ABCD: A(–6; 3), B(–5; 7), C(–2; 9), D(2; 8)
2. Pentágono ABCDE: A(2;5), B(–5; 7), C(–3; –1), D(–5; 5), E(–3; 7)
3. Polígono ABCDEFGHIJ: A(5;9), B(6; 4), C(9; 1), D(5; –2), E(3; –5), F(1; –5), G(–4; 2), H(–1; 2), I(–2; 7), J(1;6)
4. Triángulo MNP: M(3;2), N(5; –5), P(–3; –4)
5. Cuadrilátero ABCD, si se sabe que A=(–2;2), B(5; –1), C(3; 6) y D=(–4; –2).

LA LÍNEA RECTA

Uno de los conceptos básicos en geometría es el de línea recta o simplemente recta.

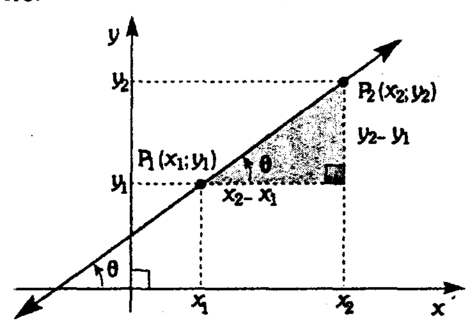
Una línea recta, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico, cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una línea recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones; por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular), etc. Nuestro objetivo será el siguiente: dada una recta $\mathscr{L}$ en el plano de coordenadas, procuraremos deducir su ecuación y recíprocamente dada la ecuación realizaremos la gráfica.

ÁNGULO DE INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA

La *inclinación* de una recta $\mathscr{L}$ (que no sea paralela al eje x) es el ángulo que determina dicha recta con el eje positivo de las *abscisas* y se mide desde el eje x a la recta $\mathscr{L}$ en sentido antihorario (contrario al giro de las manecillas del reloj).

La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación. En estas condiciones, m=tgθ, siendo θ el ángulo de inclinación y m la pendiente (ver la figura). Si $\mathscr{L}$ es paralela al eje x entonces su pendiente será cero.



La pendiente de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1;y_1)$, $P_2(x_2;y_2)$ es:

$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos P_1 y P_2.

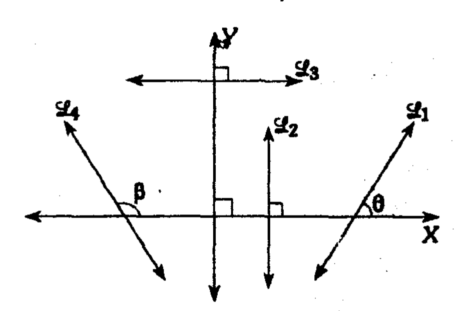
Ejemplo 1

Ángulo de inclinación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$: θ°.

Ángulo de inclinación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$: 90°.

Ángulo de inclinación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_3}$: 0° ó 180°.

Ángulo de inclinación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_4}$: β°.

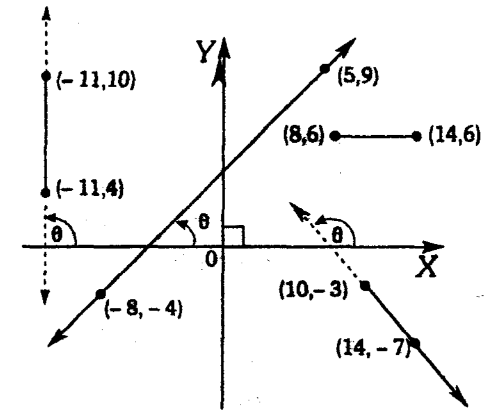


Ejemplo 2

Halle la pendiente **m** y el ángulo de inclinación θ de las rectas que contienen los pares de puntos siguientes:

a. (–8;–4) , (5;9) b. (8;6) , (14;6)

c. (–11;10) ; (–11;4) d. (10;–3) ; (14;–7)



Resolución:

a. Pendiente $m_1 = \dfrac{9-(-4)}{5-(-8)} = 1 \Rightarrow \text{tg}\theta = 1 = m_1$

$\theta = 45°$

b. $m_2 = \dfrac{6-6}{14-8} = 0 \quad \text{tg}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$

c. $m_3 = \dfrac{4-10}{-11-(-11)} = \dfrac{-6}{0}$ indefinido $\Rightarrow$

$\theta = 90°$

Nótese que la pendiente es indefinida, ya que

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ //eje y

d. $m_4 = \dfrac{-7-(-3)}{14-10} = -1 \Rightarrow \theta = 135°$

Observación:

- Del ejemplo anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

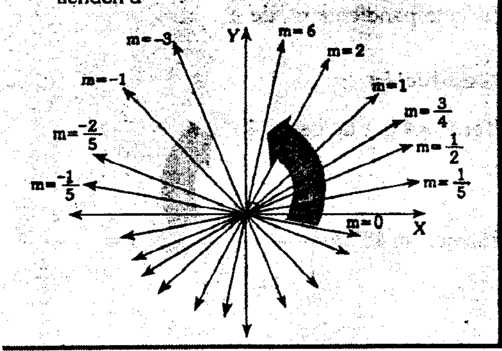
posición de la recta

$m > 0 \Rightarrow$ ↗ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (ver el ejemplo 2a)

$m < 0 \Rightarrow$ ↘ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (ver el ejemplo 2d)

$m = 0 \Rightarrow$ ↔ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (ver el ejemplo 2b)

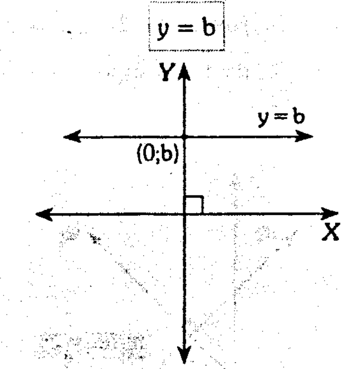
- Si la recta $\mathscr{L}$ es paralela al eje Y, entonces se dice que la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ no está definida, siendo su posición: ↕ $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ (ver el ejemplo 2c).
- A continuación se indica en la gráfica las pendientes de varias rectas que pasan por el origen. La recta que coincide con el eje X tiene pendiente m=0. Si esta recta se hace girar con respecto al punto O (origen de coordenadas) en sentido contrario al giro de las agujas del reloj (como indica la flecha), la pendiente es positiva y aumenta, alcanzando el valor 1 cuando la recta divide al primer cuadrante en dos regiones iguales y continúa aumentando a medida que la recta se acerca al eje Y mientras más cerca está, mayor es el valor de la pendiente y cuando la recta toca al eje Y el valor es infinito. En realidad, se dice que la pendiente es indefinida. Ahora, si hacemos girar a la recta de pendiente m=0 en el sentido de las manecillas del reloj, notaremos como en el segundo cuadrante, la semirecta se va levantando hasta alcanzar el valor −1 cuando biseca al segundo cuadrante y continuando el movimiento ira acercándose al eje Y, pero esta vez los valores de la pendiente tienden a $-\infty$.



- En general, para las rectas horizontales y verticales tendremos:

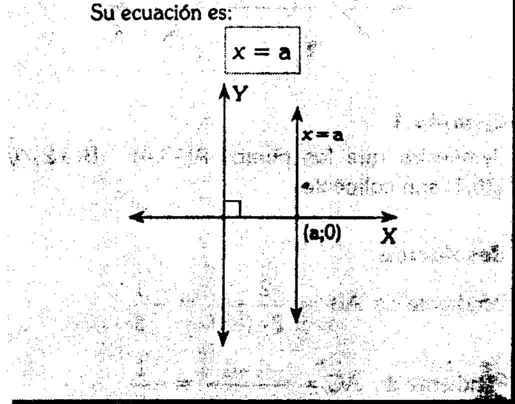
a. **Recta Horizontal**. Toda recta que sea paralela al eje X. Su ecuación es:

$$y = b$$



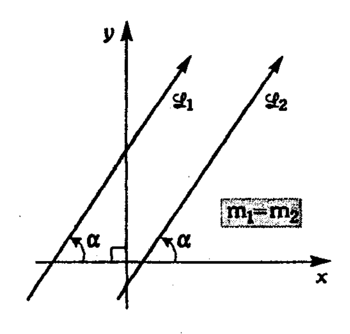
b. **Recta Vertical**. Toda recta paralela al eje Y. Su ecuación es:

$$x = a$$

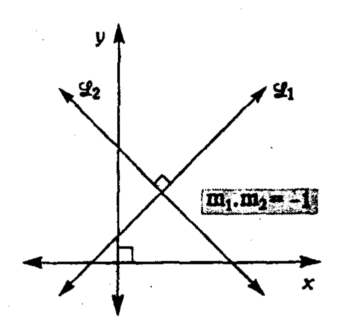


RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- Decimos que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.



- Si dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es igual al recíproco de la pendiente de la otra con signo contrario. Es decir, si llamamos m_1 a la pendiente de $\mathcal{L}_1$ y m_2 a la pendiente de $\mathcal{L}_2$, tendremos $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, de donde $m_1 \times m_2 = -1$



Ejemplo 1

Demuestra que los puntos A(–3;4) , B(3;2) y C(6;1) son colineales.

Resolución:

$$\text{Pendiente de } AB = \frac{2-4}{3-(-3)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Pendiente de } AC = \frac{1-4}{6-(-3)} = -\frac{1}{3}$$

Como la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

Ejemplo 2

Prueba, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos A(8;6) , B(4;8) y C(2;4) son los vértices de un triángulo rectángulo.

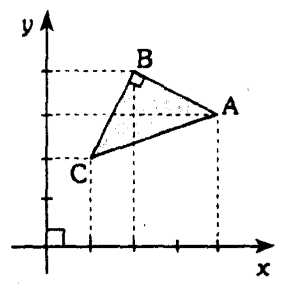
Resolución:

$$\text{Pendiente de } AB = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

Como la pendiente de AB es el recíproco con signo contrario de la pendiente de BC, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

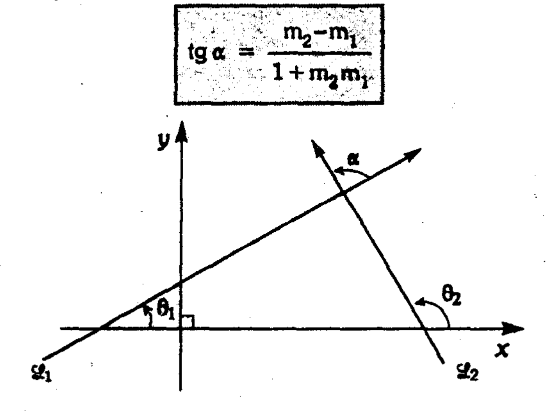
El otro lado del triángulo, es decir AC, se obtiene uniendo dichos puntos A y C.



ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

El ángulo cuya medida es α, considerada en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj, desde la recta $\mathcal{L}_1$ de pendiente m_1 a la recta $\mathcal{L}_2$ de pendiente m_2, se puede obtener a partir de la expresión:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



Ejemplo 1

Sabiendo que el ángulo formado por las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es de 45° y que la pendiente m_1 de $\mathcal{L}_1$ es 2/3, halla la pendiente m_2 de $\mathcal{L}_2$.

Resolución:

Tenemos por datos $\alpha = 45°$ y $m_1 = \dfrac{2}{3}$

$$\text{Luego, } \operatorname{tg}45° = \frac{m_2 - \frac{2}{3}}{1 + m_2\left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow 1 = \frac{m_2 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m_2}$$

Resolviendo: $m_2 = 5$

$\therefore$ La pendiente de la recta $\mathscr{L}_2$ es $m_2=5$

Observación:

También se puede calcular así:

$$\text{tg } 45° = \frac{\frac{2}{3} - m_2}{1+\frac{1}{3}\times m_2} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{2}{3} - m_2}{1+\frac{2}{3}\times m_2}$$

resolviendo: $m_2 = -\frac{1}{5}$.

$\therefore$ La pendiente de la recta $\mathscr{L}_1$ es $m_2 = -\frac{1}{5}$.

Entonces tenemos dos soluciones.

Ejercicios

1. Calcule la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ perpendicular a la recta $\mathscr{L}_1$ si sabemos que $\mathscr{L}_1$ pasa por los puntos (3;5) y (–4; 2).
2. Prueba que el punto C está en la mediatriz del segmento AB.
   a. A(–3; 2), B(5; –4), C(7;7)
   b. A(–4; –3), B(6; 1), C(5; –11)
3. La recta $\mathscr{L}_1$ pasa por los puntos A(3; 5) y B(–2; 4) y la recta $\mathscr{L}_2$ contiene a los puntos C(–5; 3) y D(–2; –5). Calcula la medida del ángulo entre dichas rectas.

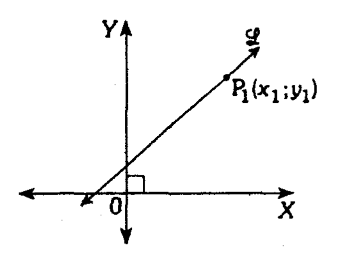
FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Dependiendo de los datos que tengamos en un problema dado, hay varias formas de representar analíticamente la ecuación de una recta. Veamos algunas:

1° Forma: punto–pendiente

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(x_1;y_1)$; llamado también punto de paso, y cuya pendiente sea m, es:

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}} : y - y_1 = m(x-x_1)$$



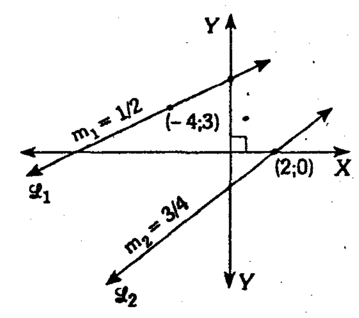
Ejemplo:

Halle la ecuación de la recta:

a. $\mathscr{L}_1$ que pasa por (–4;3) y tenga de pendiente $\frac{1}{2}$

b. $\mathscr{L}_2$ que pasa por (2;0) y tenga de pendiente $\frac{3}{4}$

Resolución:



a. Considerando $(x_1;y_1)=(-4;3)$ tendremos:

$$y-3 = \frac{1}{2}[x-(-4)] \text{ Reduciendo: } y = \frac{1}{2}x+5$$

$\therefore$ $\mathscr{L}_1$: $2y - x - 10 = 0$

b. Análogamente al caso anterior planteamos:

$(x_1;y_1)=(2;0)$ entonces: $y-0 = \frac{3}{4}(x-2)$

Despejando y reduciendo: $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

$\therefore$ $\mathscr{L}$: $4y - 3x + 6 = 0$

2° Forma: pendiente–ordenada en el origen

La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje Y en el punto (0,b) (siendo b la ordenada en el origen) es:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : y = mx + b$$

Ejemplo:
Halle la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $2y+3x=7$

Resolución:
Despejando la ecuación dada tenemos:
$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

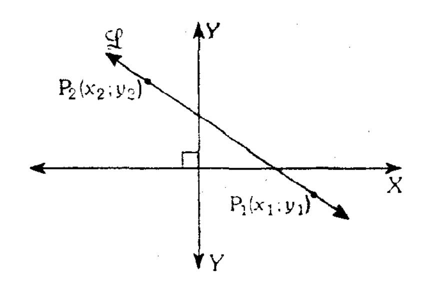
Luego, la pendiente es $m = -\frac{3}{2}$ y la ordenada en el origen es $b = \frac{7}{2}$

- Si $b > 0$, la intersección de la recta es con el eje Y positivo.
- Si $b < 0$, la intersección de la recta es con el eje Y negativo.

3° Forma: ecuación cartesiana

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$



Ejemplo 1
Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (–2;–3) y (4;2)

Resolución:
Consideremos:
$(x_1 ; y_1) = (-2; -3)$
$(x_2 ; y_2) = (4; 2)$

Luego:
$$\frac{-3-2}{-2-4} = \frac{y-(-3)}{x-(-2)} \rightarrow \frac{5}{6} = \frac{y+3}{x+2}$$

Reduciendo $5x-6y-8 = 0$

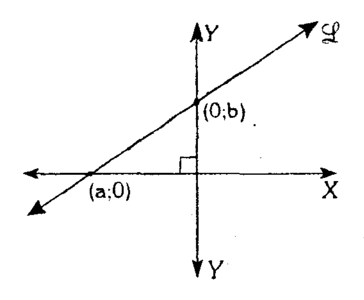
$\therefore \mathcal{L} : 5x - 6y - 8 = 0$

Ejercicio
Daniel y Yamilet comparaban sus soluciones a un problema de la tarea asignada. El problema era escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2;–5) y (8;7).
Daniel obtuvo la ecuación $y+5=2(x-2)$. Yamilet halló $y-7=2(x-8)$
¿Quién tenía la respuesta correcta?

4° Forma: ecuación simétrica segmentaria

La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados X e Y en los puntos (a,0) y (0;b) respectivamente, siendo **a** la abscisa en el origen y **b** la ordenada en el origen, es:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Ejemplo 1

Halle la ecuación simétrica de la recta que corta el eje x en el punto (8;0) y al eje y en (0;–5)

Resolución:

Tenemos $(a;0) = (8;0) \Rightarrow a = 8$

$(0;b) = (0;-5) \Rightarrow b = -5$

luego $\frac{x}{8} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{8} - \frac{y}{5} = 1$

$\therefore \overleftrightarrow{\mathcal{L}} : 5x - 8y - 40 = 0$

Ejemplo 2

Halle la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 5 y –3, respectivamente.

Resolución:

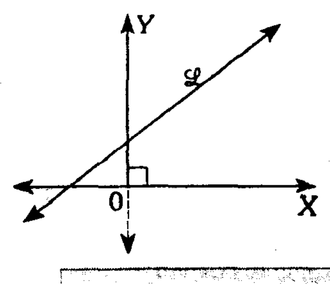
Por dato, $a=5$ y $b=-3$

entonces $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$

$\therefore \overleftrightarrow{\mathcal{L}} : 3x - 5y - 15 = 0$

5° Forma: ecuación general

Es una ecuación lineal o de primer grado en las variables x e y de la forma $Ax+By+C=0$, en donde A, B y C son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es $m = -\frac{A}{B}$ y su ordenada en el origen, es $b = -\frac{C}{B}$.



En general: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : AX + BY + C = 0$

Ejemplo:

Halle la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por el punto (–2;3) y es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1 : 2x-3y+6=0$

Observación:

Recuerda que si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

Resolución:

Por dato tenemos: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} : 2x-3y+6=0$

de donde deducimos que su pendiente es $m_1 = \frac{2}{3}$

Como la recta $\mathcal{L}_2 \perp \mathcal{L}_1$ entonces $m_2 = -\frac{3}{2}$.

Tenemos ya la pendiente m_2 y como conocemos el punto (–2;3), escribimos $-\frac{3}{2} = \frac{y-3}{x-(-2)}$

Reduciendo nos queda $y = -\frac{3}{2}x$

$\therefore \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} : 3x+2y=0$

Cómo graficar rectas en el plano cartesiano (forma práctica)

Dada la siguiente recta:

$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}} : 4x - 3y + 12 = 0$$

Para graficarla basta conocer su intersección con los ejes coordenados, es decir, su cruce con el eje X, indicado por el punto $(x; 0)$, y su cruce con el eje Y, señalado por el par ordenado $(0; y)$. Veamos:

Intersección con el eje X

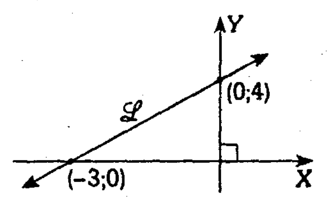
Hacemos $y=0 \Rightarrow 4x-3(0)+12=0 \Rightarrow x = -3$

$\Rightarrow$ intersección con el eje X : (–3; 0)

Intersección con el Eje Y

Hacemos $x=0 \Rightarrow 4(0)-3y+12=0 \Rightarrow y=4 \Rightarrow$ intersección con ele eje Y (0; 4)

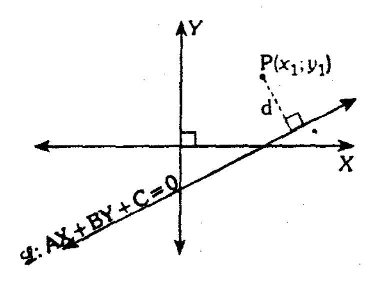
La gráfica sería:



DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dada la ecuación general de la recta $\mathscr{L}: Ax+By+C=0$ y el punto $P(x_1; y_1)$ la distancia del punto P a la recta $\mathscr{L}$ será:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



Ejemplo 1

Halle la distancia desde:

a. La recta $8x+15y-24=0$ al punto (−2,−8)

b. La recta $6x+8y+5=0$ al punto (−2,7)

Resolución:

a. Tenemos el punto $P_1(x_1;y_1) = (-2,-8)$ luego:

$$d = \frac{|8(-2)+15(-8)-24|}{\sqrt{8^2+15^2}} = \frac{|-160|}{\sqrt{289}} = \frac{160}{17}u$$

b. $P_1(x_1;y_1) = (-2;7)$ entonces como la ecuación es $6x+8y+5=0$

$$d = \frac{|6(-2)+8(7)+5|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{49}{10}u$$

Ejemplo 2

Halle el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo de lados:

$\mathscr{L}_1 : 7x-y+11=0$

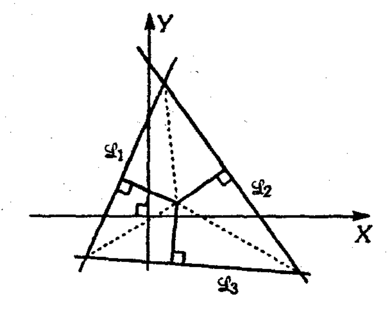
$\mathscr{L}_2 : x+y-15=0$

$\mathscr{L}_3 : 7x+17y+65=0$

Resolución:

Sabemos que el punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo es denominado **incentro** y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. Que dicho punto sea (h;k).

De lo anterior, se deduce que la distancia del incentro a cada una de las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ es la misma; ya que ésta será la medida del radio de dicha circunferencia inscrita.



Por lo tanto, la distancia:

- de (h;k) a $\mathscr{L}_1$ es: $d_1 = \dfrac{|7h-k+11|}{\sqrt{50}}$,
- de (h;k) a $\mathscr{L}_2$ es: $d_2 = \dfrac{|h+k-15|}{\sqrt{2}}$,
- de (h;k) a $\mathscr{L}_3$ es: $d_3 = \dfrac{|7h+17k+65|}{\sqrt{338}}$,

El punto (h;k) es incentro

Luego $d_1 = d_2 = d_3$

Como $d_1 = d_2$: $\dfrac{|7h-k+11|}{5\sqrt{2}} = \dfrac{|h+k-15|}{\sqrt{2}}$

Simplificando $3h+k = 16$

Como $d_1 = d_3$: $\dfrac{|7h-k+11|}{5\sqrt{2}} = \dfrac{|7h+17k+65|}{13\sqrt{2}}$

Simplificando $4h-7k = 13$

Resolviendo el problema formado por $3h+k=16$ y $4h-7k=13$, se obtiene $h=5$ y $k=1$

$$\therefore (h;k) = (5;\ 1)$$

Ejercicio

Calcule las distancias de los puntos mencionados en las rectas dadas:

Puntos	Rectas
a. $(7;5), (3;-8), \left(-\dfrac{5}{3};4\right)$	$\mathscr{L}_1$: $3x+5y=15$
b. $(-4;-2), \left(-\dfrac{2}{5};1\right), (\sqrt{5}, \sqrt{7})$	$\mathscr{L}_2$: $-4x+7y=-4$

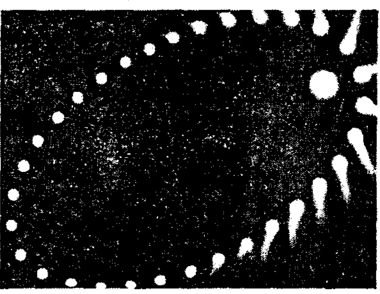
SECCIONES PLANAS DE UN CONO CIRCULAR RECTO (CÓNICAS):

La geometría euclideana tiene por objetivo el estudio de las figuras donde no se considera ningún sistema de coordenadas; sino en ellas se demuestra teoremas en base al razonamiento deductivo. Sin embargo, en la geometría analítica, las figuras planas son analizadas y estudiadas teniendo como sistema el sistema de coordenadas; en ella se analiza las ecuaciones en variables genéricas x e y de primer grado que representa la gráfica de una recta o la ecuación de segundo grado que representa a una circunferencia, parábola, elipse e hipérbola; las cuales son denominadas cónicas o curvas cónicas. Precisamente, éstas cónicas fueron estudiadas por los antiguos matemáticos griegos, siendo el principal difusor **Apolonio de Perga,** quien nació en Grecia aproximadamente el año 262 a.n.e. Apolonio de Perga escribió diversos libros y en una de sus obras titulada *Lugares Planos* (obra desarrollada con casi 147 proposiciones) resuelve problemas acerca de lugares geométricos.

El descubrimiento de las secciones cónicas se atribuye a los matemáticos griegos, aproximadamente en los años 375 – 325 a.n.e. Los estudios realizados sobre las cónicas efectuados por Apolonio fueron unos de los logros más profundos de la geometría clásica griega (se atribuye a Apolonio la definición de las secciones cónicas). Cerca de 2000 años más tarde, Galileo (1564 – 1642) descubrió que un proyectil, disparado horizontalmente desde lo alto de una torre, cae a la tierra siguiendo una trayectoria parabólica. Por la misma época, Kepler (1571 – 1630), formuló la hipótesis de que los planetas se movían en órbitas elípticas con el sol como foco.

Unos 80 años más tarde, Isaac Newton (1642 – 1724) fue capaz de descubrir que las trayectorias planetarias eran elípticas, actualmente se aplica las propiedades de las secciones cónicas en la teoría de las órbitas de planetas, cometas y satélites artificiales. La teoría se aplica también, en los lentes de los telescopios, microscopios y otros instrumentos ópticos: predicciones meteorológicas, comunicaciones por satélite, geodesia y construcciones de edificios y puentes.

Las cónicas también aparecen en el estudio de la estructura atómica y en los sistemas de mando a control remoto de barcos y aeroplanos. Dichas cónicas son herramientas importantes para las investigaciones. Por ejemplo, el estudio del comportamiento de la partícula alfa que cambia su trayectoria rectilínea a una trayectoria hiperbólica debido a su interacción con un campo eléctrico, las trayectorias de los planetas son elípticas y cuando la elipse es muy comprimida la curva semeja la trayectoria de un cometa. Así también, al disparar un proyectil su trayectoria es parabólica, etc.



Un cometa moviéndose alrededor del sol. Obsérvese su trayectoria elíptica.

Las superficies de revoluciones formadas por las secciones cónicas tienen aplicaciones en las ciencias que tratan de la luz, del sonido y de las ondas de radio. Estos ejemplos y muchos más que no se han indicado, demuestran la importancia de las secciones cónicas.

¿Qué son las cónicas?

La denominación de secciones cónicas que se suele dar a la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, proviene de la época en que fueron descubiertas como intersecciones de un plano con un cono circular recto.

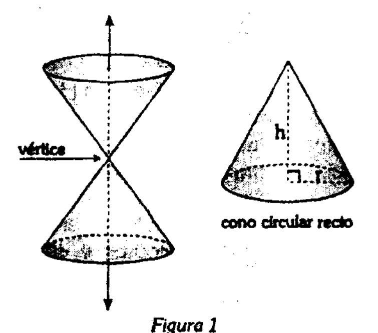


Figura 1

generatriz
α
β
plano secante
vértice

Figura 2: Corte longitudinal del cono mediante un plano que contiene al eje.

Consideremos un cono que se extiende a ambos lados de su vértice.

Cada una de las partes en las que el vértice divide al cono se denomina hojas. Sea β el semiángulo del cono, es decir, el ángulo que forma el eje del cono con una generatriz.

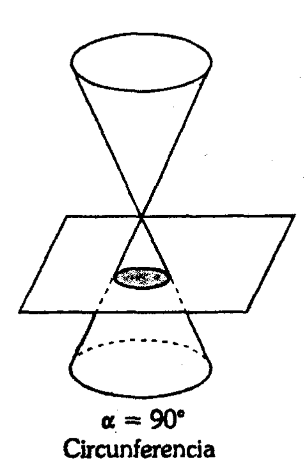
Supongamos un plano que corta al cono formando un ángulo α con su eje.

Un corte longitudinal del cono y el plano secante se puede apreciar en la figura 2.

Los distintos tipos de secciones cónicas aparecen según sea la relación entre los ángulos α y β.

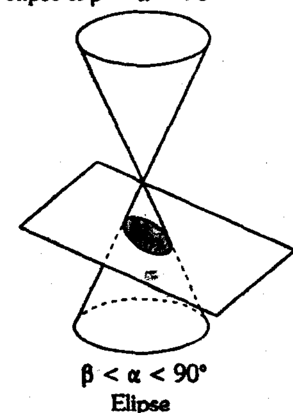
En esta forma se obtiene:

a. Una circunferencia si $\alpha = 90°$ (plano perpendicular al eje)



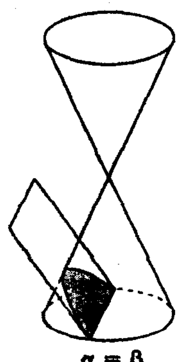
$\alpha = 90°$
Circunferencia

b. Una elipse si $\beta < \alpha < 90°$



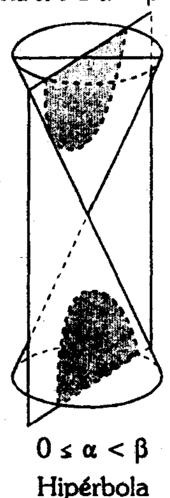
$\beta < \alpha < 90°$
Elipse

c. Una parábola si $\alpha = \beta$ (plano paralelo a una generatriz)



$\alpha = \beta$
Parábola

d. Una hipérbola si $0 \leq \alpha < \beta$



$0 \leq \alpha < \beta$
Hipérbola

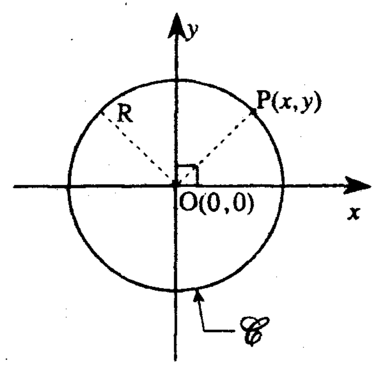
Las circunferencias y elipses son secciones que se obtienen cuando los planos cortan todas las generatrices de una de las hojas del cono. Las parábolas se obtienen cuando los planos cortan algunas de las generatrices de una hoja del cono. Las hipérbolas se obtiene cuando los planos cortan algunas de las generatrices de las dos hojas del cono.

LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo de dicho plano denominado centro.

Ecuación cuando el centro está en el origen



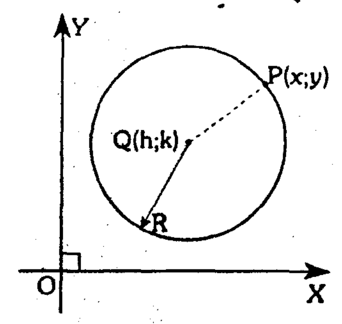
Definición: $\mathcal{C}: \{P(x; y) \,/\, d(P\text{–}O) = R\}$

Desarrollando se obtiene:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = R^2$$

que es la ecuación canónica de la circunferencia.

Ecuación cuando el centro es Q=(h; k)



Definición: $\mathcal{C}: \{P(x; y) \,/\, d(P\text{–}Q) = R\}$

Desarrollando se obtiene:

$$\mathcal{C}: (x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

ecuación ordinaria de la circunferencia

En general la ecuación de la circunferencia es:

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Ejemplo 1:

Determinación del centro y el radio de una circunferencia

Encuentre el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

Resolución:

Iniciaremos reformulando la ecuación como sigue:

$$(x^2 - 4x + _) + (y^2 + 6y + _) = 3 + _ + _,$$

en la cual los espacios subrayados representan números que se debe de determinar. A continuación se completa los cuadrados de las expresiones entre paréntesis, teniendo cuidado de sumar los números adecuados en ambos miembros de la ecuación. Recordemos que para completar el cuadrado de una expresión de la forma x^2+ax, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, $(a/2)^2$ se suma a ambos miembros de la ecuación. Igualmente, para y^2+by, se suma $(b/2)^2$. En este ejemplo, $a=-4$, $b=6$, $(a/2)^2=(-2)^2=4$ y $(b/2)^2=3^2=9$. Estas sumas llevan a:

$(x^2 - 4x + \underline{4}) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 3 + \underline{4} + \underline{9}$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ (ecuación equivalente)

Si comparamos la última ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, llegamos a la conclusión de que la circunferencia tiene su centro en (2;–3) y su radio es $\sqrt{16}=4$.

Observación:

En algunas aplicaciones es necesario trabajar sólo con una mitad de la circunferencia, es decir, una **semicircunferencia**. En el ejemplo que sigue, se indica cómo llegar a ecuaciones de determinadas semicircunferencias con centro en el origen.

Ejemplo 2

Deduce las ecuaciones de la mitad superior, inferior, derecha e izquierda, de la circunferencia $x^2+y^2=81$.

Resolución:

La gráfica de $x^2 + y^2 = 81$ es una circunferencia de radio 9 con centro en el origen. Para llegar a las ecuaciones de las mitades superior e inferior, se despeja y en términos de x:

$x^2 + y^2 = 81$

$y^2 = 81 - x^2$

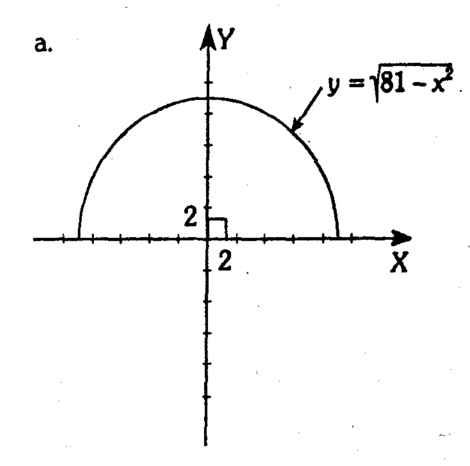
$y = \pm\sqrt{81-x^2}$

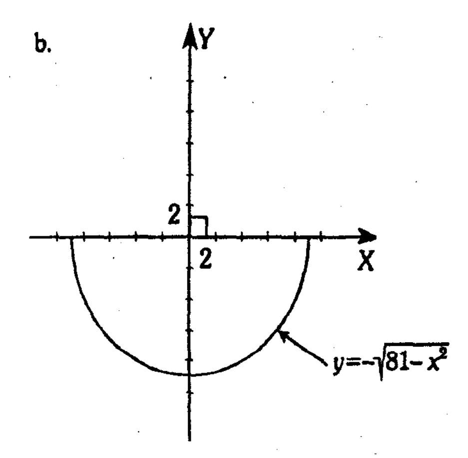
Como $\sqrt{81-x^2} \geq 0$, entonces la mitad superior de la circunferencia tiene la ecuación $y=\sqrt{81-x^2}$ y la otra mitad, $y=-\sqrt{81-x^2}$, como se ve en la figura (a) y (b).

Igualmente, para llegar a las ecuaciones de las mitades derecha e izquierda, despejamos x de $x^2+y^2=81$, dejándola en términos de y. Así obtenemos:

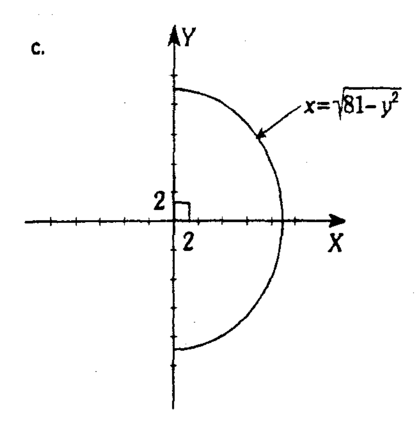
$$x = \pm\sqrt{81-y^2}$$

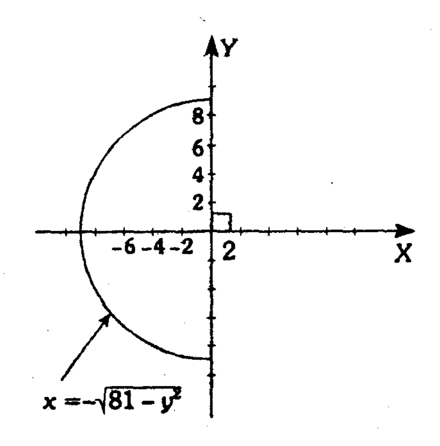
Ya que $\sqrt{81-y^2} \geq 0$, entonces la mitad derecha de la circunferencia tiene como ecuación $x=\sqrt{81-y^2}$ y la izquierda, $x=-\sqrt{81-y^2}$ como se ve en la figura (c) y (d).





c.





LA PARÁBOLA

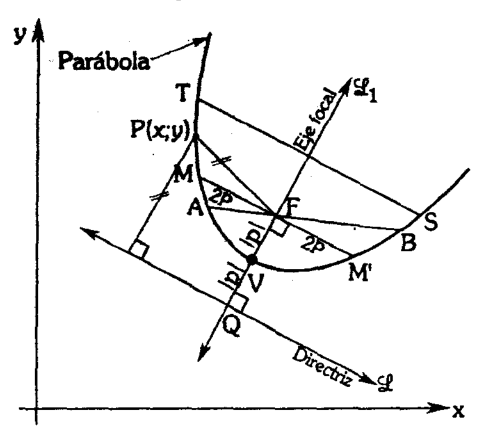
¿Qué es una parábola?

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo de dicho plano al cual se le denomina foco y de una recta fija de este plano a dicha recta se le denomina directriz. La parábola es una cónica.

Antena parabólica empleada en telecomunicaciones. Su forma corresponde a la rotación de una parábola sobre su vértice alrededor del eje.

DEFINICIÓN FORMAL

Dado una recta fija $\mathcal{L}$ denominada directriz y un punto fijo F denominado foco que no pertenece a la recta, se define la parábola como el lugar geométrico de un conjunto de puntos P(x;y) cuya distancia al foco F es igual a la distancia de dicho punto de directriz $\mathcal{L}$.



En el gráfico mostrado, la recta $\mathcal{L}$ es la directriz y P(x;y) es un punto cualquiera de coordenadas genéricas x e y de la parábola. Luego:

$$\boxed{d(P, F) = d(P, \mathcal{L})}$$

Por definición de cónica:

$$\frac{d(P,F)}{d(P,\mathcal{L})} = e$$

Luego $e = 1$, donde e es la excentricidad de la parábola.

ELEMENTOS ASOCIADOS A LA PARÁBOLA

Foco : F → punto fijo del plano

Directriz : $\mathcal{L}$ → recta fija en el plano

Eje Focal : $\mathcal{L}_1$ → recta que contiene al foco y al vértice de la parábola

Vértice : V(h; k)

Lado recto : $\overline{MM'}$ (MM'=4p)

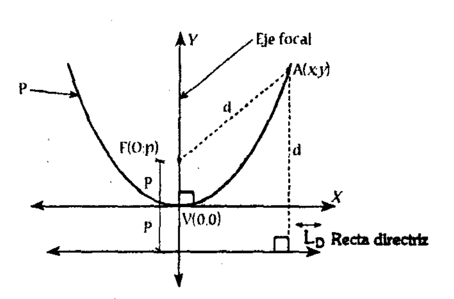
Parámetro : p (VF=VQ=p)

Cuerda Focal: $\overline{AB}$

Cuerda : $\overline{TS}$

Formas de la ecuación de la parábola

1° Forma: Parábola con vértice en el origen y un eje focal sobre el eje Y



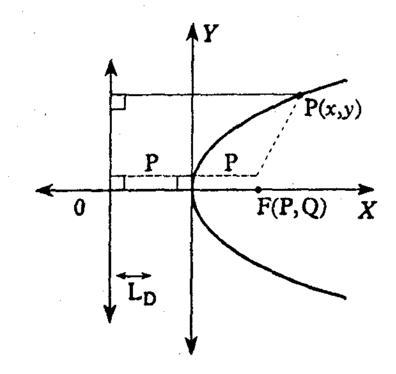
Definición:

$$P: \{P(x;\ y)/d(A - F) = d(A - \overleftrightarrow{L_D})\}$$

Desarrollando se obtiene:

$$P: x^2 = 4py$$

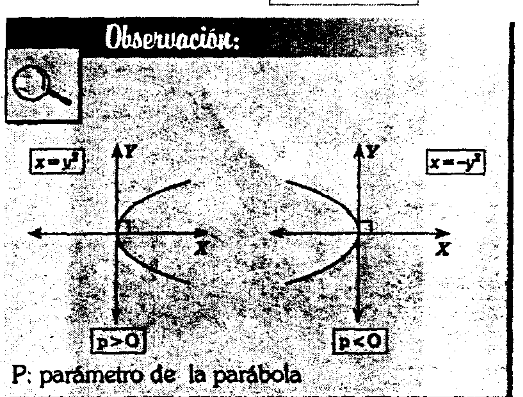
2° Forma: Parábola con vértice en el origen y con eje focal sobre el eje X



Definición:

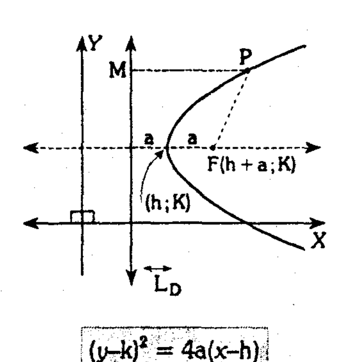
$$P: \{P(x;\ y) / d(P - F) = d(P - \overleftrightarrow{L_D})\}$$

Desarrollando se obtiene: $P: y^2 = 4px$



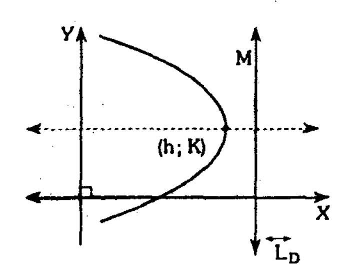
En forma general tendremos las siguientes expresiones usuales y sus respectivas gráficas:

a)



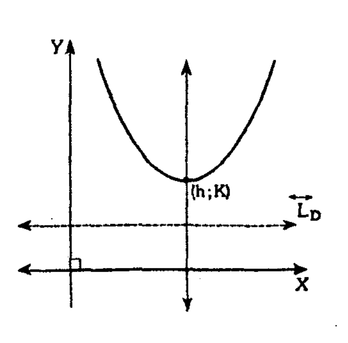
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$

b)



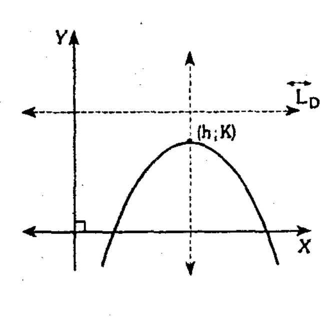
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$

c)



$(x-h)^2 = 4a(y-K)$

d)

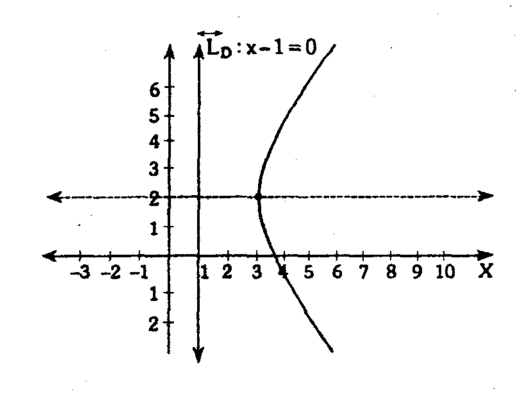


$(x-h)^2 = -4a(y-K)$

Ejemplo:

Hale la ecuación de la parábola cuyo vértice es (3; 2) y el foco se ubica en el punto (5; 2)

Resolución:



Según el dato el vértice es (3;2) y el foco está en (5;2) de lo cual se deduce que a=2 y la ecuación toma la forma $(y-k)^2 = 4a(x-h)$.
Reemplazando: $(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$

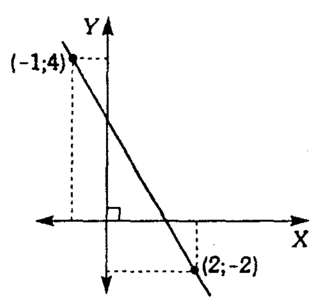
Es decir $(y-2)^2 = 8(x-3)$

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Halle la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2;–2) y (–1 ; 4)

Resolución:



Hemos visto ya como calcular la pendiente:

$m = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; donde $(x_1 ; y_1) = (2; -2)$

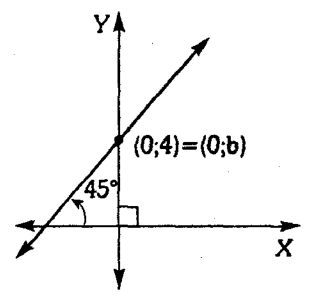
$(x_2 ; y_2) = (-1; 4)$

$\therefore\ m = \dfrac{4--2}{-1-2} = -2$

PROBLEMA 2

Halle la ecuación de una recta cuyo ángulo de inclinación mide 45° y que interseca al eje Y en el punto (0;4).

Resolución:



Conocemos $\theta=45°$, también $b=4$

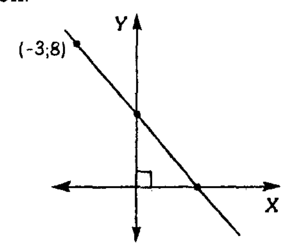
además sabemos que: $m=\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ 45° = 1$

Aplicando: $y = mx+b \therefore y = x+4$

PROBLEMA 3

Halle la ecuación simétrica de una recta, sabiendo que pasa por (–3;8) y su pendiente es –4/3.

Resolución:



Por la ecuación de punto pendiente

sabemos: $m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

Luego:

$-\dfrac{4}{3} = \dfrac{y-8}{x-(-3)}$

Entonces:

$4x+3y = 12 \quad \therefore\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4} = 1$

PROBLEMA 4

Dadas las ecuaciones de las rectas

$\mathcal{L}_1 : 3y-2x = 12 \qquad \mathcal{L}_3 : 3y+2x = 12$

$\mathcal{L}_2 : -2x-3y-10 = 0 \qquad \mathcal{L}_4 : 2y+3x = 10$

Indica el par que representa líneas perpendiculares.

Resolución:

Hallamos las pendientes de las rectas de:

$\mathcal{L}_1 :\ y = \dfrac{2}{3}x+4 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \dfrac{2}{3}$

$\mathcal{L}_2 :\ y = -\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\dfrac{2}{3}$

$\mathcal{L}_3 :\ y = -\dfrac{2}{3}x+4 \quad \Rightarrow \quad m_3 = -\dfrac{2}{3}$

$\mathcal{L}_4 :\ y = -\dfrac{3}{2}x+5 \quad \Rightarrow \quad m_4 = -\dfrac{3}{2}$

y observando las pendientes se aprecia $m_1.m_4 = -1$, luego tendremos que $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_4$

PROBLEMA 5

La recta $\mathcal{L}_1$: $3nx+5y+7-k=0$ es paralela a la recta $\mathcal{L}_2$:$5x+3y=7$

Halle el valor de n.

Resolución:

Despejaremos las ecuaciones dadas:

de $\mathcal{L}_1$: $y=\left(\dfrac{k-7}{5}\right)-\dfrac{3n}{5}x$

$\Rightarrow\ m_1=-\dfrac{3n}{5}$

de $\mathcal{L}_2$: $y = -\dfrac{5}{3}x+\dfrac{7}{3} \Rightarrow m_2=-\dfrac{5}{3}$

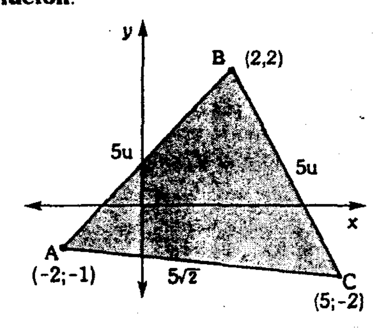
dato: $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \,//\, \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$, luego $m_1 = m_2$. Entonces:

$-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{3}{5}n \qquad \therefore\ n = \dfrac{25}{9}$

PROBLEMA 6

Señale de qué naturaleza es el triángulo de vértices A=(−2;−1) , B=(2;2) y C=(5;−2)

Resolución:



Calculando las distancias:

$AB=\sqrt{(2-^-1)^2+(2-^-2)^2} = 5u$

$BC=\sqrt{(2-5)^2+(2-^-2)^2} = 5u$

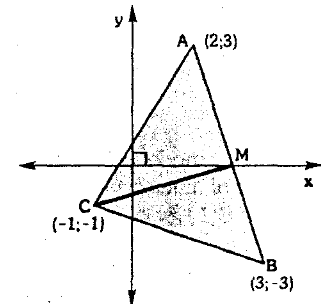
$AC=\sqrt{(-2-5)^2+(-1-^-2)^2} = 5\sqrt{2}u$

Luego: es un triángulo rectángulo isósceles

PROBLEMA 7

Determine la longitud de la mediana relativa al lado AB, en un triángulo que tiene como vértices A(2;3), B(3;−3) , C(−1;−1).

Resolución:



Hallamos el punto medio del segmento AB:

$M = \left(\dfrac{2+3}{2};\dfrac{3+-3}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2};0\right)$;

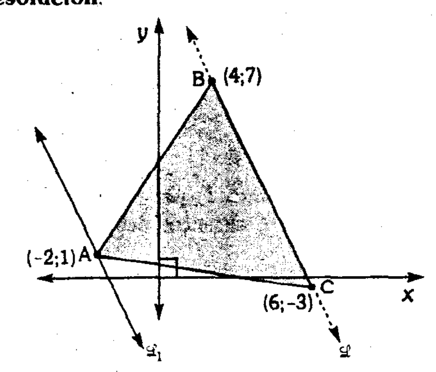
luego la longitud de la mediana CM será la distancia entre los puntos C(−1;−1) y $M\left(\dfrac{5}{2};0\right)$

$$d = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-(^-1)\right)^2+(0-(^-1)^2} = \frac{\sqrt{53}}{2}u$$

PROBLEMA 8

En el triángulo cuyos vértices son A(−2;1) ; B(4;7) y C(6;−3), halle la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto $\overline{BC}$.

Resolución:



El segmento BC está contenido en una recta, L cuya pendiente es $m=\dfrac{7-3}{4-6}=-5$

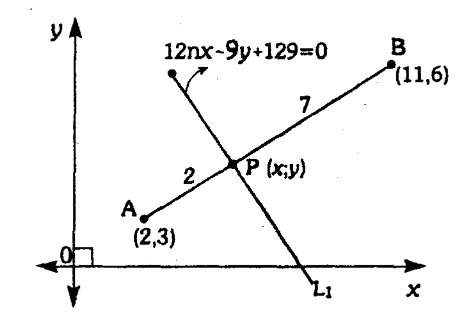
La pendiente de la recta L_1 es $m_1=-5$ pues $L_1 \parallel L$, además L_1 pasa por (-2;1); luego, haciendo uso de la ecuación punto pendiente tendremos:

$$-5=\frac{y-1}{x-2} \Rightarrow y=-5x-9$$

PROBLEMA 9

Determine n de modo que la recta L_1: $12nx-9y+129=0$ al intersectar al segmento de extremos A(2;3) y B(11,6) en el punto P, lo divida en la razón 2/7.

Resolución:



Buscamos las coordenadas del punto P

Por teoría:

$$x=\frac{2+\frac{2}{7}(11)}{1+\frac{2}{7}}=4 \Rightarrow P\left(4,\frac{11}{3}\right)$$

$$y=\frac{3+\frac{2}{7}(6)}{1+\frac{2}{7}}=\frac{11}{3}$$

Luego, como el punto P pertenece a la recta $\mathcal{L}_1: 12nx-9y+129=0$, entonces debe satisfacer su ecuación:

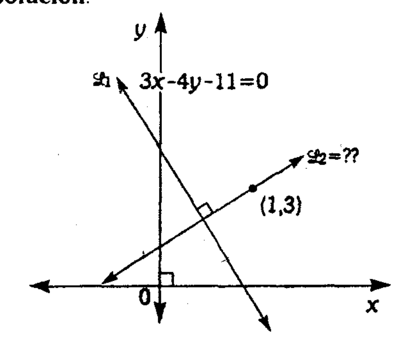
$$\Rightarrow 12n(4)-9\left(\frac{11}{3}\right)+129=0$$

Resolviendo n=–2

PROBLEMA 10

Halle la ecuación de la recta que es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ cuya ecuación es $3x-4y-11=0$ y además pase por el punto (1;3).

Resolución:



Como $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2} \Rightarrow m_1 \cdot m_2=-1$

De la ecuación $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$: $3x-4y-110=0$

$$m_{\mathcal{L}_1}=\frac{3}{4} \Rightarrow m_{\mathcal{L}_2}=-\frac{4}{3}$$

Luego por la ecuación punto–pendiente:

$$\Rightarrow \mathcal{L}_2: y-3=-\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow 3y-9=-4x+4$$

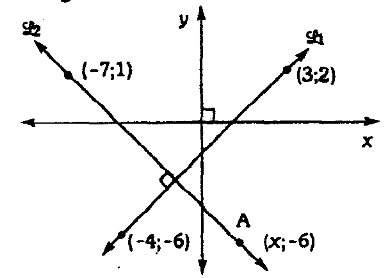
$$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}\ 4x+3y-13=0$$

PROBLEMA 11

Una recta $\mathcal{L}_1$ pasa por los puntos (3;2) y (–4;–6) y otra recta $\mathcal{L}_2$ pasa por el punto (–7;1) y por el punto A cuya ordenada es –6. Halle la abscisa del punto A, sabiendo que $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a $\mathcal{L}_2$.

Resolución:

Veamos el gráfico:



Sea el punto A = (x;–6)

Calculando la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ tendremos $m_1=\dfrac{8}{7}$

Análogamente la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$: $m_2=\dfrac{7}{-7-x}$

Como $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$, entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$

luego, $\dfrac{8}{7}\times\dfrac{7}{-7-x}=-1$

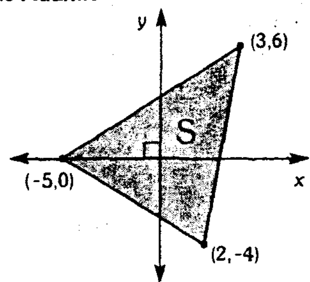
Resolviendo: $x = 1$

PROBLEMA 12

Adunito posee un terreno de forma triangular determinado por los puntos (–5;0) , (2;–4) y (3;6), en el cual deberá sembrar pasto para alimentar a su ganado. Halle el área total que deberá trabajar.

Resolución:

Grafiquemos en el sistema de coordenadas el terreno de Adunito.



Usando la notación de determinante:

	-5	0	
0	3	6	-30
12	2	-4	-12
20	-5	0	0
32			-42

$\therefore S = \dfrac{1}{2}[32-(-42)]=\dfrac{1}{2}(74)=37u^2$

PROBLEMA 13

Se tienen las rectas $y=1$; $y=2$, $y=3$, ... $y=3n$ y $\mathcal{L}$:$3x-4y+12n = 0$

Calcule la suma de las longitudes de los segmentos de rectas comprendidas entre los ejes coordenados y la recta $\mathcal{L}$.

Resolución:

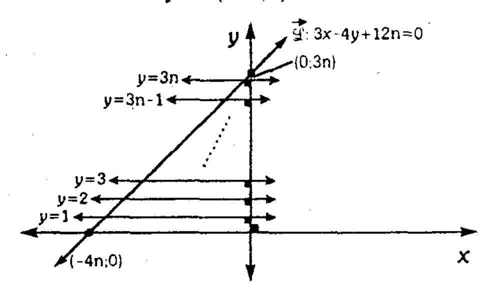
Graficando la recta $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$: $3x-4y+12n = 0$ obtenemos:

Para $x=0$: $3(0)-4y+12n = 0 \rightleftarrows y = 3n$

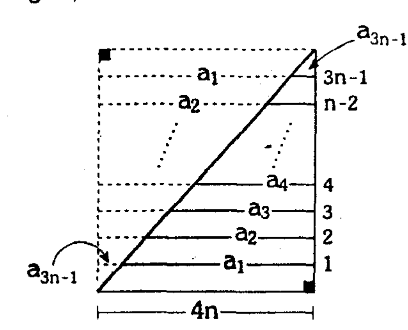
$\therefore$ Corte con el eje y : (0;3n)

Para $y = 0$: $3x-4(0)+12n=0 \rightleftarrows x = -4n$

$\therefore$ Corte con el eje x: (–4n;0)



Si llevamos lo pedido, según el problema a un rectángulo, observamos:



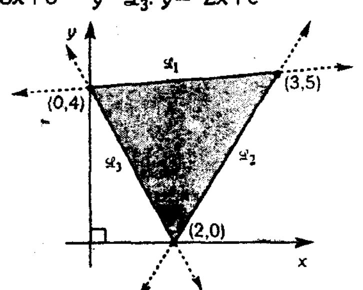
$\therefore a_1+a_2+.....+a_{3n-1} = \dfrac{4n(3n-1)}{2}$

$= 2n(3n-1)$

PROBLEMA 14

Halle a+b+c si $\mathcal{L}_1$ $x-3y+a= 0$

$\mathcal{L}_2$: $y=5x+b$ y $\mathcal{L}_3$: $y=-2x+c$



Resolución:

Datos:

$a+b+c = ??$

$\mathcal{L}_1: x-3y+a=0$

$\mathcal{L}_2: y = 5x+b$

$\mathcal{L}_3: y = -2x+c$

Como la pendiente de cada recta se puede conocer, tenemos

$$\mathcal{L}_1: \frac{y-4}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y-12=x \Rightarrow x-3y+\underset{\underset{a}{\downarrow}}{12}=0$$

$$\therefore\ a = 12$$

$$\mathcal{L}_2: \frac{y}{x-2} = \frac{5}{1} \Rightarrow y=5x-\underset{\underset{b}{\downarrow}}{10}$$

$$\therefore\ b = -10$$

$$\mathcal{L}_3: \frac{y}{x-2} = \frac{4}{-2} \Rightarrow y = -2x + \underset{\underset{c}{\downarrow}}{4}$$

$$\therefore\ c = 4$$

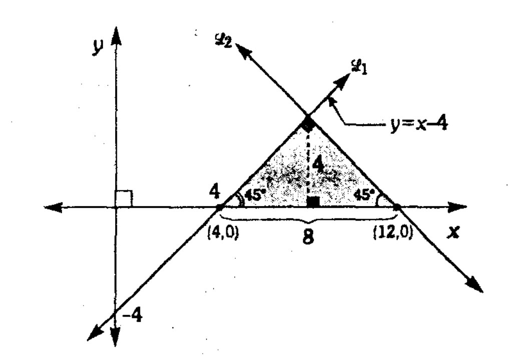
$$\therefore\ a + b + c = 6$$

PROBLEMA 15

Una recta $\mathcal{L}$ es ortogonal a $\mathcal{L}_1$: $y=x-4$ en el primer cuadrante. Halle el área de la región triangular limitada por $\mathcal{L}_1$, la recta $\mathcal{L}$ y el eje de abscisas si se sabe que la recta $\mathcal{L}$ pasa por el punto (12;0)

Resolución:

La recta $\mathcal{L}_1$ tiene pendiente $m_1=1$ de donde deducimos que el ángulo que forma la recta $\mathcal{L}_1$ con el eje de las abscisas es 45°, además para $y=0 \rightarrow x=4$



$$\text{Área} = \frac{4 \times 8}{2} = 16\ cm^2$$

PROBLEMA 16

Dados los puntos M(6,6) y N(15,-6), halle en el eje de abscisas un punto P de modo que m∢MPN=90°.

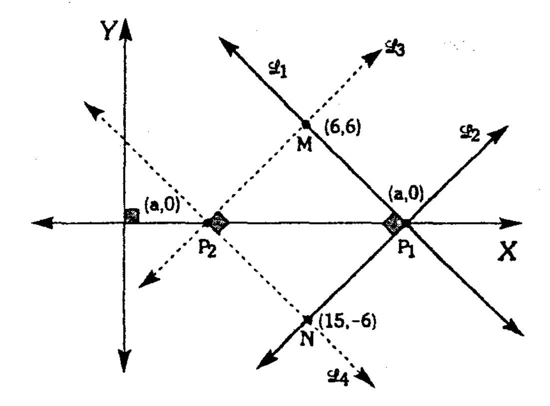
Resolución:

La situación se presenta en dos casos:

a. $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$

b. $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_3} \perp \overleftrightarrow{\mathcal{L}_4}$

Observemos la gráfica:



Recordemos que cuando dos rectas son perpendiculares se cumple $(m_1)(m_2) = -1$

Entonces:

$$\left(\frac{6-0}{6-a}\right)\left(\frac{0-(-6)}{a-15}\right)=-1$$

Resolviendo la ecuación:

$a^2-21a+54=0$

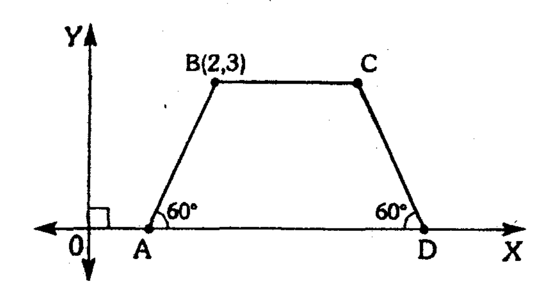
obtenemos $a=18$ $a=3$

$P_1=(18,0)$

$P_2=(3,0)$

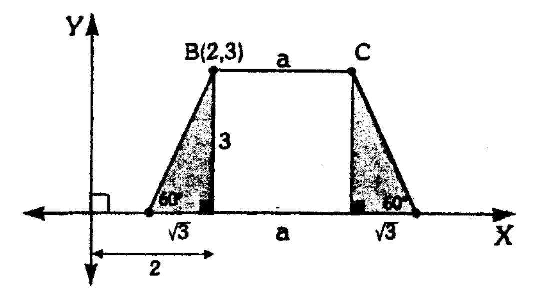
PROBLEMA 17

Si ABCD es una región trapecial cuya área es igual a $\frac{3(7+\sqrt{3})}{2}\,m^2$, halle la abscisa del vértice C.



Resolución:

No olvides que $A_{ABCD}=\left(\frac{B+b}{2}\right)h$



Según el dato: Área trapecio ABCD:

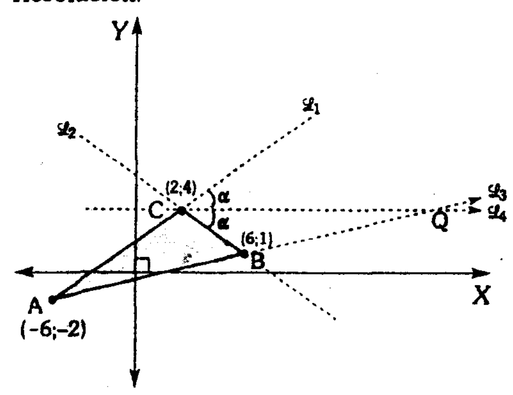
$$\frac{(2a+2\sqrt{3})3}{2}=\frac{3(7+\sqrt{3})}{2}\Rightarrow a=\frac{7-\sqrt{3}}{2}$$

∴ Abscisa del punto C es $2+\frac{7-\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA 18

Los vértices de un triángulo ABC son A(–6;–2) ; B(6;1) y C(2;4), se traza la bisectriz del ángulo exterior correspondiente al ángulo interior ACB. La bisectriz corta a la prolongación del lado AB en el punto Q. Halle la ecuación de la recta AB.

Resolución:



Si del gráfico mostrado se conocen 2 puntos, entonces hallaremos:

a. Ecuación de la recta AB usando:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

donde: $(x_1;y_1)=(6;1)$

$(x_2;y_2)=(-6;-2)$

$$\frac{y-1}{x-6}=\frac{3}{12}$$

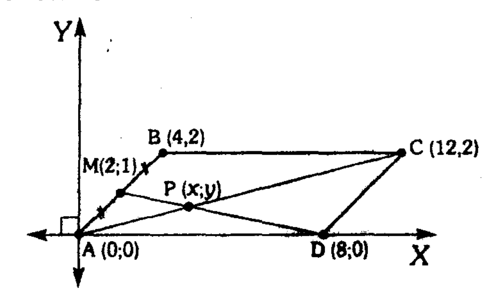
$$\frac{y-1}{x-6}=\frac{1}{4}$$

En su forma general: $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

PROBLEMA 19

Si A(0,0) , B(4,2) , C(12;2) y D(8,0) son vértices de un paralelogramo y M es punto medio de AB , DM y AC se intersectan en el punto P de modo que se cumple: $\frac{MP}{PD}=\frac{AP}{PC}$ Halle las coordenadas de P.

Resolución:



$$\Rightarrow \frac{x-2}{8-x} = \frac{x}{12-x} \Rightarrow x = 4$$

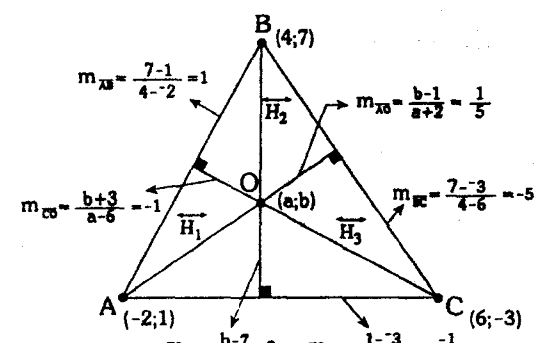
$$\frac{y-1}{-y} = \frac{y}{2-y} \Rightarrow y = 2/3$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \left(4, \frac{2}{3}\right)$$

PROBLEMA 20

Si los vértices de un triángulo son A(–2;1), B(4,7) y C(6;–3), halle las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro del ΔABC.

Resolución:



$$m_{\overline{BO}} \cdot m_{\overline{AC}} = -1 \Rightarrow \frac{b-7}{a-4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow b - 7 = 2a - 8 \ldots\ldots\ (1)$$

$$m_{\overline{AO}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1 \Rightarrow \frac{b-1}{a+2}\cdot(-5) = -1$$

$$\Rightarrow 5b - 5 = a + 2 \ldots\ldots\ (2)$$

Resolviendo (1) y (2) obtenemos $a = \frac{4}{3}$ y $b = \frac{5}{3}$

$\therefore$ Coordenadas del ortocentro: $(a,b) = \left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$

Hallando la ecuación de $\overleftrightarrow{H_1}$:

$$\frac{y-1}{x+2} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{H_1}: x - 5y + 7 = 0$$

Hallando la ecuación de $\overleftrightarrow{H_2}$:

$$\frac{y-7}{x-4} = 2$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{H_2}: 2x - y - 1 = 0$$

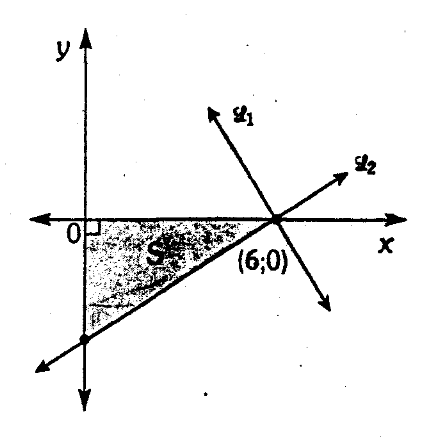
Hallando la ecuación de $\overleftrightarrow{H_3}$:

$$\frac{y+3}{x-6} = -1$$

$$\therefore\ \overleftrightarrow{H_3}: x + y - 3 = 0$$

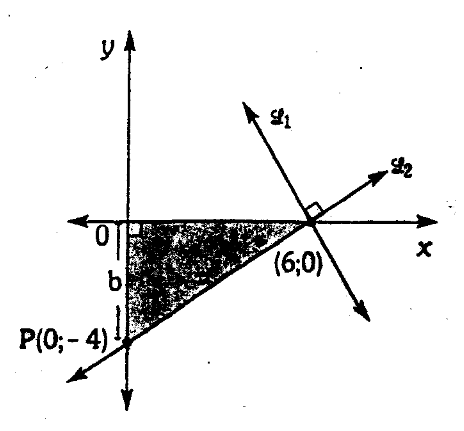
PROBLEMA 21

El área del triángulo de la figura es de 12 u^2 si $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ es ortogonal a $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$. Encuentre las ecuaciones de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$.



Resolución:

$$\text{Área } S = \frac{6\times b}{2} = 12 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow P(0;-4)$$



Hallando la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$:

$$\frac{0-^{-}4}{6-0} = \frac{y-^{-}4}{x-0} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y+4}{x}$$

$$3y = 2x-12$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}: \ y = \frac{2}{3}x-4$$

de donde: $m_2 = \frac{2}{3}$

Como $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$

Luego, $\frac{2}{3}m_1 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$

Utilizando la ecuación punto pendiente, calculamos la ecuación de $\mathscr{L}_1$.

$$-\frac{3}{2} = \frac{y-0}{x-6} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{y}{x-6}$$

$$-3x + 18 = 2y$$

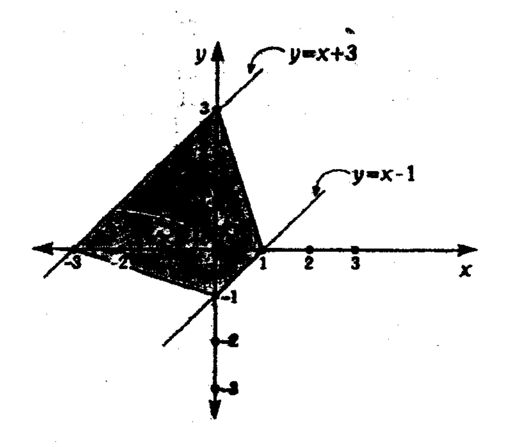
$$\mathscr{L}_1: y = -\frac{3}{2}x+9$$

PROBLEMA 22

Halle el área de la región cuadrangular que se forma al unir los puntos de intersección de las rectas $y=x+3$ e $y=x-1$ con los ejes de coordenadas.

Resolución:

Graficando las rectas dadas y uniendo los puntos convenientemente:



$$S_1 = \frac{1\times 4}{2} = 2u^2$$

$$S_2 = \frac{4\times3}{2} = 6u^2$$

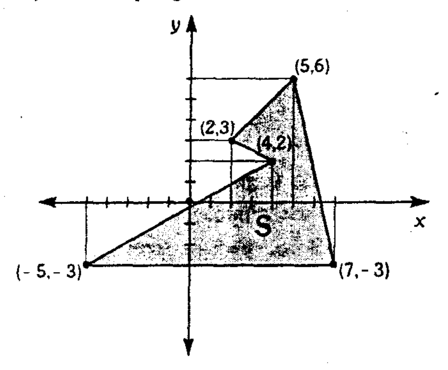
$$\Rightarrow \quad S_1+S_2 = 8\ u^2$$

PROBLEMA 23

Calcule el área de la región poligonal cuyos vértices son A(2,3) , B(5,6) , C(7,–3) , D(–5,–3) , E(4,2).

Resolución:

Grafiquemos el polígono:



Usando notación de determinante:

	2	3	
15 ←	5	6	→ 12
42 ←	7	-3	→ -15
+15 ←	-5	-3	→ -21
-12 ←	4	2	→ -10
4 ←	2	3	→ 12
64			-22

(+ sobre ambas columnas de productos)

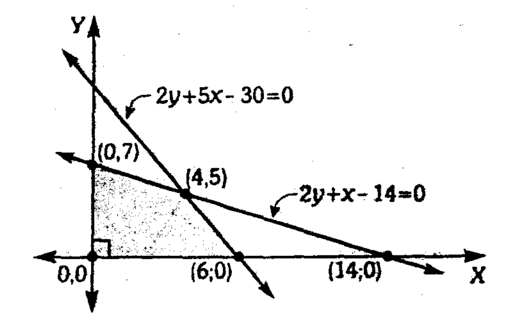
$$S = \frac{1}{2}\left|-22-64\right|$$

$$S = \frac{1}{2}\left|-86\right| = 43\ u^2$$

PROBLEMA 24

Halle el área de la región cuadrangular convexa, limitado par las rectas $2y+x-14=0$, $2y+5x-30=0$ y el sistema de coordenadas rectangulares.

Resolución:



	0	7	
28 ←	4	5	→ 0
30 ←	6	0	→ 0
0 ←	0	0	→ 0
0 ←	0	7	→ 0
58			0

(+ sobre ambas columnas de productos)

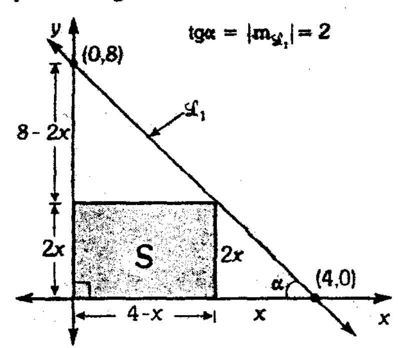
$$S = \frac{1}{2}(58-0) = 29\ u^2$$

PROBLEMA 25

Una recta intercepta a los ejes coordenados en los puntos (0,8) y (4,0). Halle el área de la mayor región rectangular que se puede inscribir en el triángulo formado por la recta y los ejes coordenados.

Resolución:

Grafiquemos según las condiciones dadas:



De acuerdo al gráfico, tendremos

$S = (4 - x)(2x)$

multiplicando y completando cuadrados:

$S_{máx} : 8 - \underbrace{2(x-2)^2}$

Para que el área sea máxima, el valor de esta expresión debe de ser cero.

Así: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Luego:

Para $x=2$ nos queda

$$S_{max} = 8\ u^2$$

PROBLEMA 26

Usando los datos del problema 18

a. hallar las coordenadas del punto Q.

b. hallar el área del triángulo ACQ.

Resolución:

a. Basándonos en el gráfico del problema mencionado, primero hallaremos la ecuación de la recta L_1 que contiene al segmento AC y después la ecuación de la recta L_2 que contiene al segmento BC; luego hallamos el ángulo α.

Veamos:

Ecuación de L_1: $\dfrac{4-{}^{-}2}{2-{}^{-}6} = \dfrac{y-{}^{-}2}{x-{}^{-}6}$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \rightarrow m_1 = \frac{3}{4}$$

Ecuación de L_2: $\dfrac{1-4}{6-2} = \dfrac{y-4}{x-2} \Rightarrow$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \rightarrow m_2 = -\frac{3}{4}$$

Usaremos la expresión correspondiente al ángulo entre dos rectas:

$$\text{Así, } tg(2\alpha) = \frac{\frac{3}{4} - -\frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{24}{7}$$

$tg(2\alpha) = \dfrac{24}{7}$ (el ángulo es notable)

de donde: $2\alpha = 74$

$\alpha = 37°$

Si consideramos m_4 la pendiente de L_4, entonces

$$tg\,\alpha = \frac{m_4 - -\frac{3}{4}}{1 + (m_4)\left(-\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{m_4 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}m_4}$$

$\Rightarrow m_4 = 0$

El valor $m_4 = 0$ indica que la recta L_4 es paralela al eje x, luego del gráfico se observa $y = 4$

(pues L_4 pasa por (2;4) su ordenada es 4)

Las coordenadas del punto Q: (a,4) satisfacen la ecuación de la recta L_3, es decir,

Ec. de L_3: $\dfrac{1-{}^{-}2}{6-{}^{-}6} = \dfrac{y-{}^{-}2}{x-{}^{-}6} \Rightarrow y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$

Reemplazamos aquí el punto (a;4)

$4 = \dfrac{1}{4}a - \dfrac{1}{2}$ de donde a =18

Así: coordenadas de Q(18;4)

b. El área del $\triangle$ACQ será:

$$\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 18 & 4 \\ 2 & 4 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{lr} -(18)(-2) = & 36 \\ -(2)(4) = & -8 \\ -(-6)(4) = & +24 \\ +(-6)(4) = & -24 \\ +(18)(4) = & +72 \\ +(2)(-2) = & -4 \\ \hline & 96 \end{array}$$

$$A = \frac{1}{2}|96| = 48\ u^2$$

PROBLEMA 27

Halle el área de la región triangular formada por las rectas $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}: y-x-6=0$, $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}: y+x-12=0$ y el eje de las abscisas.

Resolución:

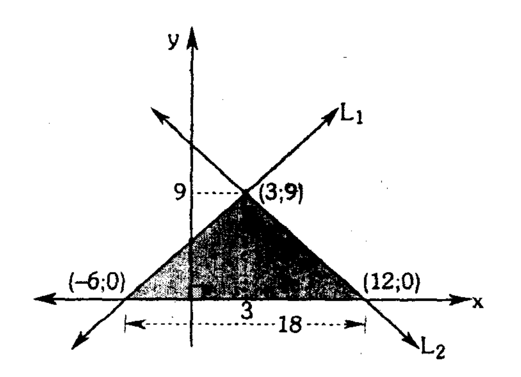
Procedemos a graficar las rectas $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}$, para ello debemos calcular los puntos de intersección de las rectas con el eje de abscisas.

Ecuación	Cálculo de las coordenadas	Puntos de intersección con los ejes
$L_1: y-x-6=0$	Para $y=0 \Rightarrow x=-6$	(–6; 0)
$L_2: y+x-12=0$	Para $y=0 \Rightarrow x=12$	(12;0)

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_1}: y-x=6$

$\overleftrightarrow{\mathcal{L}_2}: y+x=12$

Resolviendo: $x=3$, $y=9$



Área Δ : $\dfrac{18\times 9}{2}=81u^2$

PROBLEMA 28

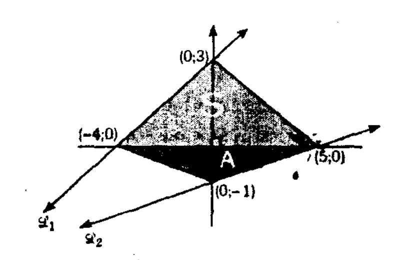
Halle el área del cuadrilátero que se forma al unir los puntos de intersección de las rectas.

$y=\dfrac{3}{4}x+3$ e $y=\dfrac{1}{5}x-1$ con los ejes de coordenadas.

Resolución:

Análogo al problema anterior:

Ecuación	Cálculo de las coordenadas	Puntos de intersección con los ejes
$\mathcal{L}_1: y=\dfrac{3}{4}x+3$	Para $x=0 \Rightarrow y=3$ Para $y=0 \Rightarrow x=-4$	(0; 3) (–4;0)
$\mathcal{L}_2: y=\dfrac{1}{5}x-1$	Para $x=0 \Rightarrow y=-1$ Para $y=0 \Rightarrow x=5$	(0; –1) (5; 0)



Área de la región S : $\dfrac{9(3)}{2}$

Área de la región A : $\dfrac{9(1)}{2}$

$\therefore$ Área de la región sombreada : $\dfrac{27}{2}+\dfrac{9}{2}=18u^2$

PROBLEMA 29

Halle el área de la región limitada por la ecuación $xy^2+x^2y-6x^3+2y^2+2xy-12x^2=0$

Resolución:

Considerando la ecuación dada y factorizando adecuadamente:

$xy^2+x^2y-6x^3+2y^2+2xy-12x^2 = 0$

$x(y^2+xy-6x^2)+2(y^2+xy-6x^2) = 0$

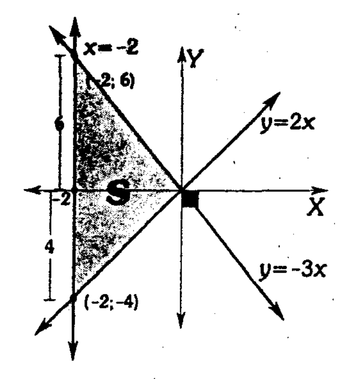
$(x+2).(y+3x).(y-2x) = 0$

Esta expresión nos indica que son 3 rectas

$x + 2 = 0 \qquad x = -2$

$y + 3x = 0 \qquad y = -3x$

$y - 2x = 0 \qquad y = 2x$

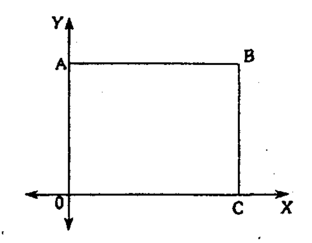


El área de la región S es

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{(6+4)}_{\text{base}}\ \underbrace{(2)}_{\text{altura}} = 10\ u^2$$

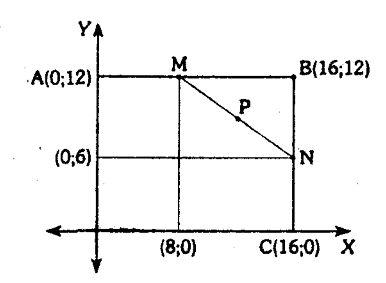
PROBLEMA 30

Según el gráfico, OABC es un rectángulo donde las coordenadas del vértice B son (16;12). Calcule las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



Resolución:

Complementando la gráfica con los datos dados, deduciendo además las coordenadas de los vértices A y C, tendremos:



Punto medio de $\overline{AB}$: M(8;12)

Punto medio de $\overline{BC}$: N(16;6)

Nos piden las coordenadas del punto P que es punto medio de $\overline{MN}$:

$$P = \left(\frac{8+16}{2};\frac{12+6}{2}\right) = (12;9)$$

PROBLEMA 31

Dos de los vértices de un triángulo son A(2;1) y B(5;3). Calcule el producto de las coordenadas del tercer vértice si la intersección de las medianas es (3;4).

Resolución:

Asumiendo $(x;y)$ coordenadas del tercer vértice. La intersección de las medianas es el baricentro de ΔABC y se calcula así:

$$\text{Baricentro G: } \left(\frac{2+5+x}{3};\frac{1+3+y}{3}\right) = (3;\ 4)$$

Resolviendo las ecuaciones:

$$\frac{7+x}{3} = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{4+y}{3} = 4 \Rightarrow y = 8$$

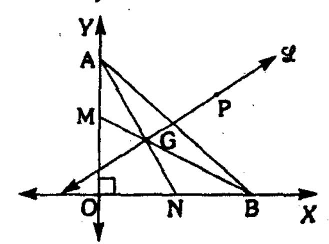
entonces las coordenadas del tercer vértice son (2;8)

El problema nos pide el producto $x.y$

Luego, $x.y = 2\times 8 = 16$

PROBLEMA 32

Según el gráfico, determine la ecuación de la recta L que contiene al segmento $\overline{PG}$ si A(0;6), B(9;0), P(7;,5) AM=MO y ON=NB.



Resolución:

En el ◺ AOB se tiene $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ medianas, entonces G es baricentro y calculamos sus coordenadas:

$$G:\left(\frac{0+9+0}{3};\frac{6+0+0}{3}\right)=(3;2)$$

además, por dato, P(7;5) y como L pasa por ambos puntos planteados, entonces

$$m=\frac{5-2}{7-3}=\frac{y-2}{x-3}$$

despejando tendremos

Ecuación de L: $3x-4y-1=0$

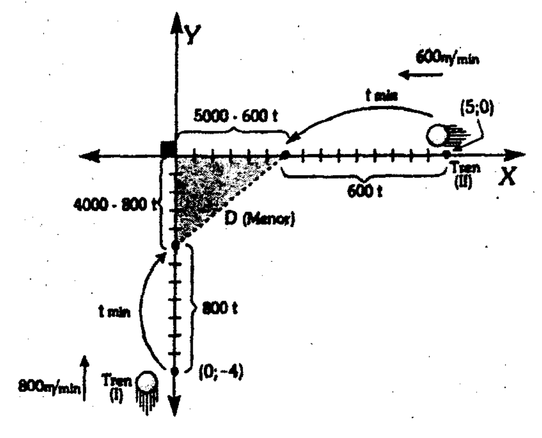
PROBLEMA 33

Dos líneas férreas se encuentran sobre los ejes coordenados respectivamente. Una estación se encuentra en el punto (0,–4), otra estación se encuentra en el punto (5,0). Si de cada una de dichas estaciones parte simultáneamente un tren, el primero marcha a una velocidad de 300 metros por minuto; el segundo, a 600 m/min (los dos trenes se dirigen al punto de intersección de las líneas férreas) ¿Cuántos minutos transcurrirán desde el momento de la partida para que los trenes se hallen a la menor distancia entre sí, y cuál será esa distancia?

Nota: la unidad tomada para los números reales sobre la recta es de 1 km.

Resolución:

Según los datos del problema, graficamos y planteamos:



del gráfico tendremos:

$$D=\sqrt{(5000-600t)^2+(4000-800t)^2}$$

Completando cuadrados:

$$D=100\sqrt{\underbrace{(10t-62)^2}_{\alpha}+256}$$

Para que D sea mínima, α debe ser cero:

$\Rightarrow D = 100(16)$

$D = 1\,600$ m

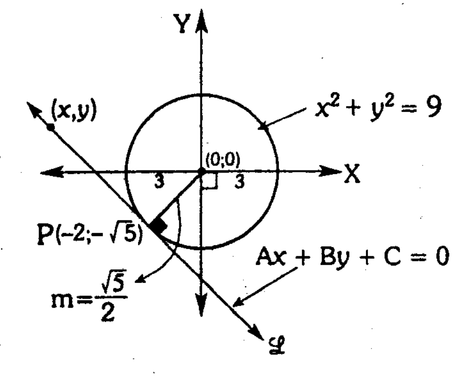
lo cual ocurre si $10t-62 = 0$

$t = 6{,}2$ min

PROBLEMA 34

Una recta es tangente a un círculo de centro en el origen y radio 3. Si el punto de tangencia es $P\left(-2,-\sqrt{5}\right)$, halle la ecuación de la recta tangente.

Resolución:



$$\Rightarrow m_{\mathscr{L}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{y-(-\sqrt{5})}{x-(-2)}$$

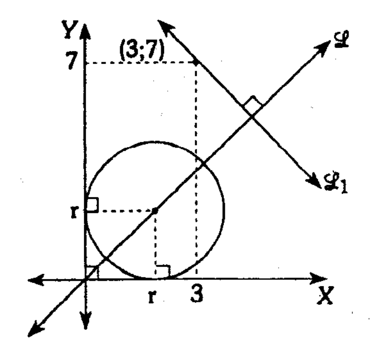
$$-2x - 4 = \sqrt{5}y + 5$$

$$\mathscr{L} : 2x + \sqrt{5}y + 9 = 0$$

PROBLEMA 35

Una recta $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ contiene al centro de una circunferencia de radio 2 tangente a los semiejes positivos de coordenadas rectangulares y al punto A(0;0). Determine la ecuación de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y que contiene al punto Q(3; 7).

Resolución:



Se deduce que: $x=y$ pues $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ pasa por (r; r) entonces la pendiente de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es: m=1 y como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ entonces la pendiente de $\mathscr{L}_1$ es: $m_1=-1$ además $\mathscr{L}_1$ pasa por el punto Q(3;7).

Luego:

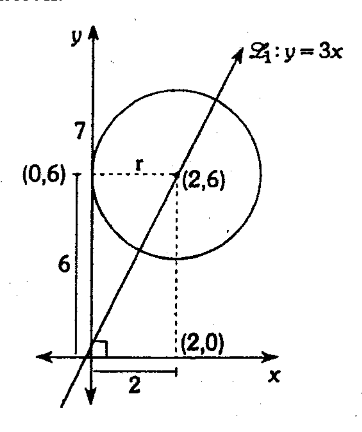
$$m_1 = -1 = \frac{y-7}{x-3}$$

$\therefore$ Ecuación de $\mathscr{L}_1 : x + y - 10 = 0$

PROBLEMA 36

Determine la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de las coordenadas en (0;6) y cuyo centro está contenido en la recta $y-3x=0$.

Resolución:



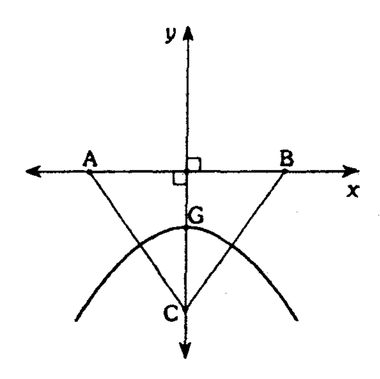
En la ecuación de $\mathscr{L}_1$: si $y=6 \Rightarrow x=2$ además; centro: (2;6), radio: r=2u.

La ecuación de la circunferencia será:

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 2^2$$

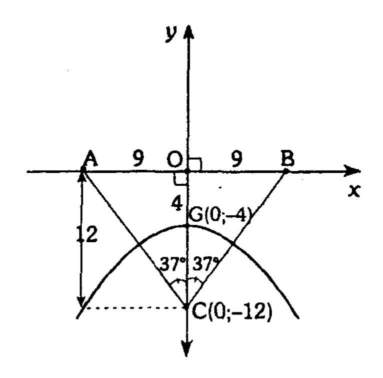
PROBLEMA 37

Según la figura G es baricentro de la región triangular ABC, AB=18 y m∢ACB=74°. Determine la ecuación de la parábola cuyo eje focal está contenido en el eje Y, además C es el foco.



Resolución:

Como $\overline{CO}$ es mediana y además bisectriz tendremos:



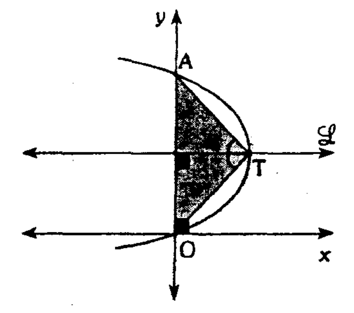
Ahora, como G es baricentro y está sobre el eje de las ordenadas, sus coordenadas son G(0; –4).

Luego, p = 8

La ecuación será $x^2 = -4(8)(y+4)$, $y=-\dfrac{x^2}{32}-4$

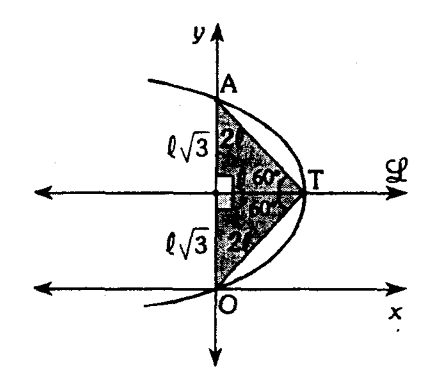
PROBLEMA 38

Según la figura la m∢ATO=120°; el área de la región triangular ATO es $\sqrt{3}\,u^2$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es el eje de la parábola. Halle la ecuación de la parábola.



Resolución:

Con los datos del problema, se plantea la gráfica siguiente:



$$\text{Área } \Delta ATO = \frac{(2\ell\sqrt{3})}{2}\ell = \sqrt{3}\,u^2$$

$\therefore$ $\boxed{\ell = 1}$

Luego las coordenadas del vértice de la parábola $T(1;\sqrt{3})$ y la curva pasa por (0;0) y $(0;2\sqrt{3})$, además el eje de la parábola es paralelo al de abscisas, entonces la ecuación que debemos aplicar es $(y-k)^2 = -4a(x-h)$

Así, tendremos $(y-\sqrt{3})^2 = -4a(x-1)$ . . . . . . (*)

Calculamos a reemplazando (0;0) en (*):

$(0-\sqrt{3})^2=-4a(0-1)$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{4}$

Finalmente, $(y-\sqrt{3})^2 = -3(x-1)$

PROBLEMA 39

Se tiene la siguiente ecuación $xy+2y-x-3=0$, su respectiva gráfica es simétrica respecto a uno de los siguientes puntos (2;1) , (–2;1) , (1;2) , (–1;2), (2;–1). Diga Ud. con cuál:

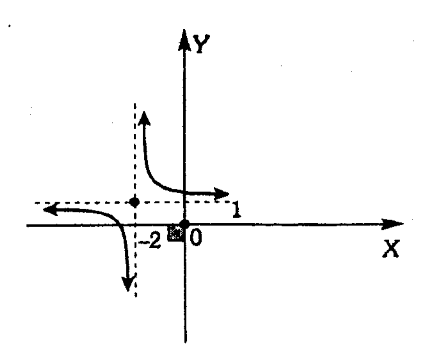
Resolución:

$xy+2y-x-3 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x+3}{x+2}$

$y = \dfrac{x+2+1}{x+2}$

$y = 1+\dfrac{1}{x+2}$ (En $x=-2$ la gráfica tiene una asíntota)

$\therefore$ Será simétrico al punto (–2,1)



PROBLEMA 40

Dada la parábola que tiene por ecuación

$$y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$$

Encuentra el vértice, el foco, una ecuación de la directriz, una ecuación del eje y la longitud del lado recto.

Resolución:

De la ecuación, tendremos

$$y^2 + 8y = -6x - 1$$

$$\Rightarrow\ y^2 + 8y + 16 = -6x + 15$$

$$(y+4)^2 = -6\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

Recordemos:

$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ es la ecuación de la parábola con vértice en (h; k) y un eje paralelo al eje x, foco en (h+p; k) ecuación de la directriz: $x=h-p$.

Luego, por simple comparación deducimos:

$h=\dfrac{5}{2}$ y $k=-4$

además $4p=-6\ \therefore\ p=\dfrac{-3}{2}$

Entonces, el vértice de la parábola es $\left(\dfrac{5}{2};-4\right)$ y una ecuación del eje es $y=-4$.

El foco está en $\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{-3}{2};-4\right)$, es decir (1, –4)

La ecuación de una directriz es $x=\dfrac{5}{2}-\dfrac{-3}{2}$

$\therefore\ x = 4$

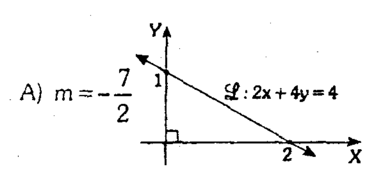
Longitud del lado recto:

$|4p| = \left|4\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right| = |-6| = 6u$

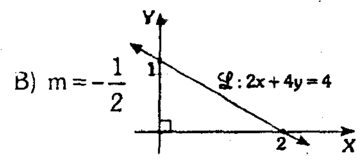
Problemas Propuestos

1. Dada la recta $\mathcal{L}$: $2x+4y=4$, halle su pendiente y su gráfica.

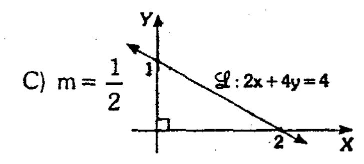
A) $m=-\dfrac{7}{2}$



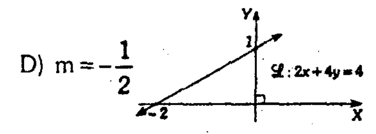
B) $m=-\dfrac{1}{2}$



C) $m=\dfrac{1}{2}$



D) $m=-\dfrac{1}{2}$



E) $m=\dfrac{3}{4}$

Y 1 $\mathcal{L}: 2x+4y=4$ -2 X

2. Si: $\mathcal{L}$: $3x+4y=2$, halle la ecuación de la recta $\mathcal{L}_1$ perpendicular a L y que pase por el punto (4;2)

A) $4x-3y+10=0$
B) $4x+3y-10=0$
C) $4x+3y+10=0$
D) $4x-3y-10=0$
E) $5x-3y+10=0$

3. Dadas las rectas $\mathcal{L}_1$: $-2x+y=-2$ y $\mathcal{L}_2$: $x+y=7$; indique si son paralelas y halle su punto de intersección, si es que son secantes.

A) Son paralelas
B) No son paralelas; $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (5;4)$
C) No son paralelas; $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (4;5)$
D) No son paralelas; $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (4;3)$
E) No son paralelas; $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = (3;4)$

4. Halle el perímetro de un triángulo cuyos vértices son (4;6) , (6;1) , (2;9).

A) $\sqrt{13}+\sqrt{5}+\sqrt{29}$
B) $\sqrt{13}+\sqrt{29}+4\sqrt{5}$
C) $\sqrt{13}+\sqrt{29}+\sqrt{7}$
D) $\sqrt{29}+4\sqrt{13}+\sqrt{5}$
E) $\sqrt{5}+\sqrt{13}+4\sqrt{29}$

5. El ángulo de inclinación de una recta mide 135°. Si pasa por los puntos $(-3;y)$ y $(-5;4)$. Calcule y.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

6. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (2/3;11/3) y por la intersección de las rectas $3x-5y-11=0$ y $4x+y-7=0$

A) $-7x+2y-12=0$
B) $7x-2y-12=0$
C) $7x+2y-12=0$
D) $7x+2y+12=0$
E) $7x-2y+12=0$

7. Calcule el área de un polígono cuyos vértices son (2;6), (4;5) , (0;0) , (3;1).

A) $12{,}5u^2$ B) $15u^2$ C) $25u^2$
D) $10{,}5u^2$ E) $21u^2$

8. Dos rectas paralelas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ pasan por A(0;3) y B(3;0), respectivamente, y determinan regiones de área iguales con los ejes coordenados. Halle la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$.

A) $x - y + 3 = 0$
B) $x + y - 3 = 0$
C) $x + y + 3 = 0$
D) $x - y - 3 = 0$
E) $x - 2y + 6 = 0$

9. Dada la recta $\mathcal{L}$: $x - y + 5 = 0$ y los puntos A(–1;0) y B(2;3). Halle el punto C que pertenece a la recta dada de modo que AC=BC.

A) (3/2; 7/2) B) (7/2; –3/2)
C) (–3/2; –7/2)
D) (–3/2; 7/2) E) (5; 3)

10. Dados los puntos A(–1;4) , B(3;1) , C(–2;–2) y D(7;4). Halle la ecuación de la recta que pasa por G y por el punto medio de $\overline{BD}$ si G es baricentro del △ABC.

A) $7x + 3y + 6 = 0$
B) $3x + 11y + 3 = 0$
C) $3x - 10y + 10 = 0$
D) $2x + 7y + 13 = 0$
E) $7x + 6y + 8 = 0$

11. Halle la pendiente de la recta que pasa por el punto medio del segmento que une los puntos M(–3;2) y N(7;6) y el punto P(x;y) tal que AP: PB=1:2 ; siendo A(0;–2) y B(5;0)

A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

12. La pendiente de una recta que pasa por el punto A(3;2) es igual a 3/4. Calcule las coordenadas de dos puntos P y Q sobre esta recta que disten 5 unidades de A.

A) (7; 5) y (–1; –1)
B) (5; 3) y (3; 5)
C) (7; 5) y (1;1)
D) (3; 4) y (–1; 1)
E) (4; 3) y (2; 1)

13. Sea P=(a;b) un punto tal que la recta OP que lo une con el origen tenga pendiente –3, y que la recta MP trazada por los puntos P y M=(3;1) tiene pendiente 2. Calcule el valor de a+b.

A) 5/3 B) –3 C) –5/3
D) –2 E) –7/2

14. Una recta que pasa por el origen corta a las rectas $x-y=3$, $y=2x+4$ en los puntos A y B respectivamente. Si el origen es punto medio del segmento $\overline{AB}$, halle las coordenadas del punto A.

A) (1; 3) B) (1; –2) C) (–1; 2)
D) (2; 4) E) (2; 1)

15. Halle el perímetro del triángulo formado por los ejes X, Y y la recta $\mathcal{L}_1$ la cual pasa por el punto (10;–12) y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{5}{12}x + 10$.

A) 15u B) 20u C) 35u
D) 10u E) 30u

16. Los puntos medios de los lados de un triángulo vienen dados por la intersección 2 a 2 de las siguientes rectas:

$\mathcal{L}_1$: $4x+3y-5=0$

$\mathcal{L}_2$: $x-3y+10=0$

$\mathcal{L}_3$: $x-2=0$

Halle el área de dicho triángulo.

A) $35u^2$ B) $40u^2$ C) $20u^2$
D) $30u^2$ E) $45u^2$

17. Halle las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan al lado opuesto $\overline{AC}$ del triángulo cuyos vértices son A(–3;3) , B(4;7) , C(6;–3).

A) $8x-y-25=0$ y $3x-2y+2=0$
B) $7x-y-25=0$ y $3x-2y+2=0$
C) $8x-y-25=0$ y $4x-3y+2=0$
D) $7x+y+25=0$ y $3x+2y+2=0$
E) $5x+y+25=0$ y $2y+3x-5=0$

18. Halle la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $\mathcal{L}_1$: $5x+3y-15=0$.

A) $5x-10y+7=0$
B) $6x-10y-16=0$
C) $6x-10y+16=0$
D) $6x+10y-16=0$
E) $6x+10y+16=0$

19. El punto medio de un segmento está en el punto P(–7;2); la abscisa de uno de los extremos es 5 y la ordenada del otro extremo –9. Halle las coordenadas de los extremos.

A) (5; 13) y (10; 9
B) (5; 13) y (–19; –9)
C) (5; –13) y (–19; –9)
D) (13; 5) y (9; –19
E) (13; –5) y (–9; 19)

20. Halle la ecuación de una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto Q=(4;–3) y es paralela a la recta $\mathcal{L}_1$ cuya ecuación es $y=3x+5$.

A) $y=5x-13$
B) $y=-3x+15$
C) $y=3x+15$
D) $y=-3x-15$
E) $y=3x-15$

21. El punto P está en el segmento de recta entre los puntos $P_1(1;3)$ y $P_2(0;1)$ y está 3 veces más lejos de P_1 que de P_2. Halle las coordenadas de dicho punto.

A) (1; 7) B) (1/5;, 7)
C) (1; 7/5)
D) (1/5; 7/5) E)(–1/5; –7/5)

22. Halle la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ de pendiente –3/4 que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a **24** u^2.

A) $3x+4y-24=0$
B) $3x-4y-24=0$
C) $3x-4y+24=0$
D) $2x+4y+24=0$
E) $3x-7y+15=0$

23. El punto C equidista de A(2;2) y de B(10;2). El área de la región triangular ABC es 25 u^2. Halle las coordenadas de C.

A) (6; 7) B) (5; 33/4) C) (5; 9)
D) (–6; 33/4) E) (6; 33/4)

24. Dado el triángulo cuyos vértices son A(3;3), B(7;6) y C(–3;11), halle el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto BC.

A) (11/3; 23/3) B) (11; 23)
C) (12; 20)
D) (4; 6) E) (5; 7)

25. Halle las coordenadas de un punto equidistante de los vértices del triángulo ABC, donde A(2;–1), B(3;6) y C(–5;0).

A) (1; 3) B) (–1; –3) C) (–1; 3)
D) (1; –3) E) (2; 4)

26. Un triángulo tiene por vértices A(–4;–3), B(8;0) y C(6;12). Por el punto $E\left(\frac{36}{5};\frac{24}{5}\right)$ que pertenece al lado $\overline{BC}$ se traza una paralela a $\overline{AB}$ que corta al lado $\overline{AC}$ en el punto D. Halle las coordenadas de D.

A) (0,3) B) (6, 0) C) (1, 5)
D) (–7,3) E) (–5, 6)

27. Halle el área determinada por la siguiente relación:

$$R = \{(x;y) / 2|x| + |y| \leq 2\}$$

A) $5u^2$ B) $3u^2$ C) $1u^2$
D) $4u^2$ E) $2u^2$

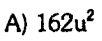
28. Halle la ecuación general de la recta que es perpendicular a $\mathcal{L}$:3x+4y–12=0 en un punto P cuya distancia al punto de intersección de $\mathcal{L}$ y el eje *X* es la cuarta parte de la distancia de dicho punto al punto de intersección de $\mathcal{L}$ y el eje Y.
(Observación: las coordenadas de P son positivas).

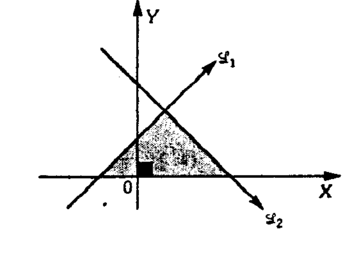
A) $\mathcal{L}_1 : 4x - 3y + 4 = 0$
B) $\mathcal{L}_1 : 4x + 3y + 4 = 0$
C) $\mathcal{L}_1 : 4x - 3y - 4 = 0$
D) $\mathcal{L}_1 : -4x - 5y + 7 = 0$
E) $\mathcal{L}_1 : 4x + 3y - 4 = 0$

29. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto R(8;–6) y forma un triángulo isósceles con las rectas L_1: $y=3$ y L_2: $3x+y-12=0$; de tal manera que el lado desigual del triángulo esté contenido sobre L_1.

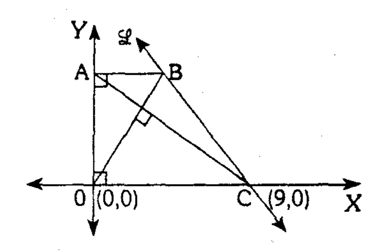
A) $3x + y - 30 = 0$
B) $3x + 2y - 40 = 0$
C) $2x + y + 30 = 0$
D) $3x - y + 30 = 0$
E) $3x - y - 30 = 0$

30. Halle el área de la región sombreada si $\mathcal{L}_1$:y–x–6=0 y $\mathcal{L}_2$: y+x–12=0.


A) $162u^2$
B) $70u^2$
C) $81u^2$
D) $94u^2$
E) $56u^2$



31. Según la figura, halle la ecuación de la recta L si OA=6.



A) $6x - 3y - 4 = 0$ B) $6x + 5y - 54 = 0$

C) $6x + 5y + 54 = 0$

D) $6x - 5y - 54 = 0$ E) $-5x + 5y - 1 = 0$

32. Determine la ecuación de una parábola cuyo foco es F=(6; 3) y su directriz es $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$: $x = 2$.

A) $(y + 3)^2 = 8x - 4$

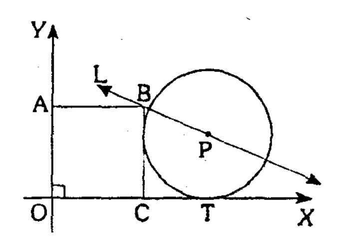
B) $(y - 3)^2 = 8(x + 4)$

C) $(y - 3)^2 = 8x + 4$

D) $(y - 3)^2 = 8(x - 4)$

E) $(y + 3)^2 = 8(x - 4)$

33. Según la figura, halle la ecuación de la recta L, si C(4; 0) y T(7; 0) (ABCD: cuadrado)

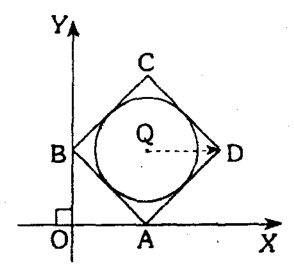


A) $3x - y - 16 = 0$ B) $3y + x - 16 = 0$

C) $3x + y - 16 = 0$

D) $3y - x - 16 = 0$ E) $3y + x + 16 = 0$

34. Si B=(0; 8), Q=(7; b) y el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, determine la ecuación de la circunferencia mostrada.



A) $x^2 + y^2 = 16$

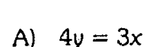
B) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

C) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 36$

D) $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$

E) $(x-7)^2 + (y-7)^2 = 25$

35. Según la figura, halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$ si la región cuadrada EDCB y la región triangular equilátera OBA tienen igual perímetro.



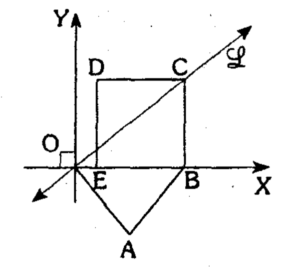
A) $4y = 3x$

B) $3y = 4x$

C) $3y = x$

D) $4y = x$

E) $5y = 4x$



36. Los vértices de un triángulo son los puntos A(3;6), B(–1; 3) y C(2; –1). Halle la ecuación de la recta que contiene a la altura del triángulo ABC relativa a $\overline{AC}$.

A) $7y + x - 20 = 0$

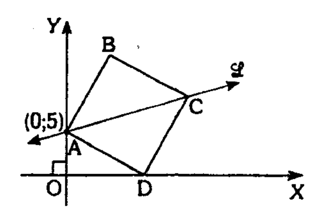
B) $7x - y - 20 = 0$

C) $7y - x - 20 = 0$

D) $7x + y - 20 = 0$

E) $6x - 4y = 20$

37. Según la figura, halle la ecuación de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ si el lado del cuadrado ABCD mide 13.



A) $17x - y = 85$

B) $17y - 7x = 85$

C) $17y - 7x + 85 = 0$

D) $17x - 7y = 85$

E) $17y - 6x - 85 = 0$

38. Determine la ecuación de la recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ si A(–4; 3) y B(2;9).

A) $y = 5x + 3$

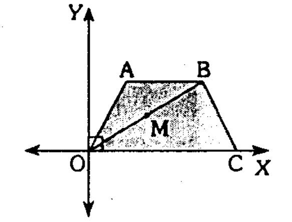
B) $y - x + 5 = 0$

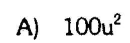
C) $y + x - 5 = 0$

D) $y + x + 5 = 0$

E) $x - y + 5 = 0$

39. Según el gráfico OABC es un trapecio isósceles, OM=MB. Siendo las coordenadas del punto M(6; 5), calcule el área de la región sombreada.




A) $100u^2$

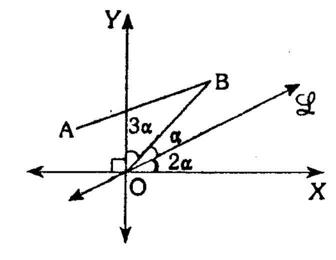
B) $60u^2$

C) $90u^2$

D) $120u^2$

E) $180u^2$

40. Según el gráfico, determine la ecuación de la recta que contiene a $\overline{AB}$ si $\overline{AB} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ y $OB=6\sqrt{2}$.



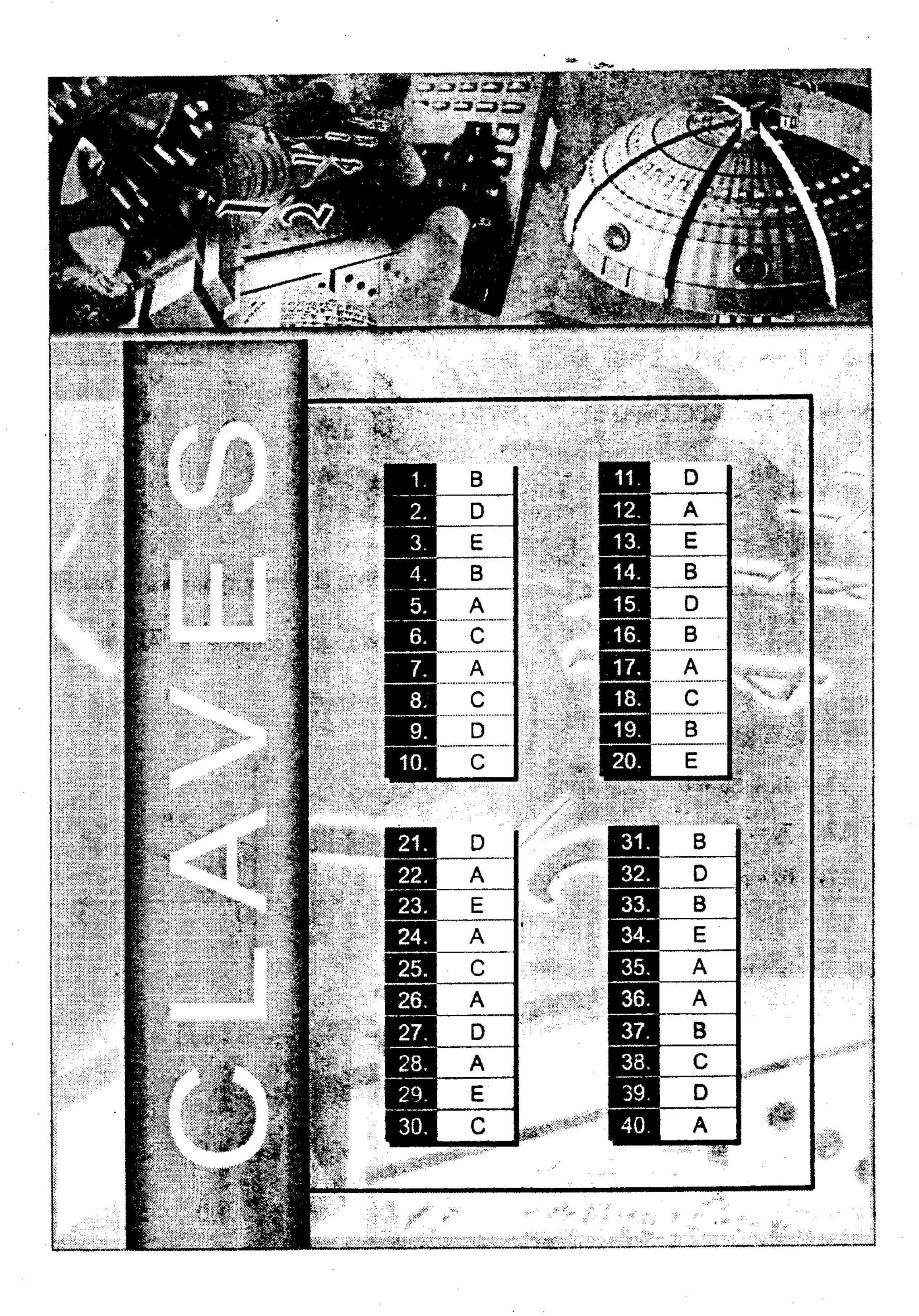
A) $\sqrt{3}y - x + 6 - 6\sqrt{3} = 0$

B) $3y - x + 6 = 0$

C) $y + x - 6\sqrt{3} = 0$

D) $y - x + 6\sqrt{3} = 0$

E) $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$



1.	B	11.	D	21.	D	31.	B
2.	D	12.	A	22.	A	32.	D
3.	E	13.	E	23.	E	33.	B
4.	B	14.	B	24.	A	34.	E
5.	A	15.	D	25.	C	35.	A
6.	C	16.	B	26.	A	36.	A
7.	A	17.	A	27.	D	37.	B
8.	C	18.	C	28.	A	38.	C
9.	D	19.	B	29.	E	39.	D
10.	C	20.	E	30.	C	40.	A

René Descartes

Gran filósofo y matemático francés, nació en La Haye (cerca de Tours) el 31 de marzo de 1596 y murió en Estocolmo (Suecia) el 11 de febrero de 1650.

René Descartes fue una figura de primer orden en su época. En él se personifica una renovación total de los planteamientos filosóficos y científicos que, sin intención de quitar mérito, en parte tenían vacíos en aquel momento histórico.

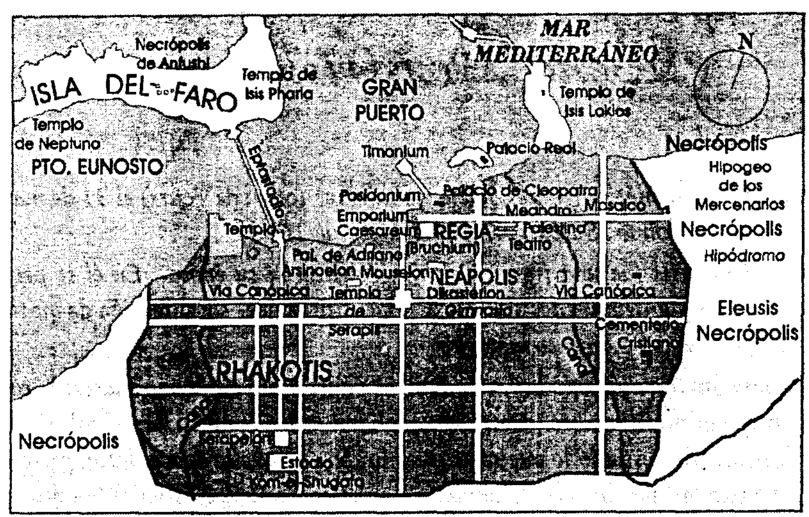
Era hijo de una familia acomodada y, como tal, su padre quiso darle una educación completa para hacer de él un perfecto gentilhombre. Con esta finalidad lo llevó a estudiar al colegio de La Flèche, dirigido por jesuitas. Allí estudió lo que se acostumbraba en aquella época: latín, griego, retórica,... No obstante, a pesar de ser un buen alumno, a Descartes aquellos estudios pronto empezaron a parecerle desprovistos de sentido. Empezó a preguntarse el porqué de las cosas. Se propuso elaborar unos fundamentos y una metodología nuevos para la filosofía, basados en la observación de la realidad y en el razonamiento riguroso hecho a partir de esta observación. Todas estas meditaciones se vieron favorecidas por el trato indulgente que Descartes recibía en La Flèche. Debido a su salud delicada y a que era un buen estudiante, el director le permitía pasar las mañanas realizando sus estudios en la cama. Los largos y tranquilos ratos de reflexión de que pudo disfrutar allí fueron muy positivos para el desarrollo posterior de su obra.

Cuando salió de La Flèche fue a estudiar Derecho a Poitiers, y al terminar los estudios, cansado del mundo cerrado y vacío en que había vivido esos años, se alistó en el ejército después de una temporada de vida mundana de la que acabó por hastiarse. El ejército le proporcionó la ocasión de viajar, de observar la realidad con sus propios ojos, y durante las largas temporadas de ocio de que disponía pudo dedicarse al estudio y a ir madurando sus innovadoras ideas filosóficas.

Tras algunos años en el ejército francés - durante los cuales no participó en la guerra activa jamás, teniendo tiempo de sobra para sus meditaciones matemáticas y filosóficas- Descartes se estableció en Holanda donde permaneció casi toda su vida.

*En el año 1 637 publicó **Discurso del Método**, cuyo título completo es **Discurso del Método para guiar bien la razón y buscar la verdad en las ciencias**. Adjuntos, figuraban tres apéndices: La Geometría, La Dióptrica, en donde enunciaba las leyes de la refracción, y Los Meteoros. En La Geometría, Descartes introdujo las nuevas ideas que dieron origen a lo que hoy llamamos geometría cartesiana o analítica, herramienta poderosísima que, a la vez que permitió abordar problemas clásicos desde un punto de vista nuevo, preparó el terreno para el gran desarrollo que posteriormente habría de experimentar la matemática.*

Según se cuenta, hizo el descubrimiento al observar el vuelo de una mosca. Se le ocurrió que la posición de la mosca podía darse en cada momento de su vuelo al localizar los tres planos perpendiculares que se cortan en el punto que ésta ocupa en el espacio.



Plano de la ciudad de Alejandría, fundada en Egipto por Alejandro Magno el año 332 a.n.e. Dinocrates diseñó este plano en el cual se observan que las calles se cortaban en ángulo recto, las vías secundarias eran paralelas a las dos grandes avenidas principales.

El hecho saltante es que por medio de su sistema de coordenadas podía representar cada punto del plano por un sistema original de dos números. En cualquier ecuación algebraica en dos variables (digamos x e y) se hace depender una de ellas, por ejemplo y de las variaciones de la otra variable x de acuerdo con una ley: $y=f(x)$. Por este sistema cada curva representa una ecuación y cada ecuación se puede representar en una curva.

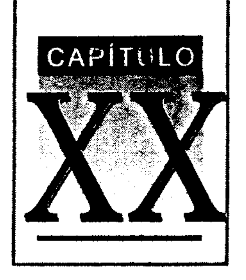
Descartes fue un hombre famoso en dos campos importantes del pensamiento humano: entre los filósofos, fue uno de los más grandes, y entre los matemáticos, se le consideró un gran matemático.

Su contribución principal a las matemáticas fue el descubrimiento de los sistemas de coordenadas y su aplicación a los problemas de la geometría. Desde entonces, el álgebra y la geometría han laborado juntas, para beneficio de ambas. Los sistemas de coordenadas utilizados en este libro se conocen con el nombre de sistemas de coordenadas cartesianas, en honor a su inventor (La palabra cartesiana viene de Cartesius, que es la forma latina del nombre de Descartes). El concepto de las coordenadas fue la primera contribución realmente fundamental a la geometría después de la época de los griegos.

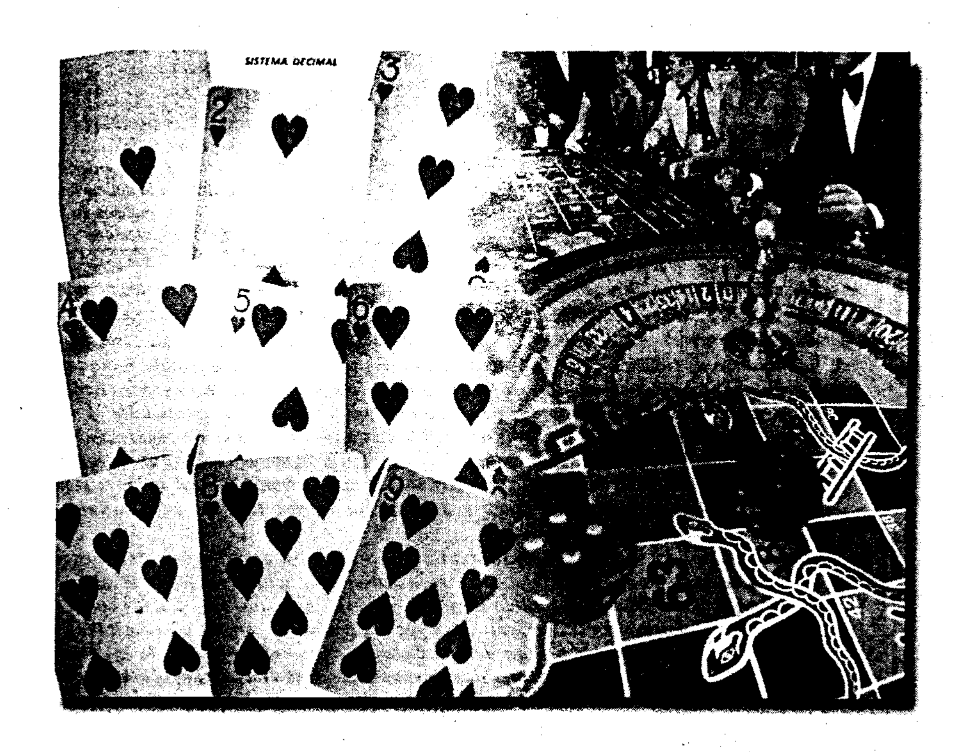
Parte del crédito para el descubrimiento de Descartes se le debe dar a Pierre Fermat, quien tuvo casi las mismas ideas en la misma época. Fermat fue uno de los pocos grandes matemáticos aficionados. Fue un alto funcionario del gobierno francés y se dedicaba a las matemáticas en su tiempo libre. Escribía a sus amigos cartas relacionadas con sus descubrimientos pero nunca publicó estos en otra forma. El contenido de las cartas de Fermat está ahora incluido en los libros corrientes sobre la teoría de los números.

El desarrollo del sistema de coordenadas sirvió de fundamento al cálculo infinitesimal, inventado poco después por Newton y Leibnitz. De modo que Descartes debe haber sido uno de los hombres en quien Newton pensaba cuando dijo que estaba apoyado sobre los hombros de gigantes.

En 1 649 se trasladó a Suecia invitado por la reina Cristina, quien quería contar con su colaboración para fundar una Academia de Ciencias en Estocolmo y además aspiraba a que le diera lecciones de filosofía. Sin embargo, la frágil salud de Descartes no resistió mucho tiempo el rigor del clima nórdico ni el de las costumbres de la corte. Al poco tiempo, enfermó de pulmonía y murió, a principios del año 1 650.

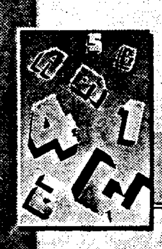


INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS COMBINATORIO



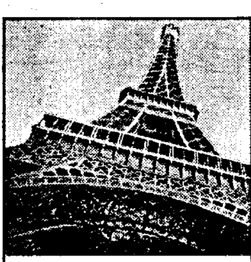
"La matemática es el más maravilloso instrumento creado por el ingenio humano para el descubrimiento de la verdad".

Laisant



Lectura 20

Las aplicaciones de las matemáticas


La Torre Eiffel, una obra maestra de la ingeniería que demuestra la aplicación de las matemáticas en la arquitectura

Con mucha frecuencia se opone el concepto de matemática pura al de matemática aplicada, dando así lugar a la idea de que existen dos clases de matemáticos, los inventivos, que se dedican exclusivamente al arte por el arte, y los técnicos, quienes utilizan sus resultados para ofrecer respuestas a problemas planteados por el mundo exterior. En realidad, la separación no es tan nítida. Las matemáticas son una unidad. y el progreso de cada una de sus disciplinas repercute en todas las otras. e incluso los matemáticos más puros son responsables del empleo que se hace de su ciencia y esto último se ha podido comprobar muy claramente con la aparición de métodos muy eficaces de criptografía que se basan únicamente en una generalización de la prueba del 9.

La creación de modelos: *Traducir el mundo que nos rodea en términos matemáticos con el fin de comprenderlo mejor, asi como de ser capaz de hacer previsiones. es la tendencia dominante de la ciencia de nuestro tiempo. Por esta razón es por la que todo empieza con la modelización, operación que consiste en transformar una situación concreta en un problema de matemáticas. Nunca es fácil hacer tal cosa, y sólo un reducido número de ciencias como la física, cuyas leyes se conocen. han podido franquear con éxito esta etapa preliminar. Para la mayoría de las otras ciencias tal etapa no significa nada. Pero no todo se queda en modelar, hay además, que resolver los problemas planteados. Y es muy frecuente que las técnicas de resolución sean deficientes o inaplicables como consecuencia de la complejidad de los cálculos. Por esta razón. el arte de hacer modelos consiste en encontrar un equilibrio entre la precisión del modelo y la posibilidad de resolverlo, lo cual se logra mediante aproximaciones lo más exactas posibles y desdeñando ciertos factores cuya influencia es secundaria. pero que complican los cálculos.*

Los campos de aplicación más relevantes: *La física es el campo privilegiado de aplicación de las matemáticas, pero no el más antiguo, ya que la astronomía y la mecánica se le adelantaron varios siglos, y la geometría, en el sentido etimológico, varios milenios. Hoy día, las aplicaciones más nuevas de las matemáticas están motivadas por imperativos sociales y económicos. Y es así como desde los años cincuenta se han desarrollado enormemente la teoría de los juegos, la investigación de operaciones, la estadística, las biomatemáticas etc. La física es la más matemática de todas las ciencias. La razón es simple: la mayoría de fenómenos físicos pueden reproducirse experimentalmente, lo que permite determinar los parámetros que los rigen y establecer experimentalmente las leyes a que se someten. Así, podría decirse que el físico aisla y estudia los fenómenos, descubre fórmulas mediante la experiencia y, finalmente, encuentra las hipótesis físicas que conducen a dichas fórmulas. En otras disciplinas como la meteorología, tal procedimiento es imposible. De hecho, no se puede hablar propiamente de experiencia, sino de observaciones, ya que no se sabe como modificar el clima a voluntad, y los parámetros que determinan el tiempo que hará son demasiado complicadas para que se se puedan plantear las ecuaciones, discutirlas y estudialas.*

FUENTE: El mundo de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN AL

ANÁLISIS COMBINATORIO

Objetivos

1. *Iniciar al lector en el estudio del análisis combinatorio.*
2. *Desarrollar la capacidad para resolver problemas de análisis combinatorio de manera razonada.*
3. *Aplicar adecuadamente los conceptos teóricos desarrollados.*
4. *Dominar la teoría necesaria para proseguir estudios de este tema a nivel superior.*

Introducción

A pesar de la gran cantidad de problemas capaces de despertar la motivación de los estudiantes interesados en el presente tema, esta parte del curso es considerada como una de las más complicadas, siendo también, a juicio de muchos profesores, un tema difícil de enseñar por las dificultades que esto implica: desarrollar en el estudiante su ingeniosidad y potenciar la comprensión plena de las situaciones descritas en los problemas dados. Sin embargo, ello constituye uno de los retos de esta parte del curso; pues, muchas veces, problemas fáciles de enunciar se revelan difíciles de resolver, lo cual exigen una gran dosis de creatividad para su solución.

Una de las dificultades que tienen los alumnos, una vez conocida la teoría, es identificar la fórmula adecuada para cada problema. Por esta razón, el aprendizaje de los conceptos básicos no debe ser hecho de manera mecánica, sólo limitándose a seguir el patrón de ciertos problemas tipos, sino procurar habituarse a realizar el análisis cuidadoso de cada problema, para así poder resolverlo de la manera más adecuada. El análisis combinatorio no es únicamente un juego de fórmulas complicadas, sino algo mucho más provechoso.

Actualmente, el análisis combinatorio no sólo trata de permutaciones, combinaciones y problemas asociados a ellos; también estudia otras técnicas, para resolver las diversas situaciones que se presentan relacionadas con el tema, como el principio de inclusión -exclusión, las gavetas de Dirichlet, las funciones generadoras, la teoría de Ramsey son algunos ejemplos de las técnicas poderosas del análisis combinatorio, el cual ha tenido un desarrollo increíble en las últimas décadas debido también en parte a las necesidades en la teoría de grafos (cuyo inicio queda señalado con la solución de Euler del Problema de los 7 puentes de Konigsberg) el Análisis de Algoritmos, la programación lineal, la estadística, etc. Muchos problemas pueden ser matemáticamente modelados como problemas de la Teoría de Grafos. Por ejemplo, problemas de investigación operacional y almacenamiento de información en bancos de datos de las computadoras; también problemas de matemática pura como en la teoría de grupos y de sus representaciones; asimismo el famoso problema de los 4 colores que guarda una íntima relación con la topología y muchas más.

En nuestro curso de razonamiento matemático, un campo de aplicación importante del análisis combinatorio es la solución de problemas de probabilidades las cuales serán tratados en el siguiente capítulo.

CONCEPTOS PREVIOS

Para llevar a cabo nuestro estudio, vamos a utilizar algunas herramientas tales como el factorial de un número y los números combinatorios. Adicionalmente estudiaremos el cofactorial de un número y la relación existente entre la función gamma y el factorial. Es importante tener clara la noción de los aspectos matemáticos mencionados, pues su conocimiento permitirá desenvolvernos con soltura en la parte operativa de la resolución de los problemas y ejercicios.

Lea atentamente los alcances teóricos y practique mucho, con empeño, hasta conseguir un dominio que le permita abordar con suma facilidad el presente capítulo.

Bien, empecemos!.

¿Qué es el factorial de un número?

Se define la factorial de un número n (n es un número entero y positivo), al producto indicado de los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta n inclusive. Esto se denota así: **n!**, $\underline{|n}$ o $\measuredangle n$.

Se lee de la siguiente forma: "Factorial de n o n factorial".

$$\boxed{n! = 1\times2\times3\times4\times\ldots\ldots\times(n-2)\times(n-1)\times n}\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por ejemplo:

Se lee:		Se expresa
4! : Factorial de 4	⇒	4! = 1×2×3×4
6! : Factorial de 6	⇒	6! = 1×2×3×4×5×6
7! : Factorial de 7	⇒	7! = 1×2×3×4×5×6×7

Ejemplo 1

Verifique la existencia o no existencia de cada una de las siguiente expresiones:

a. $\frac{3!}{2}$ **b.** $\left(\frac{3}{2}\right)!$ **c.** $-5!$

d. $(-5)!$ **e.** $\sqrt{7}\,!$ **f.** $\sqrt{7!}$

g. $1!+1!=2!$ **h**. $3!\times2!=(3\times2)!$

Resolución:

a. $\frac{3!}{2} = \frac{1\times2\times3}{2} = 3 \therefore$ Si existe $\frac{3!}{2}$

b. $\left(\frac{3}{2}\right)!$

En el caso **a** el símbolo ! afecta sólo al numerador, es decir a 3, siendo el cálculo pedido posible. Sin embargo no ocurre lo mismo en el caso **b**, pues el símbolo! afecta a la fracción $\frac{3}{2}$ y el factorial no está definido para esta clase de número.

$\therefore$ No existe $\left(\frac{3}{2}\right)!$

c. $-5!$ sí existe

d. $(-5)!$ no existe

La comparación de los casos **c** y **d** hace que la diferencia sea evidente; en el caso **d**, el factorial toma lo encerrado entre paréntesis que es -5 para el cual no está definido el factorial. En el caso **c**, el factorial sólo afecta al número 5, mas no al signo (–), es decir, el cálculo es posible.

En efecto: $-5! = -1\times2\times3\times4\times5 = -120$

e. $\sqrt{7}\,!$ no existe

pues $\sqrt{7} \notin \mathbb{Z}^+$

f. $\sqrt{7!}$ sí existe

$\sqrt{7!} = \sqrt{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7} = \sqrt{5040}$

g. $1! + 1! = 2!$

$1 + 1 = 1\times2$

$2 = 2$

Esto podría llevarnos a afirmar que $a!+b!=(a+b)!$ lo cual es falso pues se cumple para el caso dado y no para todos: $\underbrace{2! + 3!}_{8} = \underbrace{5!}_{120} \Rightarrow$ ¡Falso!

$8 \neq 120$

h. $3!\times2! = (3\times2)! \rightarrow$ ¡Falso!

$6 \times 2 \neq 6!$

$12 \neq 720$

De **g** y **h** concluimos:

$a! + b! \neq (a+b)!$; si $a \neq 1 \wedge b \neq 1$
$a! \times b! \neq (ab)!$; si $a \neq 1 \wedge b \neq 2$
$a \neq 1 \wedge b \neq 1$

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES DE UN FACTORIAL

Recordemos: si $n!=1\times2\times3\times...\times(n-2)\times(n-1)\times n$, entonces $5! = \underbrace{1\times2\times3\times4}_{4!}\times5$; luego, $5! = 4! \times 5$

$7! = \underbrace{1\times2\times3\times4\times5\times6}_{6!}\times7$; luego , $7! = 6!\times7$.

También, $7! = 5!\times6\times7$, del cual deducimos:

$$n! = (n-1)! \times n \ \forall n \geq 2$$

Esta última expresión adquiere importancia cuando se trata de simplificar expresiones, un tanto complicadas, que involucran el uso de factoriales.

Además $n!$ se puede desarrollar explícitamente según lo requiera el ejercicio específico. Por ejemplo:

$$n! = (n-2)! \times (n-1) \times n$$

O también: $n! = (n-3)! \times (n-2)\times (n-1) \times n$

Ejemplo 2

Simplifique: $A = \dfrac{13!+12!+11!}{12!+11!}$

Resolución:

Si tenemos en cuenta que $12!=11!\times12$ y además $13!=11!\times12\times13$, expresamos A en función del menor de los factoriales con el objetivo de simplificar. Veamos:

$$A = \frac{11!\times12\times13+11!\times12+11!}{11!\times12+11!}$$

Factorizando: $A = \dfrac{11![12\times13+12+1]}{11![12+1]}$

Simplificando y sumando:

$$A = \frac{12\times13+13}{13} \rightarrow A = \frac{13(12+1)}{13}$$

$\therefore A = 13$

Observación:

Se define por convención: $0! = 1$
Sabemos : $1! = 1$
En efecto, por el desarrollo parcial de un factorial sabemos:
$n!= (n-1)! \times n$ (en esta expresión calculamos para $n=1$)
luego: $1! = (1-1) \times 1$
$1! = 0! \times 1$
pero como $1! = 1$
entonces: $1 = 0! \times 1 \Rightarrow 0! = 1$

De lo anterior deducimos:

$$n!=1 \rightarrow n=0 \text{ ó } n=1$$

Aplicación

Halle la suma de los valores de $(x!)!$, si $(x-2)!=1$

Resolución:

$(x-2)!=1 \Rightarrow$
$x-2=0 \rightarrow x=2 \quad \therefore (2!)!=2!=2$
$x-2=1 \rightarrow x=3 \quad \therefore (3!)!=6!=720$

Luego la suma de los valores de $x!$ será:

$\therefore 720+2=722$

Observación:

A continuación mostramos el cálculo de los 10 primeros factoriales.

$1! = 1$
$2! = 1\times2 = 2$
$3! = 1\times2\times3 = 6$
$4! = 1\times2\times3\times4 = 24$
$5! = 1\times2\times3\times4\times5 = 120$
$6! = 1\times2\times3\times4\times5\times6 = 720$
$7! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7 = 5\,040$
$8! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8 = 40\,320$
$9! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9 = 362\,880$
$10! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10 = 3\,628\,800$

En el siguiente cuadro se comparan los valores de los 10 primeros factoriales y sus valores recíprocos:

n	n!	1/n!
1	1	1,000000
2	2	0,500000
3	6	0,166667
4	24	0,041667
5	120	$0,0^{2}83333$
6	720	$0,0^{2}\,13889$
7	5040	$0,0^{3}\,19841$
8	40 320	$0,0^{4}\,24802$
9	362 880	$0,0^{5}\,27557$
10	3 628 800	$0,0^{6}\,27557$

Observa que para 1/n!, se usa la forma abreviada al escribir los ceros después de la coma. Así:

$\frac{1}{8!} = 0,0^{4}24802$ significa: 0,000024802

¿Observas algo interesante en los resultados, a partir de 5! hacia adelante?

Creemos que si 5! termina en una cifra cero, al calcular 10!, notaremos que el resultado termina en dos ceros y 15!, en 3 ceros. Según lo anterior, ¿en cuántos ceros termina 80!? Para hallar la respuesta, concéntrate y analiza, no hace falta más conocimientos de los que hasta ahora tienes.

APLICACIONES DE LOS FACTORIALES:

Cantidad de ceros en que termina el factorial de n: $(n \geq 5)$

Para determinar la condición que nos permita determinar la cantidad de ceros finales de la factorial de n $(n \geq 5)$, analicemos algunos ejemplos:

$1500 = 3\times5^{3}\times2^{2} \rightarrow$ N° de ceros = 2 = Exponente del 2

$2200 = 11\times5^{2}\times2^{3} \rightarrow$ N° de ceros = 2 = Exponente del 5

De lo anterior, deducimos que la cantidad de ceros depende directamente del exponente de 2 o de 5; en forma más explícita podemos afirmar que la cantidad de ceros está dado por el menor exponente del factor 2 o del factor 5.

Entonces:

$$N = \ldots\times2^{\alpha}\times5^{\beta}\times\ldots \Rightarrow \text{N° de ceros} = \begin{cases} \alpha\,;\ \alpha < B \\ \beta\,;\ \beta < \alpha \end{cases}$$

Con respecto de una factorial, se aplica el mismo criterio anterior. Ahora el nuevo problema que se presenta es como determinar el exponente del factor 2 o del factor 5.

Haciendo un primer análisis notamos que el menor exponente le corresponde al factor 5. Ahora, ¿cómo determinamos el exponente del factor 5?.

Veamos el siguiente ejemplo:

$15! = 1\times2\times3\times4\times(5)\times6\times7\times8\times9\times(10)\times11\times12\times13\times14\times(15)$

$15! = \ldots\ldots\times5\times\ldots\ldots\times5\times\ldots\ldots\times5$

$15! = \ldots\ldots\times5^{3}\times\ldots\ldots \Rightarrow$ N° de ceros = 3

Una regla práctica sería aplicar divisiones sucesivas:

15 |5
– ③ ⟶ nº de ceros en que termina 15!

Ejemplo:
Determine en cada caso en cuantos ceros termina cada factorial:

a. 23! b. 78! c. 130! d. 700!

Resolución:

a. $23! = \overline{\ldots\ldots 00}$
$\underbrace{\qquad}_{x \text{ cifras cero}}$

Aplicando divisiones sucesivas:

23 |5
3 ④ ⟶ nº de ceros = x = 4

b. $78! = \overline{\ldots\ldots 00}$
$\underbrace{\qquad}_{x \text{ cifras cero}}$

Aplicando divisiones sucesivas:

78 |5
3 ⑮ |5
– ③ ⟶ nº de ceros = x = 15 + 3 = 18

c. $130! \ \overline{\ldots\ldots 00}$
$\underbrace{\qquad}_{x \text{ cifras cero}}$

Aplicando divisiones sucesivas:

130 |5
– ㉖ |5
1 ⑤ |5
– ① ⟶ nº de ceros = x = 26 + 5 + 1 = 32

d. $700! = \overline{\ldots\ldots 00}$
$\underbrace{\qquad}_{x \text{ cifras cero}}$

Aplicando divisiones sucesivas:

700 |5
– (140) |5
– ㉘ |5
3 ⑤ |5
– ① ⟶ nº de ceros = x = 140 + +28 + 5 + 1 = 174

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1
Halle la suma de cifras de $(2x)!$ si $(x+1)!=24$

Resolución:
$(x+1)! = 24 = 1\times2\times3\times4$
$(x+1)! = 4!$ de lo cual se deduce: $x+1 = 4$
$\therefore x = 3$
Buscamos $(2x)! = 6! = 720$
Nos pide la suma de cifras: $7 + 2 + 0 = 9$

Ejercicio 2
Calcule a en:

$$\frac{a!+(a+1)!+(a+2)!}{a!} = \frac{a!+(a+1)!}{a}$$

Resolución:

$$\frac{a!+a!\times(a+1)+a!(a+1)(a+2)}{a!} = \frac{a!+a!\times(a+1)}{a}$$

$$\frac{\cancel{a!}[1+(a+1)+(a+1)(a+2)]}{\cancel{a!}} = \frac{a![1+(a+1)]}{a}$$

$$a\times[(a+2)+(a+1)(a+2)] = a![a+2]$$

Factorizando:

$$a\times(a+2)[1+(a+1)] = a![a+2]$$
$$a(a+2) = a!$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$4\times6 = 4!$$
$$\therefore a = 4$$

Ejercicio 3

Calcule:

$$E=\frac{((3!)!)!\ +\ 719!}{721!}+\frac{359}{(3!)!}$$

Resolución:

$((3!)!)! = ((6)!)! = 720!$

Luego: $E=\dfrac{720!\ +\ 719!}{721!}+\dfrac{359}{6!}$

$$E=\frac{719!\times 720\ +\ 719!}{719!\times 720\times 721}+\frac{359}{720}$$

$$E=\frac{719![720+1]}{719!\times 720\times 721}+\frac{359}{720}=\frac{1}{720}+\frac{359}{720}$$

$$\therefore\ E=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4

Calcule el valor de A en:

$$A=\frac{(6!)^2}{4!+5!}$$

Resolución:

$$A=\frac{(6!)\times(6!)}{4!+4!(5)}=\frac{\cancel{4!}\times 5\times 6\times 6!}{\cancel{4!}(1+5)}=\frac{\cancel{6}\times 5\times 6!}{(\cancel{6})}$$

$\therefore\quad A = 5\times 6! = 3\,600$

Ejercicio 5

Reduzca: $I=\dfrac{8!-7!}{7!-6!}$

Resolución:

$$I=\frac{7!\times 8-7!}{6!\times 7-6!}=\frac{7!(8-1)}{6!(7-1)}=\frac{7!\times 7}{6!\times 6}=\frac{\cancel{6!}\times 7\times 7}{\cancel{6!}\times 6}$$

$$\therefore\ I=\frac{49}{6}$$

¿Qué es la cofactorial o semifactorial de un número?

($n!!$ o $\underline{\underline{|n}}$)

La definición de cofactorial de un número entero positivo dependerá de la naturaleza de éste es decir, si el número es par o impar.

Así:

Se define:

$$n!! = 2\times 4\times 6\times 8\times 10\times\ldots\times(n-2)\times n$$

$\forall$ n pertenece al conjunto de los números pares positivos.

Ejemplos:

$6!! = 2\times 4\times 6 = 48$

$8!! = 2\times 4\times 6\times 8 = 384$

También se define:

$$n!! = 1\times 3\times 5\times 7\times 9\times\ldots\times(n-2)\times n$$

$\forall$ n pertenece al conjunto de los números impares positivos.

Ejemplos: $5!! = 1\times 3\times 5 = 15$

$7!! = 1\times 3\times 5\times 7 = 105$

Relación entre la cofactorial y la factorial

Nos planteamos la tarea de encontrar una relación entre n!! y n! en los siguientes casos:

a. Cuando n es par.

b. Cuando n es impar.

Veamos:

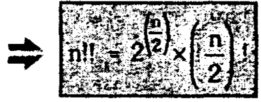
a. **Si n es par**, $n!!=2\times 4\times 6\times 8\times 10\times\ldots\times n$

$$n!!=(1\times 2)(2\times 2)(2\times 3)(2\times 4)(2\times 5)\times\ldots\times\left(2\times\frac{n}{2}\right)$$

Agrupando los factores 2 y contabilizándolos tendremos:

$$n!!=\underbrace{(2\times 2\times 2\times 2\times\ldots\times 2\times 2)}_{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ factores}}\underbrace{(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\ldots\times\frac{n}{2})}_{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Luego: $n!! = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$



$\Rightarrow n!! = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \times \left(\frac{n}{2}\right)!$ para todo n par.

b. Si n es impar:

De la definición tenemos:

$n!! = 1\times3\times5\times7\times9\times....\times(n-4)(n-2)n$

ahora multiplicando y dividiendo por $2\times4\times6\times8\times.....\times(n-3)(n-1)$, tendremos:

$$n!! = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times...\times(n-3)(n-2)(n-1)n}{2\times4\times6\times8\times10\times...\times(n-3)(n-1)} ...(\alpha)$$

Observa bien el denominador. ¿Te das cuenta de la forma que tiene?. Aquí tenemos que recordar la definición de semifactorial de un número par; además como n es impar, entonces "n-1"; "n-3"; "n-5"; .... etc. son números pares. Luego:

$2\times4\times6\times8\times10\times..........(n-3)(n-1) = (n-1)!!$

Del caso a deducimos:

$$(n-1)!! = 2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!$$

Reemplazando este último resultado en (α) y por la definición de factorial de un número en el numerador tendremos:

$$n!! = \frac{n!}{2^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times \left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$ para todo "n" impar

Ejemplo 1

Exprese las siguientes cofactoriales en función de factoriales:

a. 50!! **b.** 51!!

Resolución:

a. $50!! = 2^{25} \times (25!)$

b. $51!! = \dfrac{51!}{2^{25} \times 25!}$

Ejemplo 2

Reduzca:

$$M = \frac{2!!(2!! + 3!! + 4!! + 5!!)}{2(3!!) + 4!!}$$

Resolución:

$$M = \frac{2[2 + 1\times3 + 2\times4 + 1\times3\times5]}{2(1\times3) + 2\times4}$$

$$M = \frac{2(2+3+8+15)}{2\times3+2\times4}$$

$$M = \frac{2\times28}{14}$$

$\therefore M = 2 \times 2 = 4$

Ejemplo 3

Halle la suma de cifras de $(x+2)!!$ si:

$$\frac{2\times10!! + 12!! + 14!!}{12!! + 10!!} = (x!)^2 - 4.(x!) + 2$$

Resolución:

Sabemos que $12!! = 10!! \times 12$

$14!! = 10!! \times 12 \times 14$

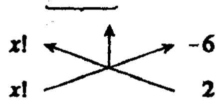
Reemplazamos y factorizamos:

$$\frac{2\times10!! + 10!!\times12 + 10!!\times12\times14}{10!!\times12 + 10!!} = (x!)^2 - 4.(x!) + 2$$

$$\frac{10!![2 + 12 + 12\times14]}{10!![12+1]} = (x!)^2 - 4.(x!) + 2$$

Simplificando y efectuando operaciones queda:

$$\frac{182}{13} = (x!)^2 - 4(x!) + 2 \Rightarrow (x!)^2 - 4(x!) - 12 = 0$$



Luego $(x!-6)(x!+2)=0$

Igualando a cero cada factor.

I. $x!-6=0 \rightarrow x!=6 \Rightarrow x!=3! \quad \therefore x=3$

II. $x!+2=0 \rightarrow x!=-2 \quad \therefore$ x no existe

De I: $x = 3$

Buscamos $(x + 2)!! = (5)!! = 1\times3\times5 = 15$

Finalmente nos pide la suma de cifras de 15.

$\therefore \sum_{cifras} = 1+5 = 6$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

Con este título presentamos las herramientas básicas que nos permitirán calcular el número de elementos de conjuntos formados de acuerdo a ciertas reglas, sin necesidad de enumerar sus elementos.

Estas son:

a. Principio de adición.

b. Principio de multiplicación.

c. Principio de Inclusión - Exclusión

Imaginemos el inicio de la actividad de contar. "Hace mucho tiempo, en la prehistoria, el hombre no necesitaba contar. No tenía que hacerlo para cazar los animales a los que utilizaba para comer y vestirse, aunque en su mente revoloteaba ya la idea de "pocos" y "muchos". Como no conocía ni las cosas, ni las semanas, ni los meses, no necesitaba llevar la cuenta. Sin embargo, llegó el momento en que necesitó hacerlo, y fueron los dedos los primeros símbolos que se usaron como "número".

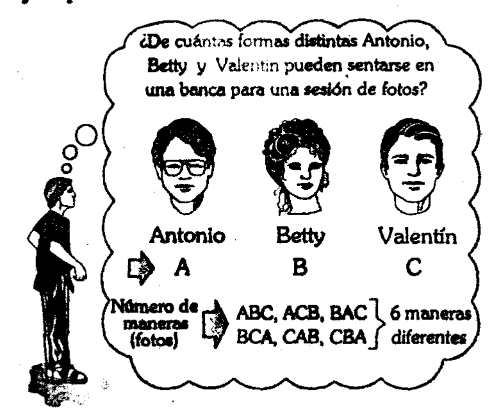
Así, al principio el hombre contaba con sus dedos; puesto que tenía diez, contaba las cosas de diez en diez. Contaba diez dedos y luego volvía a empezar de nuevo. Luego utilizó piedras o hizo muescas en un palo y marcas en una roca, para llevar el control de las cosas contadas. Este hizo más fácil el conteo de objetos en mayor cantidad.

Contar es algo realmente maravilloso y sumamente importante; revela el alto grado de abstracción y desarrollo logrado por el cerebro humano.

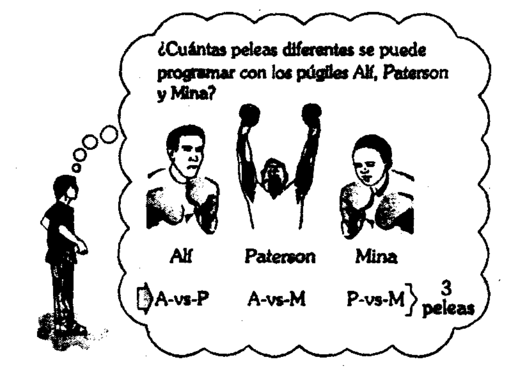
La necesidad de resolver problemas relacionado con la teoría de probabilidades, y mucho antes con el desarrollo del binomio de Newton y la teoría de grafos iniciado por Euler, hizo que la forma usual de conteo fuera superada por nuevas técnicas de conteo más eficaces.

Empezaremos el estudio con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1



Ejemplo 2



De los ejemplos anteriores, dado un evento en particular (tomar foto a tres personas sentadas en una banca o formar pareja para una pelea de box), nos interesa conocer todas las maneras distintas en que dicho evento puede ocurrir; esto implica llevar a cabo el evento de todas las formas posibles y luego contar la cantidad total de maneras en que puede ocurrir.

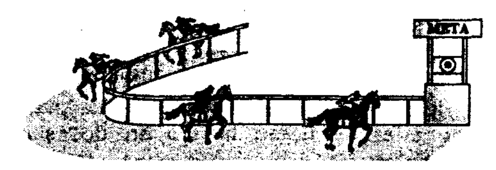
El proceso de conteo, sin embargo, podría resultar tedioso. Imaginemos que vamos al hipódromo a mirar las carreras de caballos; donde usualmente se hace apuestas como la dupleta, vale triple, cuádruple, etc., y participamos en el juego del vale triple. Este juego consiste en acertar en el pronóstico de qué caballos llegarán en primer, segundo y tercer lugar en una carrera determinada. (Se asume que no hay empates en el orden de llegada).

En esta oportunidad participan 7 caballos numerados desde el 1 hasta el 7 y sin hacer ningún estudio de quienes son los favoritos, ni que distancia se va a correr, asumimos que todos tienen igual oportunidad de vencer, y apostamos al vale triple siguiente:

1°P	2°P	3°P
7	2	5

con la esperanza de ganar el premio.

Pero.... ¿de cuántas maneras distintas puede ocuparse los 3 primeros puestos en esta carrera?



Supongamos que llegaron, los caballos 1, 2 y 3 en el siguiente orden:

1°P	2°P	3°P
1	2	3

; aunque podrían haber llegado en cualesquiera de las siguientes posiciones:

1°P	2°P	3°P
1	2	3

1°P	2°P	3°P
2	3	1

1°P	2°P	3°P
2	1	3

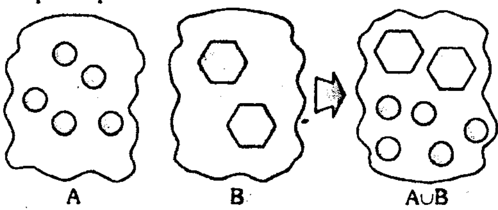
1°P	2°P	3°P
3	1	2

1°P	2°P	3°P
3	2	1

Como consideramos a los caballos 1, 2 y 3, hay 6 maneras distintas; y si consideramos a los caballos 1, 2 y 4 ó a 1, 2 y 5 ó a 1, 2, 6, ó a 1, 2 y 7 ó a 1, 3 y 4 .... etc. Al señalar todas las posibilidades y luego hacer el conteo, sería algo realmente aburrido y tedioso. Por lo tanto, se necesita conocer y aplicar otras técnicas especiales de conteo. Dichas técnicas son las denominadas "**principios fundamentales de conteo**". En el problema de la carrera de caballos, para dar respuesta a la pregunta planteada, haremos uso, más adelante, de una técnica de conteo denominada "Principio de Multiplicación".

Las operaciones aritméticas son también motivadas y aprendidas por los niños a través de sus aplicaciones a los problemas de conteo. Por ejemplo, la operación de adición es siempre introducida en conexión con un problema de conteo. Veamos:

De un grupo de bloques lógicos, pedimos a un niño que tome 5 círculos y a otro niño, 2 exágonos. Luego que los junten; inmediatamente después que cuenten el total.



Aquí en la figura ilustramos un principio básico de conteo denominado "Principio de Adición. El conjunto A tiene 5 elementos y el conjunto B, 2 elementos, observándose que el conjunto A∪B posee 5+2=7 elementos.

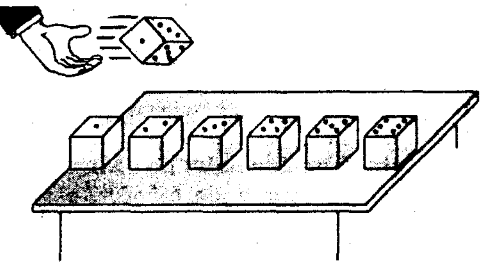
A continuación estudiaremos los principios fundamentales de conteo mencionados hasta ahora:

- Principio de Adición
- Principio de Multiplicación
- Principio de Inclusión–Exclusión

PRINCIPIO DE ADICIÓN

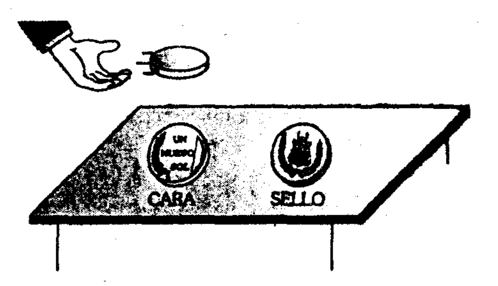
Tomemos un dado y una moneda normal. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener si lanzamos el dado o si lanzamos la moneda?. Veamos que sucede:

Consideremos el lanzamiento del dado como un primer evento y el lanzamiento de la moneda como un segundo evento.


1° Evento: Hay 6 posibles resultados

Aquí se muestra todos los posibles resultados del lanzamiento de un dado.

Ahora, si lanzamos la moneda:



2° Evento: Hay dos posibles resultados

En la mesa se aprecia los dos posibles resultados al lanzar una moneda.

Luego, podemos apreciar que el número total de resultados distintos que se puede obtener al lanzar el dado o la moneda es ocho.

Dicha cantidad puede calcularse fácilmente, así:

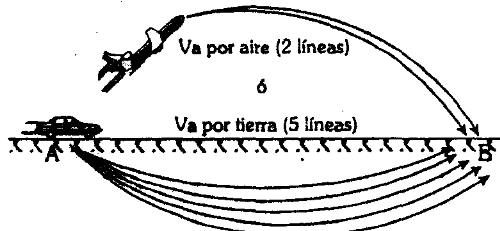
$$\underbrace{2}_{\text{N° resultados posibles al lanzar la moneda}} + \underbrace{6}_{\text{N° resultados posibles al lanzar el dado}} = 8$$

Para hallar la respuesta hemos hecho uso de la operación de adición, y al aplicar dicha operación hemos contado el número total de resultados según la pregunta. Podemos ahora enunciar en base a este ejemplo sencillo el Principio de Adición.

Principio de Adición (0)
Si un evento designado como A ocurre de n maneras diferentes y otro evento B ocurre de m maneras distintas, entonces A o B (en sentido excluyente) ocurren de m+n formas diferentes. En el principio de adición, o bien ocurre un caso o bien ocurre el otro caso, mas nunca pueden ocurrir simultáneamente.

Ejemplo 1
Ana desea viajar de Chiclayo a Tumbes y tienen a su disposición 2 líneas aéreas y 5 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje?

Resolución:



Ana puede elegir viajar por aire o por tierra; pero, evidentemente, no puede elegir viajar por ambas vías (terrestre y aérea) simultáneamente (nadie puede estar al mismo tiempo en dos sitios diferentes).

Luego:

$$\underbrace{\overset{\text{Evento A}}{\text{viajar por aire}}}_{2 \text{ líneas}} \quad \text{o} \quad \underbrace{\overset{\text{Evento B}}{\text{viajar por tierra}}}_{5 \text{ líneas}}$$

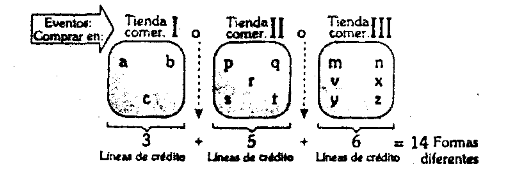
$$2 + 5 = 7$$

∴ Ana puede realizar el viaje de 7 maneras diferentes.

Ejemplo 2
Jorge consulta en tres tiendas comerciales para comprar un televisor, donde le ofrecieron 3, 5 y 6 líneas de crédito, respectivamente, todas diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede adquirir su TV escogiendo una de las líneas de crédito?

Resolución:

Observemos que Jorge puede adquirir el televisor en cualquiera de las tres tiendas (I o II o III)



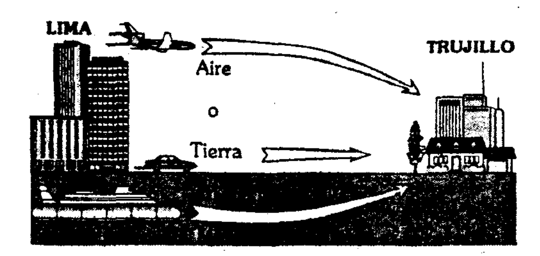
Observación:

- El principio de adición, enunciado aquí sólo será aplicable para eventos mutuamente excluyentes; es decir, para aquellos eventos que no pueden ocurrir simultáneamente; por ejemplo, los eventos I, II y III del problema anterior. También se extiende su aplicación para aquellos eventos que no pueden ocurrir consecutivamente, es decir uno a continuación del otro.
- Habiendo entendido la idea central planteada en el principio de adición, podemos generalizar la aplicación de dicho principio para más de dos eventos, todos ellos mutuamente excluyentes entre sí.

Ejemplo 3

Una persona desea viajar de Lima a Trujillo. Para ello dispone de 2 líneas aéreas, 2 líneas terrestre y 1 ruta marítima. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar su viaje?

Resolución:

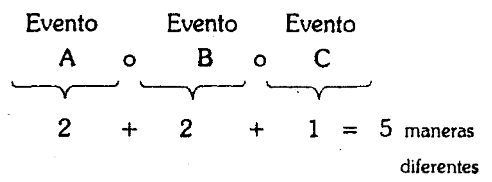


Es evidente que si la persona elige viajar por línea aérea, entonces ya no viaja por línea terrestre ni por mar, y viceversa. Es decir, los eventos A, B y C son excluyentes (A o B y C).

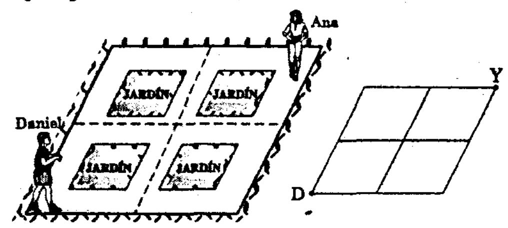
Evento A : Viajar por aire (De 2 maneras ≠)

Evento B : Viajar por tierra (De 2 maneras ≠)

Evento C : Viajar por mar (De 1 sola manera)



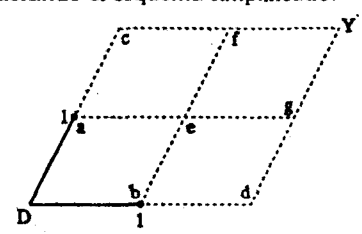
Ejemplo 4



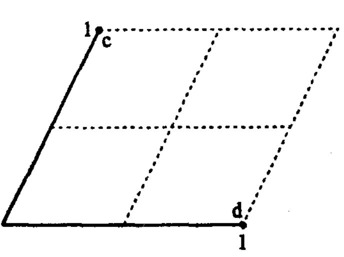
En la figura se muestra un parque pequeño, donde se encuentran Daniel y Ana. Un esquema simplificado de dicha situación se muestra al lado derecho. ¿De cuántas maneras diferentes puede ir Daniel hasta donde se encuentra Ana siempre avanzando por la vereda y sin pisar los jardines?

Resolución:

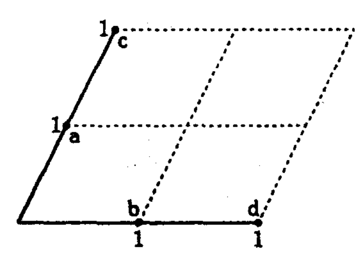
Considerando el esquema simplificado.



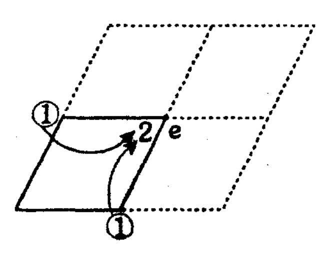
Si va hacia b hay un camino que lo lleva hasta allí. Si elige ir hacia a, hay también un camino que lo lleva a dicho punto.



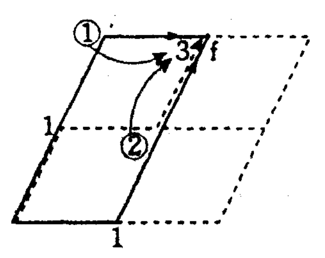
Análogamente si va hacia d o c. La numeración indica el número de caminos que lo llevan hasta los puntos indicados.



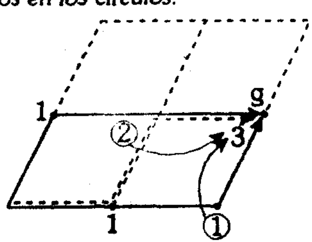
Aquí mostramos un resumen de lo logrado hasta ahora.



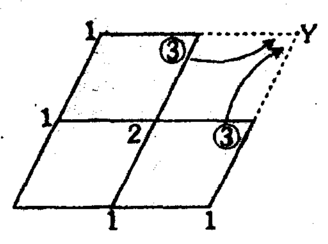
Se llega hasta e de dos maneras, es decir, por dos caminos distintos. Si sumamos los números de los círculos que están en las esquinas, obtenemos dicho resultado.



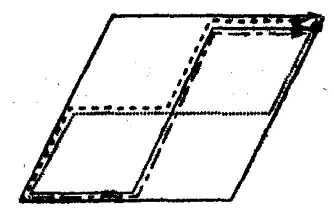
Para llegar hasta f, puedes hacerlo de 3 maneras diferentes, según los 3 caminos indicados en el gráfico. Obtenemos 3 si sumamos los números encerrados en los círculos.



Si desea llegar hasta g, el dibujo muestra los 3 caminos distintos que lo conducen hasta allí. (Otra vez sumamos los números de las esquinas).



Aquí podemos apreciar lo que hemos avanzado hasta ahora. Luego deducimos que para llegar hasta Ana puede hacerlo de 3+3=6 maneras distintas.

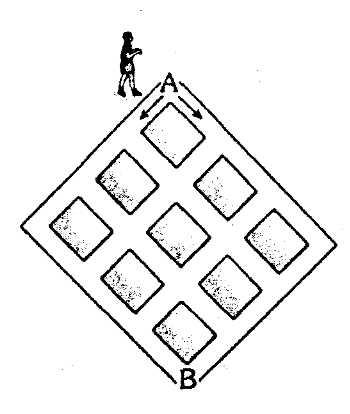


Hemos sumado finalmente los números de las esquinas como se muestra en la figura anterior.

Luego, Daniel puede llegar hasta Ana de 6 maneras distintas en total.

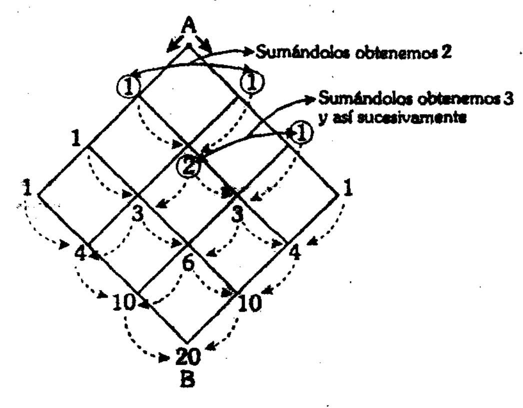
Ejemplo 5

¿De cuántas maneras diferentes Carlos puede ir de A hacia B, según la gráfica, si sus movimientos son indicados por las flechas?



Resolución:

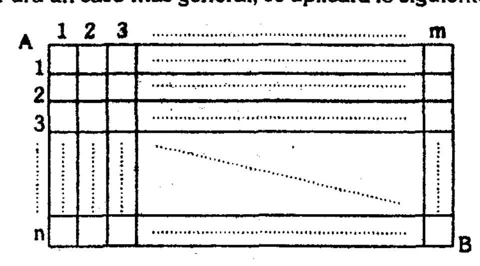
Trataremos el esquema de la situación descrita en el problema, y apliquemos las conclusiones obtenidas del ejemplo anterior.



Concluimos que Carlos puede llegar desde A hasta B -sin retroceder- de 20 maneras distintas.

Método Práctico

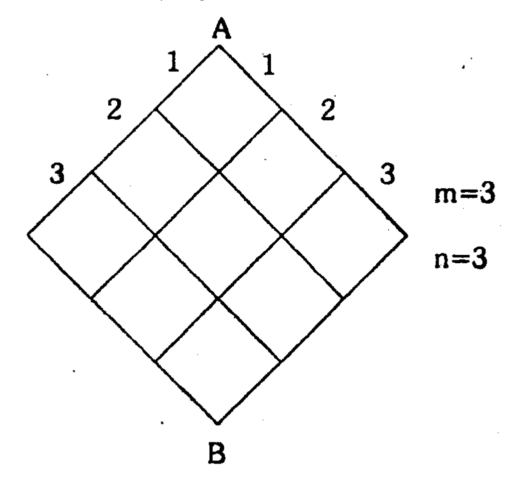
Para un caso más general, se aplicará lo siguiente:



Si cada línea representa un camino, y si queremos averiguar de cuántas maneras distintas se puede ir "A" hasta "B" sin retroceder, aplicaremos lo siguiente:

$$\text{N° maneras para ir de "A" a "B"} = \frac{(m+n)!}{m! \times n!}$$

Para nuestro ejemplo:



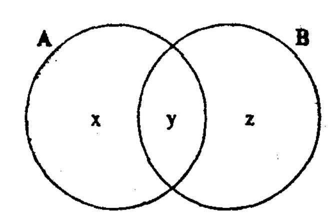
$$\text{N° maneras para ir de "A" a "B"} = \frac{(3+3)!}{3! \times 3!} = \frac{6!}{3! \times 3!}$$

$$= \frac{\not{6} \times 5 \times 4 \times \not{3}!}{\not{3}! \times \not{3}!} = 20$$

Principio de inclusión-exclusión

Para establecer la idea del principio de adición se hizo la referencia de que el número de elementos de la unión de dos conjuntos diferentes era la suma del número de elementos de cada conjunto. Sin embargo, los conjuntos no siempre son disjuntos. Para contar el número de elementos que pertenecen a la unión de varios conjuntos, no necesariamente diferentes, hacemos uso del *Principio de inclusión- exclusión* que en su versión más simple establece que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



En efecto:

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = (x+y) + (y+z) - y$
$= x+y+z$
$= n(A \cup B)$

Ejemplo 6

¿Cuántos números enteros entre 1 y 1 000 son divisibles por 3 ó 7?

Resolución:

Aplicando del principio de inclusión-exclusión

Consideremos:

A : Conjunto de enteros entre 1 y 1 000 que son divisibles por 3.

B : Conjunto de enteros entre 1 y 1 000 que son divisibles por 7.

Lo que nos pide es calcular $n(A \cup B)$ (Número de elementos de $A \cup B$)

Tenemos:

$n(A) = \left[\!\left[\frac{1000}{3} \right]\!\right] = 333$ ([ ]: Máximo entero)

$n(B) = \left[\!\left[\frac{1000}{7} \right]\!\right] = 142$

$n\ A \cap B = \left[\!\left[\frac{1000}{21} \right]\!\right] = 47$ (Pues $A \cap B$ es el conjunto de enteros entre 1 y 1 000 que son divisibles por 3 y 7, es decir, divisibles por 21).

Por el principio de inclusión-exclusión sabemos que:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 333 + 142 - 47 = 428$

Entonces hay 428 números que satisfacen la condición pedida.

La Reserva de Polen

En el punto A se encuentra una abeja y en el punto B una reserva de polen. ¿De cuántas maneras diferentes puede la abejita llegar a la reserva, teniendo en cuenta que no debe retroceder respecto de su meta?

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Ejemplo 1

Jazmín ha recibido en su cumpleaños 1 falda roja, una azul y otra verde; además le obsequiaron una blusa blanca y otra crema. Si desea probarse las prendas recibidas, ¿de cuántas maneras distintas puede lucirlas, si se pone falda y blusa?

Resolución:

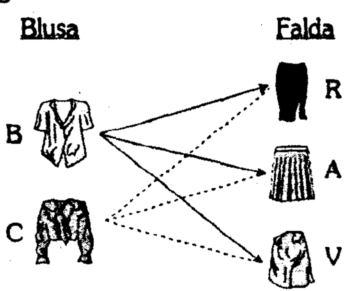
Ella puede comenzar eligiendo la falda, por ejemplo, y para ello puede escoger cualquiera de las 3 que ha recibido; una vez escogida la falda deberá decidir cual de las 2 blusas se pondrá.

Describamos la situación como sigue:

Faldas: {Roja, Azul, Verde}

Blusas: {Blanca, Crema}

Para probarse falda y blusa juntas podría hacerlo de la siguiente forma:



Los juegos serían:

$\begin{Bmatrix}(B,R),(B,A),(B,V)\\(C,R),(C,A),(C,V)\end{Bmatrix}$ 6 maneras distintas

Luego:

Diremos: Jazmín se pone $\underbrace{\text{blusa}}$ y $\underbrace{\text{falda}}$

Anotando las cantidades: 2 × 3 = 6

formas distintas en la presentación de las prendas.

Estamos viendo entonces que tenía dos maneras distintas de elegir la blusa y para cada una de las 2 maneras había 3 maneras de escoger la falda por esto el total de formas de vestirse se obtenía multiplicando los valores dados.

Ejemplo 2

Elvis posee 3 camisas, 3 pantalones y 2 pares de zapatos, todas prendas diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede lucir una vestimenta constituida por camisa, pantalón y zapatos?

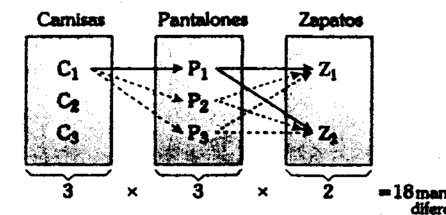
Resolución:

Evento A: Elige la camisa (3 formas ≠)

Evento B: Elige el pantalón (3 formas ≠)

Evento C: Elige un par de zapatos (2 formas ≠)

Nótese que Elvis para lucir una vestimenta debe realizar los tres eventos (A, B y C), uno seguido del otro.



Así:

Aplicando el principio de multiplicación, hemos obtenido como resultado que Elvis puede vestirse con las prendas mencionadas de 18 maneras distintas en total.

Ejemplo 3

Recordemos el problema de la carrera de caballos en el hipódromo: "Siete caballos participan en una carrera. ¿De cuántas maneras distintas pueden ocupar los tres primeros puestos si no ocurren empates en el orden de llegada?"

Resolución:

Para resolver el problema, vamos a utilizar un esquema como el que se muestra a continuación:

1°P	2°P	3°P

Como todos los caballos tienen igual oportunidad de vencer, entonces el primer puesto puede ser ocupado por cualquiera de los 7 participantes; luego escribimos 7 en el casillero correspondiente al primer puesto.

Veamos:

1°P	2°P	3°P
7		

Ahora, una vez ocupado el primer puesto quedan 6 caballos y cualquiera de ellos puede llegar en 2° lugar; escribimos entonces 6 en el casillero correspondiente al 2° puesto. Así:

1°P	2°P	3°P
7	6	

El tercer puesto lo ocupará cualquiera de los 5 caballos restantes; así que escribimos 5 en el 3er casillero:

1°P	2°P	3°P
7	6	5

Aplicando el principio fundamental, concluimos: $7\times6\times5=210$

Hay 210 maneras distintas en que los siete caballos que participan en la carrera ocupen los tres primeros puestos sin que ocurra empates en el orden de llegada.

Sin hacer uso de los recuadros podríamos haber puesto: $\frac{1°P}{7} \times \frac{2°P}{6} \times \frac{3°P}{5} = 210$ que como ya sabemos, es la respuesta.

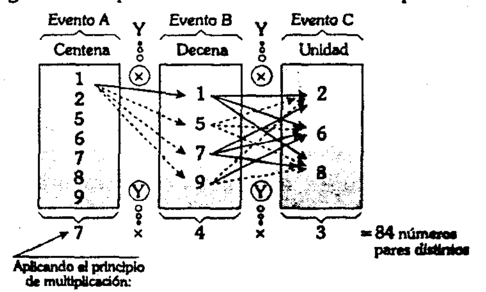
Ejemplo 4

¿Cuántos números pares de la forma $\overline{abc}$ pueden escribirse con los dígitos 1, 2, 5, 6, 7, 8 y 9 si las cifras pueden repetirse y la cifra de decena es impar?

Resolución:

Para que sea un número par de tres cifras, el dígito de las unidades debe ser necesariamente par. Además por condición del problema, las cifras pueden repetirse y la cifra de las decenas debe ser impar.

Luego, la cifra de las centenas es una cualquiera de los siete elementos de {1;2;5;6;7;8;9}; mientras que la cifra de las decenas sólo puede considerarse del conjunto: {1;5;7;9} sin olvidar que la cifra de las unidades sólo puede ser una cualquiera tomada del conjunto {2;6;8}. El siguiente esquema ilustra la situación expuesta.

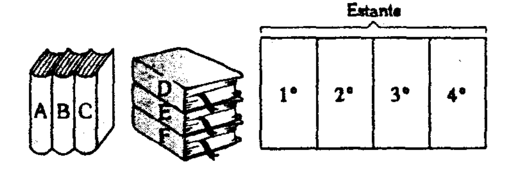


Entonces, bajo las condiciones establecidas habrán 84 números que las cumplen.

Ejemplo 5

Se tiene seis libros diferentes de razonamiento matemático. ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse en un estante donde sólo entran cuatro libros?.

Resolución:



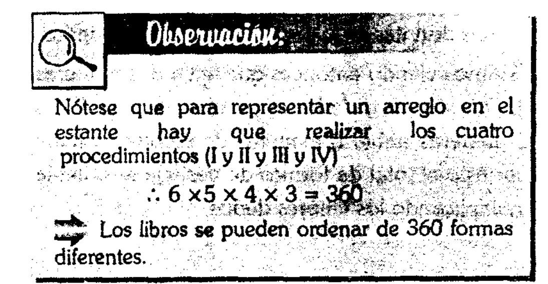
Veamos:

Evento I : Elige un libro para el 1er. casillero (6 formas diferentes)

Evento II : Elige un libro para el 2do. casillero (5 formas diferentes)

Evento III : Elige un libro para el 3er. casillero (4 formas diferentes)

Evento IV : Elige un libro para el 4to. casillero (3 formas diferentes)



Nótese que para representar un arreglo en el estante hay que realizar los cuatro procedimientos (I y II y III y IV)

$$\therefore 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

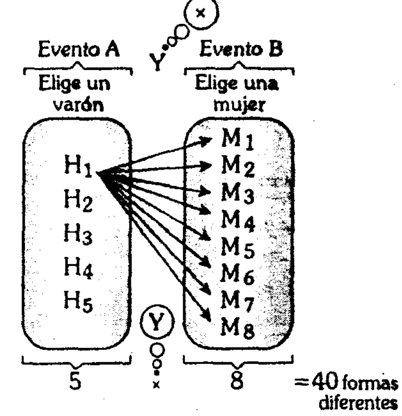
⇛ Los libros se pueden ordenar de 360 formas diferentes.

Ejemplo 6

Con cinco varones y ocho señoritas, ¿cuántos equipos de natación diferentes pueden formarse si estos deben ser mixtos y de dos integrantes?

Resolución:

Los equipos de natación deben ser mixtos, es decir, formados por un hombre y una mujer.



Luego, puede formarse 40 equipos distintos de natación mixtos y de dos integrantes.

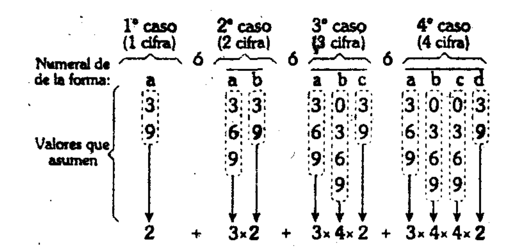
A continuación pondremos un ejemplo en el que se utiliza los 2 principios fundamentales del análisis combinatorio.

Ejemplo 7

¿Cuántos números enteros impares positivos menores que 10 000 puede formarse usando las cifras 9, 6, 3 y 0?

Resolución:

Tenemos que ser cuidadosos, debemos leer bien el problema y comprender lo que se está pidiendo. De acuerdo a lo dicho en el problema, existe números menores que 10 000 que pueden ser números con 1 cifra, con 2, con 3 o con 4 cifras por lo cual deberemos de considerar esos casos separadamente.



Luego, el número total de enteros impares que cumple la condición: $2+6+24+96=128$

Como puedes ver, hemos aplicado el principio de multiplicación para cada caso y luego hemos sumado aplicando el principio de adición.

TÉCNICAS DE CONTEO

La búsqueda de técnicas de conteo está directamente ligada a la historia de la matemática y a la forma por la cual las personas tienen su primer contacto con esta disciplina. Por ejemplo, puede observarse en el desarrollo de un niño que la primera técnica matemática aprendida por la criatura es el contar; es decir, enumerar los elementos de un conjunto de tal forma que determine cuántos son sus elementos. Esto ocurre, por ejemplo, cuando con ayuda de sus padres aprende cuántos juguetes hay en su corralito o cuántos dedos tiene en su mano, etc. Las técnicas de conteo que estudiaremos son:

I Permutaciones
- P. lineales
- P. circulares
- P. con elementos repetidos

II Combinaciones
- C. simple
- C. con elementos repetidos

Por lo general iniciaremos el estudio de cada una de las técnicas de conteo con un ejemplo sencillo del cual deduciremos la expresión matemática (fórmula) que podrá ser aplicada en otros casos.

Te aconsejamos leer con mucha atención los aspectos teóricos que se brinda a continuación y los ejemplos que los acompañan, pues su cabal comprensión servirá de ayuda cuando ingreses a la sección de problemas resueltos y propuestos así como en el capítulo de probabilidades.

PERMUTACIONES

Ejemplos:

- Consideremos las cifras: 1; 2; 3 ¿De cuántas maneras diferentes es posible ordenar las 3 juntas en línea recta?

  Llevemos a cabo las ordenaciones: 123, 132, 231, 213, 321, 312

Como podemos ver, hay 6 posibles ordenaciones (a cada uno de ellos se le denomina *permutación*)

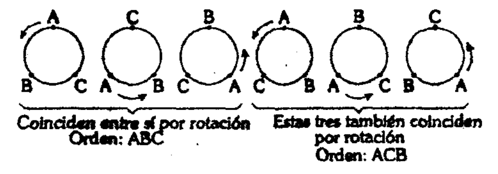
¿Y si hubiésemos considerado los números 1; 2; 3; 4; 5 para ordenarlas en línea recta pero tomándolos de 3 en 3, cómo procederíamos para calcular el número total de formas distintas de hacerlo?

- Tomemos ahora en consideración la palabra: NENA
  ¿Cuántas ordenaciones lineales distintas pueden formarse con todas sus letras?
  Veamos:

  NENA NNAE
  NANE NNEA
  ENAN ENNA
  ANEN ANNE
  NAEN AENN
  NEAN EANN

  Hay 12 ordenaciones distintas. ¿Habrá otra forma de calcular este número directamente sin estar escribiendo todas las ordenaciones de la palabra dada?
  Notemos que en la palabra NENA hay dos letras N; es decir: la letra N se repite. Aquí lo que hemos realizado en una ordenación con un elemento repetido (permutación con elementos repetidos).

- Ana, Bea y Cárol juegan a la ronda ¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse?
  Veamos:



Luego, hay 2 formas ACB y ABC. Este es un ejemplo de ordenamiento *circular*.

En estos ejemplos hemos querido hacer notar las formas de ordenar elementos, todos diferentes o algunos repetidos ya sea lineal o alrededor de un objeto, es decir, circularmente. Luego:

¿Qué son Permutaciones?
Son los diferentes arreglos u ordenaciones que se puede formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto.
En toda permutación, la característica principal es el oden de sus elementos. Y debido a esto una permutación es diferente de otra cuando el orden de sus elementos es distinto.

Estudiaremos las siguientes clases de permutaciones:

a. Permutaciones lineales
b. Permutaciones circulares
c. Permutaciones con elementos repetidos

Permutaciones lineales

Se da cuando los elementos considerados son todos distintos y se arreglan u ordenan en línea recta. Por ejemplo cuando un grupo de alumnos se ponen en línea para tomarse una foto o cuando se coloca libros distintos alienados en un estante.

Recordemos que las ordenaciones de las cifras: 1,2 y 3 juntas y en línea recta eran 6, pues teníamos 3 maneras de escoger el primer elemento para ocupar el 1er. lugar; 2 maneras de escoger el que ocupara el segundo lugar y un modo de escoger el que ocupara el 3er. lugar. Así, aplicando el principio de multiplicación, escribiremos.

$$\frac{1°}{3} \; y \; \frac{2°}{2} \; y \; \frac{3°}{1} \qquad 3 \times 2 \times 1 = 6$$ ordenaciones (en efecto: 123; 132; 231; 213; 312; 329)

Ejemplo 1
Dados n objetos o elementos distintos: x_1 ; x_2 ; x_3 ...... ; x_n, ¿de cuántos modos es posible ordenarlos en línea recta?

Resolución:
El primer lugar en la ordenación puede ser ocupado por cualquiera de los n elementos; es decir, hay n maneras de elegir el elemento que ocupará el primer lugar; una vez elegido el primero quedan todavía n – 1 elementos y cualquiera de ellos (pero uno solo) ocupará el 2do. lugar y uno solo (cualquiera) de las n – 2 elementos restantes ocupará el 3er. lugar y así sucesivamente se ocupan los demás lugares del ordenamiento.

Tendremos:

Orden:

$$\overset{1^\circ}{\overbrace{n}} \times \overset{2^\circ}{\overbrace{n-1}} \times \overset{3^\circ}{\overbrace{n-2}} \times \cdots\cdots \overset{(n-1)^\circ}{\overbrace{2}} \times \overset{n^\circ}{\overbrace{1}} = n!$$

Cada uno de los ordenamientos realizados es denominado una permutación simple de "n" elementos distintos y lo representaremos como sigue:

$$\boxed{P_n^n = P_n = n! \quad \forall\, n \geq 0}$$

Si: $n = 0$ $P_0 = 0! = 1$ (por convención)

Ejemplo 2

¿Cuántas ordenaciones lineales distintas pueden formarse con todas las letras de la palabra **permuta**?

Resolución:

La palabra dada tiene 7 letras diferentes (tenemos entonces 7 elementos) luego:

$$P_7 = 7! = 5040$$

∴ Hay 5040 permutaciones distintas

Ejemplo 3

Con todas las consideraciones del ejemplo anterior, ¿cuántas de las ordenaciones halladas comienza y terminan en vocal?.

Resolución:

La vocal que ocupará el lugar inicial puede ser cualquiera de las 3 dadas, una vez escogida la primera aún quedan 2 vocales y cualquiera de ellas puede ocupar el lugar final de la ordenación lineal. Ahora, escogidas ya las letras del primero y último lugar nos quedan 5 letras, las cuales se ordenan entre esas 2 vocales ya ubicadas de 5! maneras (aquí estamos aplicando ya la expresión dada arriba Pn = n!), luego:

$$\overset{\text{Primer lugar}}{\overbrace{3}} \times \overset{\text{Aquí hay 5 lugares}}{\overbrace{5\times4\times3\times2\times1}} \times \overset{\text{Último lugar}}{\overbrace{2}} = 3 \times 5! \times 2$$

$$= 720 \text{ ordenaciones}$$

Ejemplo 4

De un conjunto de tres estudiantes, se desea formar una junta directiva integrada por un presidente y un secretario. ¿Cuántas directivas diferentes pueden formarse?

Resolución:

Los estudiantes son A, B y C

	Presidente(P)	Secretario(S)
1	A	B
2	A	C
3	B	A
4	B	C
5	C	A
6	C	B

Las diferentes formas de ordenar (permutar) **3** elementos tomados de **2** en **2**, se denota de la forma:

$$P_2^3 = 6.$$

Observemos cuán importante es el orden de los elementos. Pues a pesar de tener los mismos integrantes -por ejemplo AB y BA- se consideran arreglos diferentes. Esto es lo que caracteriza principalmente a una permutación.

Recordemos que el total de directivas formadas es 6. A este resultado podemos llegar también mediante el principio de multiplicación.

Veamos:

$$\overset{P}{\overbrace{3}} \times \overset{S}{\overbrace{2}} = 6$$

Así; la permutación de 3 elementos tomadas de 2 en 2 es 6 y escribimos:

$$P_2^3 = 6$$

Ejemplo 5

Dados los dígitos: 1, 2, 3 y 4 ¿cuántos números distintos se puede formar con ellos sin que los números formados presenten dígitos repetidos?

Resolución:

¡Cuidado!, no nos dice si los números deben ser de una cifra de dos o de más cifras, así que deberemos de considerar estos casos. Además, ten en cuenta que bajo las condiciones dadas solo podríamos formar hasta números de 4 cifras distintas; pues un número formado por 5 cifras o más implicaría la repetición de uno de los dígitos dados. Bueno, empecemos: Los elementos son 1; 2; 3; 4 realicemos las ordenaciones (permutaciones) ayudándonos con el principio de multiplicación:

- Tomando 1 dígito: (Se denota: P_1^4)

  se pueden formar los números: 1, 2, 3, 4
  También se podría obtener de la siguiente manera:

$$\frac{4\times3\times2\times1}{1\times2\times3}=\frac{4!}{3!}=4$$

- Tomando 2 dígitos: (se denota P_2^4)

  Números de la forma $\overline{ab}$

  12; 13; 14; 23; 24; 34
  21; 31; 41; 32; 42; 43 ⇒ 12 números

  También se podría obtener de la siguiente manera:

$$\frac{4\times3\times2\times1}{1\times2}=\frac{4!}{2!}=\frac{4!}{(4-2)!}=P_2^4=12$$

  Hay doce números de 2 cifras distintas.

- Tomando 3 dígitos (se denota P_3^4)

  Números de la forma $\overline{abc}$

  123 ; 124 ; 134 ; 234
  132 ; 142 ; 143 ; 243
  231 ; 241 ; 341 ; 342
  213 ; 214 ; 314 ; 324
  321 ; 412 ; 431 ; 432
  312 ; 421 ; 413 ; 423 ⇒ 24 números

  También:

$$\frac{4\times3\times2\times1}{1}=\frac{4!}{1!}=\frac{4!}{(4-3)!}=P_3^4=24$$

  De aquí: $P_3^4=\frac{4!}{(4-3)!}$

  Hay 24 ordenaciones, es decir, 24 números de 3 cifras distintas.

- Tomando 4 dígitos (se denota $P_4^4=P_4$)

  Números de la forma $\overline{abcd}$

  1234 ; 2341 ; 3124 ; 4321
  1234 ; 2314 ; 3142 ; 4312
  1342 ; 2143 ; 3214 ; 4213
  1324 ; 2143 ; 3241 ; 4231
  1432 ; 2413 ; 3412 ; 4123
  1423 ; 2431 ; 3421 ; 4132 ⇒ 24 números

  También

$$\frac{4\times3\times2\times1}{0!}=\frac{4!}{(4-4!)}=P_4^4=P_4=24$$

∴ Hay 24 ordenaciones, es decir, 24 números de 4 cifras distintas.

Podemos generalizar estos resultados cuando se tiene n elementos y se quiere ordenarlos tomándolos de K en K (K≤n); haciéndolo tendríamos:

- El número de permutaciones de n elementos tomados de K en K se le calcula como:

$$P_{(n,k)}=P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!};\quad 0<k\leq n$$

Ejemplo 6

Consideremos los números 1,2,3,4 y 5 ¿Cuántas ordenaciones lineales distintas se puede formar tomando estos elementos de 3 en 3 y sin que se repita ningún dígito?

Resolución:

Primero escojamos los 3 elementos (tríos); pueden ser:
123; 124; 125; 134; 135; 145; 234; 235; 245; 345
10 tríos distintos.

Ahora, ya sabemos, por un ejemplo visto anteriormente, que el trío: 123 tiene 3!=6 ordenamientos **distintos**, luego como hay 10 tríos el total de ordenamiento será: 3!×10=60 ordenamientos.

Podemos anotar entonces que las permutaciones lineales de 5 elementos tomados de tres en tres, es 60, pero esto se simboliza de la siguiente manera:

$$P_3^5 = 60$$

En efecto haciendo uso de la expresión general dada escribiremos:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2} = 5\times4\times3 = 60$$

En la expresión general dada, cuando K=n tenemos:

$$P_n^n = P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \Rightarrow \boxed{P_n = n!}$$

Expresión obtenida al principio de nuestro estudio como ya hemos visto.

Ejemplo 7

Con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,9, ¿cuántos números de cuatro cifras pueden formarse si los dos primeros (millar y centena) son impares y los demás (decena y unidad) son pares? Además en un mismo número las cifras no se repiten.

Resolución:

Para unidad y decena tenemos: 2,4,6

Para la centena y millar tenemos: 1,3,5,7,9

- No olvidemos que el orden de los elementos (cifras) es importante, pues con los mismos dígitos se obtienen números diferentes al ubicarlos en posiciones distintas (Ejemplo: 3542, 5342, ...). Características de una permutación.

Por el principio de multiplicación:

{1, 2, 5, 7, 9} M C D U {2, 4, 6}

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

y ahora aplicando lo aprendido de permutaciones tendremos:

Por condición $\Rightarrow$ $\overset{\text{Mill.Cen.}}{P_2^5} \times \overset{\text{Dec.Unid.}}{P_2^3} \Rightarrow \frac{5!}{3!} \times \frac{3!}{1!} = 120$

$\therefore$ Se puede formar 120 números con las condiciones dadas.

Ejemplo 8

¿De cuántas maneras distintas cinco atletas pueden llegar a la meta en una carrera de 100m planos si no hay empate en ningún puesto?

Resolución:

Los cinco atletas ubicados en posiciones diferentes nos darán resultados (llegadas a la meta) también diferentes. (Aquí importa el orden de los elementos, por eso es una *permutación*).

Veamos:

Orden de llegada	1°	2°	3°	4°	5°
	A	B	C	D	E
	A	B	D	E	C
	B	C	A	D	E
	A	B	C	E	D
	....				
	....				
	....				

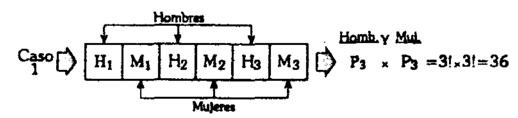
Como se considera a todos los elementos tendremos: P_5 = 5!= 120 formas diferentes de llegar.

Ejemplo 9

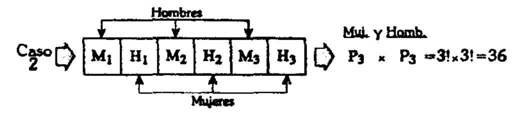
Un grupo formado por 3 mujeres y 3 hombres se sientan de modo que ellas queden alternadas con ellos. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo en una fila de 6 asientos?

Resolución:

Caso 1: Iniciando el ordenamiento con un hombre.

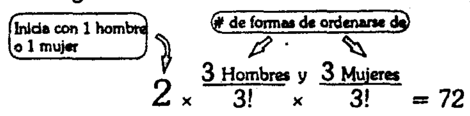


Caso 2: Iniciando el arreglo con una mujer.



- Obsérvese que los casos 1 y 2 son excluyentes.
  Luego: 3H y 3M alternadamente pueden sentarse de 36+36= 72 formas distintas.

Podemos resolver este ejercicio de manera directa como sigue:



Ejemplo 10

¿De cuántas maneras distintas 5 niños y 5 niñas pueden sentarse en 5 bancas (c/u con capacidad para 2 de ellos) de modo que en cada banca se sienten un niño y una niña?

Resolución:

Para llevar a cabo lo pedido, comenzaremos por ubicar a los niños o a las niñas en las 5 bancas que tienen 2 lugares c/u, es decir, en 10 lugares.

La primera niña escoge un lugar de 10 maneras distintas; la segunda niña no puede sentarse junto a la primera (condición dada) por lo que solo tendrá 8 maneras de escoger su lugar; la tercera niña escogerá cualquiera de las 6 restantes; la cuarta niña escoge uno de los 4 lugares aún vacíos y la quinta sólo puede escoger entre los 2 últimos de ellos. Ubicadas las niñas, se deberá ubicar a los cinco niños en los 5 lugares sobrantes; esto es, una permutación de 5 elementos tomados todos ellos a la vez: $P_5^5 = P_5 = 5!$

Así: $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 460800$ maneras distintas.

Permutaciones circulares

Hemos mostrado, páginas atrás, una idea acerca de este tipo de ordenamientos. Recordémoslo con un ejemplo:

Ejemplo 1

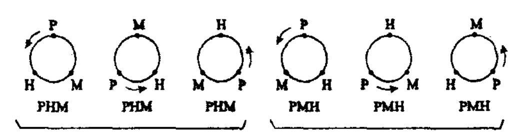
Al momento de cenar, ¿de cuántas maneras pueden ubicarse los padres y su hijo alrededor de la mesa?

Resolución:

P: padre, M: madre, H: hijo

Sabemos que $P_{(3)} = 3! = 6$ maneras de colocar 3 elementos distintas en 3 lugares.

Veamos:



Coinciden entre sí por rotación
Orden: PHM

Coinciden entre sí por rotación
Orden: PMH

Pero si observas atentamente notarás que las tres primeras disposiciones coinciden entre sí por rotación; es decir, si hacemos girar la figura como indica la flecha y lo mismo ocurre con las 3 últimas. De modo que el número de ordenamiento alrededor de la mesa (permutaciones circulares) de 3 elementos es 2. Denotaremos esto así: $Pc(3) = 2$.

Podemos deducir lo siguiente: mientras que en las permutaciones circulares lo que importa es la posición relativa de los objetos entre sí; en las permutaciones simples nos interesa los lugares que los objetos ocupan. Por ello, en las tres primeras figuras, tomando en sentido antihorario y a partir de P, la disposición es PHM; luego la posición relativa de los elementos es la misma. Mientras que en las tres últimas figuras si partimos de P y en sentido antihorario, tendríamos PMH y otra vez la posición relativa es la misma en este último caso.

Ejemplo 2

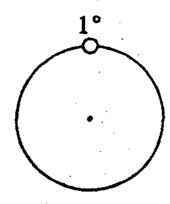
Si se quiere jugar a la ronda, ¿cuántos ordenamientos diferentes se puede formar con 4 niños?, ¿cuántas, con 5 niños? y ¿cuántas, con 6 niños?

Resolución:

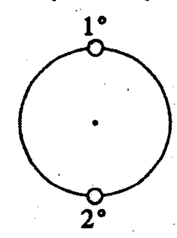
Como la ronda es un juego en el cual los niños giran todos ellos tomados de la mano, lo que importa no es el lugar de cada niño; sino la posición relativa de los niños entre sí.

Empezamos:

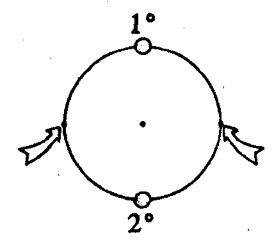
Hay 1 modo de colocar al primer niño en el círculo de la ronda porque donde quiera que lo ubiquemos, él será el único elemento en el círculo. La figura indica el caso:



Ahora, hay una manera de colocar al segundo niño, pues éste será el elemento ubicado inmediatamente después del primero. Veamos:

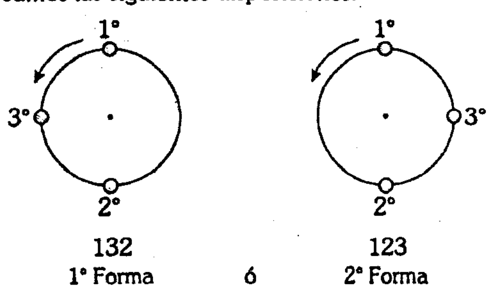


Para ubicar al tercer niño hay 2 formas distintas de hacerlo. Veamos:



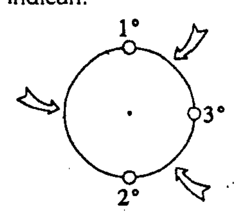
En la figura anterior, las flechas indican los lugares donde se podría ubicar al tercer niño.

Veamos las siguientes disposiciones:



132 1° Forma 6 123 2° Forma

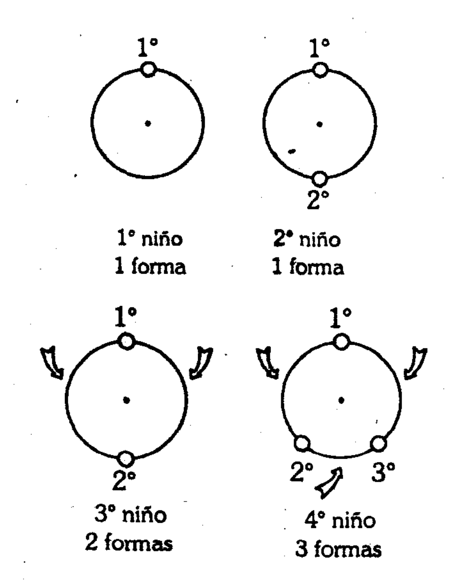
Finalmente el 4° niño puede ubicarse de 3 maneras distintas entre los 3 niños de la ronda; las flechas así lo indican:



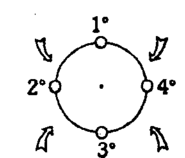
Luego, el número de rondas distintas que se pueden formar con 4 niños (la permutación circular de 4 elementos) es:

$$P_c(4) = \overset{1°}{1} \times \overset{2°}{1} \times \overset{3°}{2} \times \overset{4°}{3} = 3! \rightarrow P_c(4) = 3!$$

Ilustremos ahora el caso para 5 niños:



Finalmente el 5° niño tiene 4 formas de ubicarse:



Luego:

$$P_c(5) = \overset{1°}{1} \times \overset{2°}{1} \times \overset{3°}{2} \times \overset{4°}{3} \times \overset{4°}{4} = 4! \rightarrow P_c(5) = 4!$$

Te invitamos que resuelvas el caso de 6 niños. Nuestra intención es generalizar y para ello la pregunta sería:

¿De cuántas maneras distintas podemos colocar n elementos diferentes alrededor de un objeto (permutación circular) si consideramos equivalentes las disposiciones que puedan coincidir por rotación?

Siguiendo el procedimiento descrito hemos conseguido:

$$P_c(3)=\overset{1°}{1}\times\overset{2°}{1}\times\overset{3°}{2}=2!\rightarrow P_c(3)=2!$$

$$P_c(4)=\overset{1°}{1}\times\overset{2°}{1}\times\overset{3°}{2}\times\overset{4°}{3}=3!\rightarrow P_c(4)=3!$$

$$P_c(5)=\overset{1°}{1}\times\overset{2°}{1}\times\overset{3°}{2}\times\overset{4°}{3}\times\overset{5°}{4}=4!\rightarrow P_c(5)=4!$$

⋮

Entonces:

$$P_c(n)=\overset{1°}{1}\times\overset{2°}{1}\times\overset{3°}{2}\times\overset{4°}{3}\times\ldots\times\overset{(n-1)°}{(n-2)}\times\overset{n°}{(n-1)}=(n-1)!$$

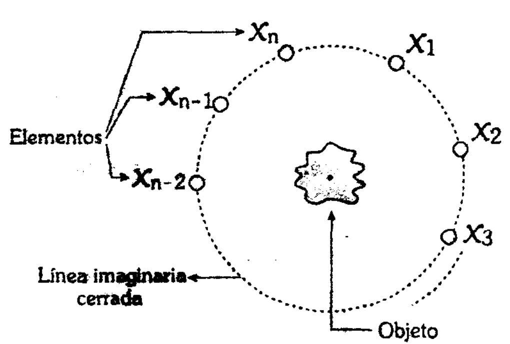
Luego:

$$\boxed{P_c(n)=(n-1)!}\quad \forall n\in\mathbb{Z}^+$$

1° 2° 3° 4° n° (n−1)°

Resumiendo:

Permutación circular ($P_c(n)$) es un arreglo u ordenación de elementos alrededor de un objeto. Si nos fijamos en el esquema mostrado (en la parte inferior), podremos notar los n elementos, los cuales pueden estar, como ya dijimos, alrededor de un objeto (mesa, silla, fogata, etc.) o formando una ronda como en el juego de los niños, donde se aprecia mejor el círculo, quienes están agarrados de la mano. Usualmente cuando se ordena elementos alrededor de un objeto, lo que hacemos es imaginarnos que todos ellos se encuentran en una linea imaginaria cerrada. Debido a este hecho, no podemos decir cual es el primero ni el último lugar y lo que se estila hacer es fijar la posición de una de los elementos y considerarlo como *elemento de referencia*; así los restantes (n−1) elementos pueden ordenarse ya de todas las formas posibles, es decir (n−1)!. Ésta es otra manera de llegar a la misma expresión dada.



Observación:

- Si nos atenemos a lo dicho últimamente debemos aclarar que el elemento de referencia *es único para un mismo problema y no* podemos estar cambiándolo por otro porque obtendremos arreglos circulares repetidos. Si se toma otro elemento como fijo, las ordenaciones de los restantes serán unos de los ya considerados.
- Para diferenciar un arreglo circular de otro a partir del elemento de referencia, leemos en sentido horario o antihorario; y si encontramos 2 lecturas iguales, entonces los arreglos serán iguales.

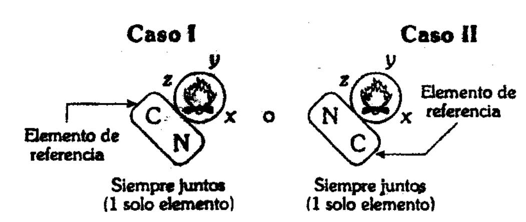
Ejemplo 3

Carlos, su novia y los tres hermanos de su novia se sientan alrededor de una fogata. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacerlo si Carlos y su novia siempre están juntos?

Resolución:

Carlos (C), Novia (N), Tres hermanos (x, y, z).

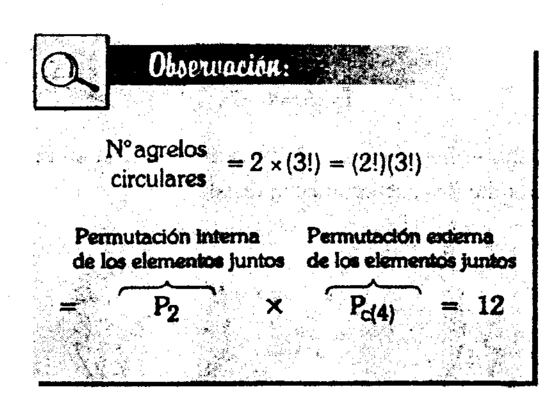
Hay 2 casos:



Luego:

De I: $P_c(4)=3!$; De II: $P_c(4)=3!$

N° arreglos circulares: $2 \times (3!) = 12$



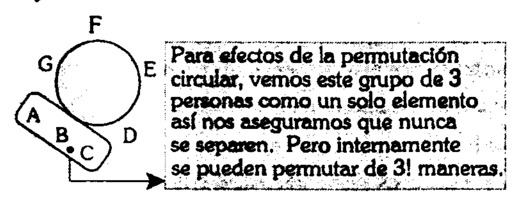
Ejemplo 4

¿De cuántas maneras distintas, 7 amigos se ubican alrededor de una mesa a comer helados, si tres de ellos en particular siempre están juntos?

Resolución:

Manteniendo el criterio del problema anterior.

Los amigos A,B,C,D,E,F,G siempre juntos con A, B y C.



Es decir:

$$N^\circ \text{permutaciones circulares} = [Pc_{(5)}] \times P_3$$

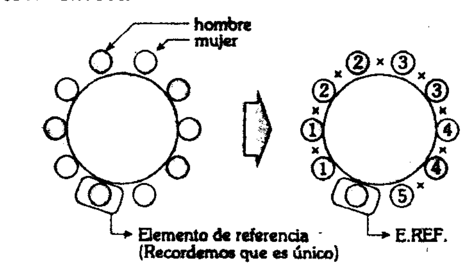
(Permutación interna de A, B, C)

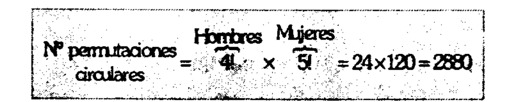
N° permutaciones circulares: $4! \times 3! = 144$

Ejemplo 5

¿De cuántas maneras pueden ubicarse alternadamente cinco parejas de esposos, para jugar a las cartas alrededor de la mesa?

Resolución:





∴ Puede ordenarse alternadamente de 2880 formas distintas

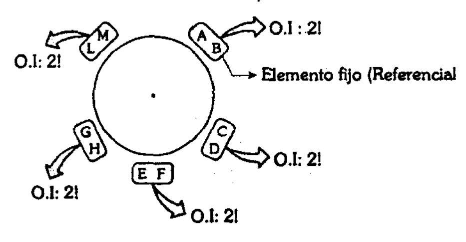
Ejemplo 6

Según el problema anterior, ¿de cuántas maneras pueden ubicarse para jugar, si cada pareja de esposos no se separan?

Resolución:

Si las parejas no se separan y permanecen juntas, entonces, el caso sería como la permutación circular de 5 elementos (cada elemento es una pareja). Elegiremos una pareja de referencia y permutamos al resto. Además de eso, cada pareja se cambia de lugar internamente.

(O.I: ordenamiento interno)



$$N^{\circ}\ maneras: \left[P_c(5)\right] \times (2!)^5$$
$$= 4! \times 32 = 768$$

∴ Pueden ordenarse de 768 maneras distintas.

Ejemplo 7

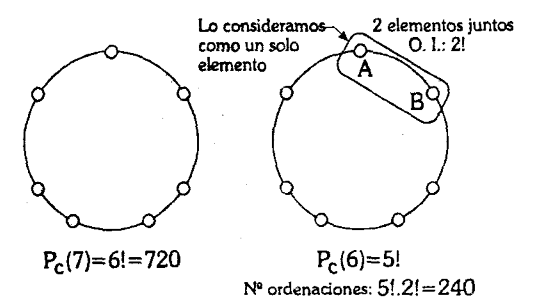
¿De cuántas maneras distintas podemos formar una ronda con 7 niños de modo que 2 de ellos, (A y B) ya determinadas previamente, no estén juntos?

Resolución:

Podemos resolver este problema de dos maneras distintas:

1° Forma. Haremos la permutación circular de los 7 niños como si no hubiera ninguna restricción. Luego calculamos el número de ordenamientos circulares en los cuales 2 niños dados estén siempre juntos. Finalmente procederemos a restar el primer número obtenido con el segundo. ¿Qué obtenemos? Aquellos arreglos en los cuales 2 niños dados no están jamás juntos.

Veamos:



$P_c(7)=6!=720$ $P_c(6)=5!$

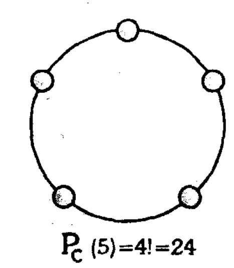
N° ordenaciones: $5!.2!=240$

Entonces:

El número de ordenamiento circulares con 2 niños nunca juntos: $720-240=480$ maneras distintas.

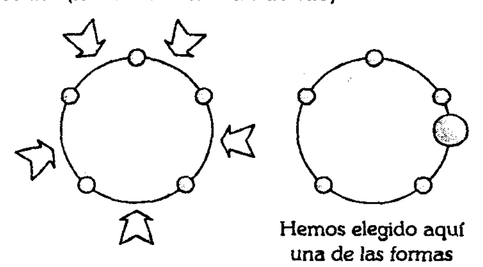
2° Forma. Como dos niños dados no pueden estar juntos, ordenaremos primero a los cinco niños restantes y después iremos colocando uno por uno a los dos niños que faltan; siempre observando la condición establecida.

Veamos:



$P_c(5)=4!=24$

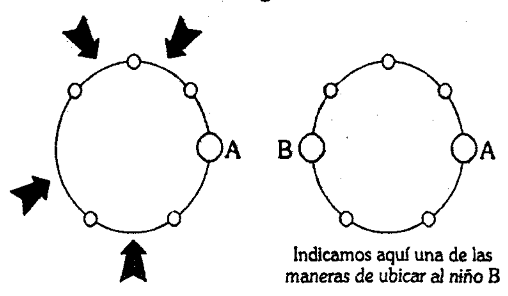
Ahora; hay 5 modos de colocar al niño A en la ronda: (las flechas indican donde)



Hemos elegido aquí una de las formas

Una vez ubicado el niño A solo falta ubicar al niño B y como podemos apreciar solo hay cuatro maneras distintas de ubicarlo, respetando la condición impuesta (no colocado junto a A).

Las flechas indican los lugares:



Luego:

Número de ordenamiento circulares con 2 niños nunca juntos: $[P_c(5)] \times 5 \times 4 = 4! \times 5 \times 4 = 480$ maneras distintas.

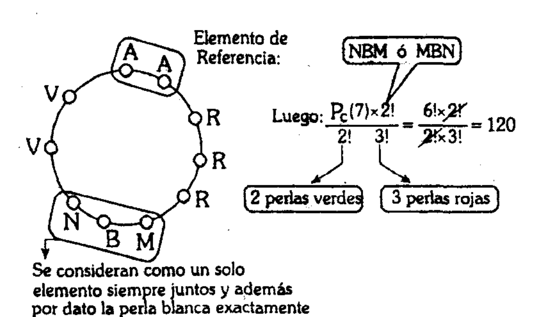
Ejemplo 8

Se desea confeccionar un collar de 10 perlas, disponiéndose, para tal efecto, 2 perlas verdes, 2 azules, 3 rojas, 1 negra, 1 blanca y 1 marrón. ¿De cuántas maneras diferentes podrá lograrse, sabiendo que las 2 perlas azules deben estar siempre juntos; además, la perla blanca, exactamente en medio de las perlas negras y marrones?

Resolución:

Consideraremos a las 2 perlas azules como un elemento de referencia; además, las perlas negras, blancas y marrones deberán estar juntas por la condición dada: ..."perla blanca exactamente en medio de las perlas negra y marrón", no olvidemos también que algunas perlas son de igual color (elementos repetidos).

Veamos:



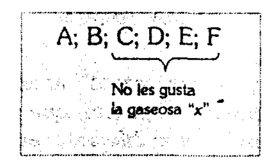
Luego:

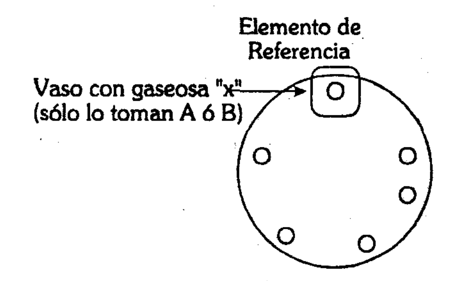
Se pueden confeccionar 120 collares distintos o si se prefiere hay 120 maneras distintas de armar el collar.

Ejemplo 9

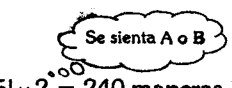
En una mesa circular se encuentran servidos 6 vasos con gaseosa, entre ellos hay uno con gaseosa marca "x". ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse 6 personas en sus asientos, si entre ellos hay 4 personas que no les gusta la gaseosa marca "x"?

Resolución:





Supongamos que A se sienta en ese lugar entonces los 5 restantes pueden sentarse en los demás lugares de 5! maneras.



Luego: $5! \times 2 = 240$ maneras

Permutaciones con elementos repetidos

Se da cuando los elementos a ordenar no son todos ellos distintos, es decir, hay un elemento o más de uno que se están repitiendo.

Ejemplo 1

¿Cuántas ordenaciones diferentes puede realizarse con todas las letras de la palabra MAMA?

Resolución:

Tenemos 4 letras (M; A; M; A) la permutación de 4 elementos (letras) donde se repiten 2 letras M y dos letras A se denota como:

$P^4_{2;2}$ y se lee: "Permutación de 4 elementos con repetición de dos letras M y de dos letras A"

Si todas las letras fueran diferentes, entonces tendríamos P(4)=4!, pero como hay 2 letras A, estamos contando cada ordenación 2! veces. Análogamente contamos cada ordenación 2! veces porque hay 2 letras M.

Luego: $P^4_{2;2} = \dfrac{4!}{2!\times 2!} = \dfrac{24}{4} = 6$

En efecto: MAMA MAAM MMAA
AMAM AMMA AAMM

Hasta ahora, en los casos anteriormente, estudiados habíamos supuesto que todos los objetos considerados eran diferentes entre sí (esto es, distinguibles); sin embargo como ya se está viendo no ocurre siempre así.

Supongamos que tenemos n elementos tales que hay k_1 elementos repetidos de una clase; k_2 elementos repetidos de una segunda clase y así sucesivamente.

Es decir:

(I)
- k1 ➪ elementos repetidos de un 1er. tipo
- k_2 ➪ elementos repetidos de un 2do. tipo
- k_3 ➪ elementos repetidos de un 3er. tipo
- ⋮
- k_p ➪ elementos repetidos de un p–ésimo tipo

Entonces, el número de permutaciones de n elementos de los cuales se repiten algunos (los mencionados en I) está dado por:

$$P^n_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_p} = \frac{n!}{k_1!\times k_2!\times k_3!\times \ldots\ldots \times k_p!}$$

donde: $k_1! + k_2! + k_3! + \ldots.. + k_p \leq n$

Ejemplo 2

¿Cuántas ordenaciones distintas puede formarse con todas las letras de la palabra BARBARA?

Resolución:

Hay 7 letras (n = 7) de las cuales tenemos 2 letras B; 2 letras R y 3 letras A. Entonces:

$$P^7_{2\,2\,3} = \frac{\quad}{2!\times 2!\times 3!} = 210$$

Si las letras fueran todas distintas tendríamos, $P_7=7!$ ordenaciones; pero como hay 2 letras B contamos cada ordenación 2! veces. Análogamente contamos cada ordenación 2! veces por 2 letras "R" iguales y "3!" veces pues hay 3 letras A.

Ejemplo 3

¿Cuántas ordenaciones diferentes puede formarse con todas las letras de la palabra MATEMÁTICA?

Resolución:

Hay en la palabra:

3 letras A
2 letras M
2 letras T
1 letra C; 1 letra I; 1 letra E

} 10 letras en total

Luego, $P^7_{2;2;3} = \dfrac{7!}{2!\times 2!\times 3!} = 210$

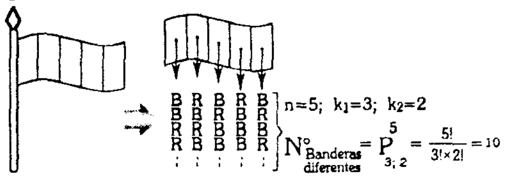
Ejemplo 4

¿Cuántas banderas diferentes de cinco franjas verticales se pueden formar, si debe tener 3 franjas blancas y 2 francas rojas?

Resolución:

Observemos que hay dos colores diferentes: blanco y rojo; y para cada tipo se presenta colores iguales (3 blancos y 2 rojos).

No olvidemos que si permutamos elementos iguales, la bandera sigue siendo la misma.



∴ Sólo se puede formar 10 banderas diferentes.

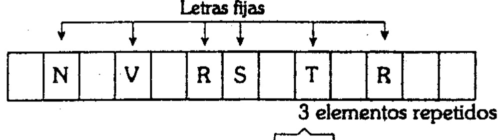
Ejemplo 5
¿Cuántos arreglos literales pueden obtenerse con las letras de la palabra **ALIANZA**?

Resolución:
Elementos A, A, A, L, I, N, Z

Número arreglos diferentes: $P_3^7 = \dfrac{7!}{3!} = 840$

Ejemplo 6
¿Cuántas permutaciones diferentes puede obtenerse con las letras de la palabra UNIVERSITARIA, de modo que las consonantes ocupen los mismos lugares?

Resolución:
Elementos: A, A, I, I, I, U, N, V, E, R, S, T, R.
Por condición:



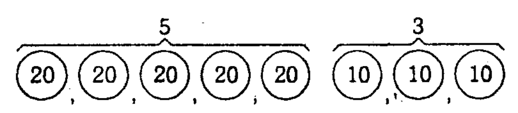
y sólo se permuta: U, I, I, I, E, O, A (7)

⇛ Número de permutaciones diferentes:

$\therefore\ P_3^7 = \dfrac{7!}{3!} = 840$

Ejemplo 7
¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar linealmente 8 monedas, las cuales 5 son de 20 céntimos y 3 de 10 céntimos?

Resolución:
Veamos los elementos:



◆ Como podemos observar, el problema no es muy complicado, ya que sólo se trata de buscar permutaciones diferentes.

$$\text{N° permutaciones diferentes} = P_{5;3}^{8} = \frac{8!}{5!\times 3!} = 56$$

∴ Se puede ordenar linealmente de 56 formas diferentes.

COMBINACIONES

Ejemplo 1
Con los equipos de fulbito A,B,C, ¿cuántos partidos diferentes se puede jugar en una sola rueda?

Resolución:
Los partidos programados serían:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1°}{\text{A vs B}} & \dfrac{2°}{\text{A vs C}} & \dfrac{3°}{\text{B vs C}}\end{matrix}\right\}3 \text{ partidos diferentes}$$

¿y si se hubiera programado B vs A, C vs A, C vs B, no serían acaso otros 3 partidos distintos?

¡Cuidado! Lee bien la condición: "...jugar en una sola rueda", que jueguen los equipos A vs B" sería lo mismo que decir: "juegan B vs A", pues con ambos equipos lo que disputan un solo encuentro y no dos partidos, los cuales corresponden a dos ruedas (un primer partido y el partido de revancha). Ahora, si se llevara el campeonato a dos ruedas, entonces A vs B y B vs A sí indicarían partidos distintos; pues en este tipo de

competencias A vs B indican: $\begin{cases}\text{Local: A}\\ \text{Visitante: B}\end{cases}$

mientras que B vs A sería: $\begin{cases}\text{Local: B}\\ \text{Visitante: A}\end{cases}$

Estamos viendo entonces que el orden de los elementos en la programación no interesa; pues, como repetimos, los partidos son a una sola rueda, pero lo que sí importa *es quiénes integran ese grupo de dos equipos* que juegan el partido. Luego, lo que se está haciendo es seleccionar dos equipos de un total de 3 para disputar un encuentro (estamos formando grupos) y lo que queremos saber es de cuántas formas distintas se puede hacer esto (cuántos grupos distintos se pueden formar bajo las condiciones dadas)

Veámoslo de la siguiente manera. Si el orden interesara, entonces tendríamos.

AB	AC	BC
BA	CA	CB

, es decir, $P^{3}_{(2)} = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$

Pero como ya se ha mencionado, los partidos encerrados en la linea punteada ya están programados en la parte superior; pues el campeonato es a una sola rueda.

Luego:

$$N^\circ \text{ partidos: } \frac{P^3_2}{2!} = \frac{\dfrac{3!}{(3-2)!}}{2!}$$

$$N^\circ \text{ partidos: } \frac{3!}{(3-2)! \times 2!} = 3!$$

La notación para el número de partidos sería:

$$C^3_2$$

Se lee: Combinación de 3 elementos tomados de 2 en 2. Esto significa que, dados 3 elementos, estamos seleccionándolos de 2 en 2; es decir, estamos agrupando de 2 en 2. Luego:

$$C^3_2 = \frac{P^3_2}{2!}$$

Se divide entre 2! porque el orden no interesa A vs B y B vs A con un mismo partido (un mismo grupo formado: AB=BA) y lo estaríamos contando como dos grupos distintos. Además recuerda que 2! indica el número de formas de ordenarse de 2 elementos.

$$C^3_2 = \frac{3!}{(3-2)! \times 2!}$$

$$C^3_2 = 3$$

Ejemplo 2

María tiene 5 pantalones diferentes y desea embolsarlos. Si solamente entran 3 pantalones en una bolsa y dispone únicamente de una bolsa, ¿de cuántas maneras distintas podría embolsar sus 3 pantalones?

Resolución:

Lo que ella desea [illegible] es seleccionar tres pantalones de un total de 5 (considerando 5 elementos agruparlos de 3 en 3).

Sean A,B,C,D,E los pantalones y uno de los grupos formados podría ser ABC. Una vez formado este grupo, el orden en el interior de la bolsa no interesa; por ello, las órdenes ACB, BAC, BCA, CBA, y CAB son el mismo grupo de 3 pantalones enumerados que se encuentran dentro de la bolsa. Entonces:

$$C^5_2 = \frac{P^5_3}{3!} = \frac{\dfrac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$$

Entonces hay 10 grupos distintos que se pueden formar

Recordando la propiedad de números combinatorios: $C^5_3 = C^5_2 = \dfrac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$

Vamos a enfocar este ejemplo desde una óptica más abstracta.

Veamos:

El conjunto de pantalones podríamos denotarlo así: $\{P_1; P_2; P_3; P_4; P_5\}$ el cual a cada subconjunto formado de 3 elementos se le llama generalmente una combinación simple de clase 3 de los 5 elementos dados.

Estas combinaciones son:

$\{P_1; P_2; P_3\}$ $\{P_1; P_2; P_4\}$ $\{P_1; P_2; P_5\}$ $\{P_1; P_3; P_4\}$
$\{P_1; P_3; P_5\}$ $\{P_1; P_4; P_5\}$ $\{P_2; P_3; P_4\}$ $\{P_2; P_3; P_5\}$
$\{P_2; P_4; P_5\}$ $\{P_3; P_4; P_5\}$

Hemos dicho que el número de combinaciones, formadas por 5 elementos, tomados de 3 en 3, se denota:

$$C^5_3 \text{ luego: } C^5_3 = 10$$

Analicemos ahora esta respuesta de forma razonada.

El primer elemento de la combinación puede ser escogido de 5 maneras (cualquiera de los 5 pantalones); el 2° elemento de 4 maneras y el 3° elemento de 3 maneras. Podríamos creer entonces que la respuesta sería 5×4×3=60; pero si nos fijamos en una de las combinaciones, por ejemplo $\{P_1; P_2; P_3\}$ $\{P_1; P_3; P_2\}$ $\{P_3; P_2; P_1\}$ $\{P_3; P_1; P_2\}$ $\{P_2; P_1; P_3\}$ $\{P_2; P_3; P_1\}$, éstas son idénticas (son los mismos pantalones dentro de la misma bolsa y los grupos han sido contados como si fueran distintos). Luego en la respuesta 60 estamos contando cada combinación una vez para cada orden de escribir sus elementos y esto no debe ser así; pues en cada una de las combinaciones, los elementos podrían ordenarse en P(3)=3!=6 maneras. Así cada combinación fue contada 6 veces luego la respuesta debe ser:

$$\frac{60}{6}=10$$

Generalizando podríamos preguntarnos: ¿De cuántos modos, podemos escoger K objetos distintos entre n objetos distintos dados? Aunque esta pregunta podría ser hecha de otra manera: ¿Cuántos son los subconjuntos de K elementos que se puede formar del conjunto: $\{a_1; a_2; a_3 \ldots a_n\}$?

¿Qué es una combinación?

Consideremos n elementos distintos, los cuales se agrupan de K en K. El número de grupos diferentes con K elementos distintos, que podemos obtener seleccionados los de un total de n elementos distintos, viene dado por:

$$C_K^n = \frac{n!}{K! \times (n-K)!}\ ; \ n \geq K \geq 0$$

Una combinación es una selección o grupo de elementos que se puede formar con parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. ***En una combinación, no interesa el orden de sus elementos.*** Y debido a esto una combinación es diferente de otra si al menos tiene un elemento distinto.

Observaciones:

1° A esta forma de agrupar también se le conoce como combinación simple. Hacemos esta observación, porque hay un tipo especial de combinación en la cual se escoge el mismo elemento más de una vez; dicha combinación se denomina *combinación completa* también se acostumbra llamarse *combinación con repetición*.

2° Recordando algunas propiedades de números combinatorios.

$$C_0^n=1;\ C_1^n=n;\ C_n^n=1$$

$$C_k^n = C_{n-k}^n \rightarrow \text{Números combinatarios complementarios}$$

$$C_k^n = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots}^{\text{K Factores}}}{K!}$$

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$$

$$C_k^n = \frac{n}{k} \times C_{k-1}^{n-1} \qquad C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

Ejemplo 3

¿Cuántas ensaladas, que contienen exactamente 4 frutas, podemos hacer si disponemos de 10 frutas diferentes?

Resolución:

Para formar la ensalada bastará con escoger 4 frutas de un total de 10, la cual se denota y hace como sigue:

$$C_4^{10} = \frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4} = 210 \text{ ensaladas distintas}$$

Ejemplo 4

Un grupo de excursionistas está integrado por 7 mujeres y 4 hombres.. ¿De cuántas maneras diferentes se puede formar una expedición de 6 personas en la cual debe haber por lo menos 2 hombres?

Resolución:
Las posibilidades serían las siguientes:

- 4 mujeres y 2 hombres
- 3 mujeres y 3 hombres
- 2 mujeres y 4 hombres

Esto ocurre, ya que en la expresión ". . . por lo menos 2 hombres", se puede deducir que en el grupo debe haber mínimo 2 hombres o más.

Luego:
$C_4^7\times C_2^4+C_3^7\times C_3^4+C_2^7\times C_4^4=35(6)+35(4)+21(1)=371$

Entonces, se pueden formar 371 grupos distintos.

Ejemplo 5
De 8 candidatos, ¿cuántos comités distintos de 3 miembros puede formarse?

Resolución:
Vamos a formar grupos de 3, seleccionados de un total de 8.

Así $C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56$ comités diferentes

Ejemplo 6
Dada la figura, ¿cuántos triángulos pueden formarse con vértices en 3 de los 12 puntos dados, si $L_1//L_2$?

A B C D E F G L_1

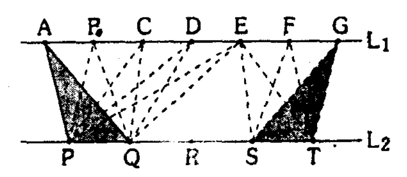
P Q R S T L_2

Resolución:
Si queremos formar un triángulo debemos escoger 3 puntos no situados en la misma recta; es decir, los 3 puntos no deben ser colineales. El número de maneras de escoger 3 puntos de un total de 12 es C_3^{12}

De este total debemos restar las maneras de escoger 3 puntos en la recta L_1: C_3^7 y también le restamos las maneras de escoger 3 puntos en la recta L_2: C_3^5.

Luego $C_3^{12}-C_3^7-C_3^5=220-35-10=175$

Otra forma de hacer esto sería así:



Tomamos 2 vértices en L_2 y un vértice en L_1.
Entonces el número de triángulos sería:

$$7\times C_2^5$$

O: A B C D E F G L_1

P Q R S T L_2

Tomamos 1 vértice en L_2 y dos vértices en L_1.
Aquí el número de triángulos sería:

$$5\times C_2^7$$

Luego:
N° de triángulos que puede formarse $:7\times C_2^5+5C_2^7=\dfrac{7\times5\times4}{1\times2}+5\times\dfrac{7\times6}{1\times2}$

$$=7(10)+5(21)=175$$

Ejemplo 7
¿De cuántas maneras distintas podemos elegir 3 alumnos de un total de 5 para que representen al salón?

Resolución:
N° de maneras $=C_3^5=C_2^5=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

COMBINACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS

Al atardecer de un caluroso día de verano, Ana, Betty y Cárol acuden a una fuente de soda a tomar refrescos. Debido a la gran demanda sólo quedaban refresco de cuatro sabores: limón, manzana, naranja y pera. Si a ninguna de ellas le gusta beber refrescos mixtos, ¿de cuántas maneras diferentes pueden adquirir los refrescos?

¡Cuidado!, podríamos pensar que la respuesta es C_3^4; pues éste sería el modo de escoger 3 sabores diferentes de entre un total de 4 sabores pero esto no ocurre así. Ya que dos de ellas o las tres podrían escoger el mismo sabor de refresco. Las combinaciones de 4 objetos, tomadas de 3 en 3 con las características ya mencionadas, serían como sigue:

l : limón
m : manzana
n : naranja
p : pera

l l l	l l m	m m l	n n l	p p l	l m n
m m m	l l n	m m n	n n m	p p m	l m p
n n n	l l p	m m p	n n p	p p n	l n p
p p p					m n p

Como podemos observar estamos tomando elementos repetidos; esto se debe a la preferencia por el sabor de cada muchacha. Así, por ejemplo, Ana y Betty podrían coincidir en pedir ambos refrescos de naranja o las tres podrían pedir simultáneamente refresco de pera, etc. Es así como la respuesta de este problema es: 20 maneras distintas y se representa así: $20 = CR_3^4$

Número de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3.

También podríamos decir que CR_3^4 es el número de maneras de escoger 3 objetos de 4 objetos distintos, siendo válido seleccionar el mismo objeto más de una vez.

Debemos aclarar que en esta última afirmación se está considerando que el número de objetos de cada clase es el suficiente como para poder tomar varias del mismo tipo en cada clase si así se requiere.

En general, CR_k^n es el número de maneras de escoger K objetos o elementos distintos o no de un total de n objetos distintos dados.

Observación:

Estamos ahora en un problema en el cual la situación por resolver será aquella donde la solución permite la repetición de elementos; pero sin interesar el orden entre los objetos en estudio. En general, tales situaciones consideran objetos pertenecientes a diferentes tipos de modo tal que los elementos pertenecientes a un determinado tipo son idénticas, es decir indistinguibles.

El enunciado general de estos problemas es: "Se tiene objetos o elementos de n tipos distintos. ¿Cuántas selecciones o combinaciones de k objetos se puede formar tomado de los n tipos, si se permite la repetición de elementos?

Para calcular CR_k^n, emplearemos la siguiente expresión:

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\times k!}$$

Ejemplo 1

Indica cuántas son las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z = 5$

Resolución:

$$CR_3^5 = C_5^{5+3-1} = C_5^7 = \frac{7!}{5!\times 2!} = 212$$

Ejemplo 2

En una heladería, se venden 5 tipos de helados ya envasados y Enmanuel quiere comprar 3 helados (para él y sus 2 hermanas) ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

Resolución:

$$CR_3^5 = C_3^{5+3-1} = C_3^7 = 35$$

Ejemplo 3

Se tiene 4 esferas iguales y 3 cajas. ¿De cuántas formas diferentes se puede guardar las 4 esferas en las 3 cajas, si se sabe que en una caja se pueda guardar una o más esferas.

Resolución:

$$CR_4^3 = C_4^{3+4-1} = C_4^6 = 15$$

PROBLEMA 1

Halle x en

$$1!\times2^2+2!\times3^2+3!\times4^2+.....+20!\times21^2=x!-2!$$

Resolución:

$$1!\times2^2 + 2!\times3^2 + 3!\times4^2 +...+ 20!\times21^2 = x!-2!$$

Agrupando adecuadamente:

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2! + 1!\times2^2}_{3!} + 2!\times3^2}_{4!} + 3!\times4^2}_{5!} + ... + 20!\times21^2}_{22!} = x!$$

$\therefore\ x = 22$

PROBLEMA 2

Si n representa el número de meses que contienen 30 días, calcule $E= C_2^n+P_2^n$

Resolución:

Se deduce que son once los meses que contienen 30 días, ya que febrero a lo más puede contener 29 días.

Entonces, $n=11$

Luego:

$$E=C_2^{11}+P_2^{11} \Rightarrow E=\frac{11!}{9!\times2!}+\frac{11!}{9!}$$

$$E=\frac{11!}{9!}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$E=11\times10\left(\frac{3}{2}\right)$$

$\therefore\ E=165$

PROBLEMA 3

Si $120.(120)^{24!}=(5!)^{(4!)!}.(5+x)!$, calcule $(x+2)!$

Resolución:

Sabemos que $\begin{cases}4!=24\\5!=120\end{cases}$ y reemplazando en la ecuación:

$5! \times \cancel{(5!)^{24!}} = \cancel{(5!)^{24!}}\times(5+x)! \Rightarrow 5! = (5+x)!$

De aquí se deduce que $x = 0$

Entonces $(0+2)! = 2! = 2$

PROBLEMA 4

Calcule el número de ceros en que termina 100!

Resolución:

Al desarrollar 100!, encontraremos ceros cuando aparezcan factores que sean múltiplos de 10 o cuando aparezcan factores, múltiplos de 5 (sin considerar ya los múltiplos de 10) por un número par. En otras palabras, tenemos 2 caminos. Veamos:

- $100! = 1\times2\times3\times...\times \underset{1°}{10} \times...\underset{2°}{20}\times...\times \underset{3°..}{30} \times...$
  $... \times \underset{...9°}{90} \times...\times \underset{10°\,y\,11°}{100}$

En total hay 11 ceros

- $100!= 1\times2\times3\times4\times \underset{1°}{\underset{5\times1}{5}} \times...\times \underset{2°}{\underset{5\times3}{15}} \times...\times \underset{3°\,4°}{\underset{5\times5}{25}} \times...$

$...\times \underset{5°}{\underset{5\times7}{35}} \times...\times \underset{6°}{\underset{5\times9}{45}} \times \underset{7°}{\underset{5\times10}{50}} \times \underset{8°}{\underset{5\times11}{55}} \times \underset{9°}{\underset{5\times13}{65}} \times \underset{10°\,11°}{\underset{5\times5\times3}{75}} \times...$

$...\times \underset{12°}{\underset{5\times17}{85}} \times.....\times \underset{13°}{\underset{5\times19}{95}}$

En total hay 13 múltiplos

de 5 que al ser multiplicados por un número par harán aparecer ceros.

Luego al desarrollar 100! habrá en total 11+13=24 ceros.

Forma Práctica. Buscamos los números múltiplos de 5, contenidos en 1 hasta 100 inclusive; mediante divisiones sucesivas y sumamos los cocientes. Así:

$$100 \,\underline{|\,5}\quad (20)\,\underline{|\,5}\quad (4)$$

Número de ceros en 100! = 20 + 4 = 24

PROBLEMA 5

Exprese los siguientes enunciados:

a. El producto de los 30 primeros números pares en términos de factoriales.

b. El producto de los 31 primeros números impares en términos de factoriales.

Resolución:

a. $P = 2\times4\times6\times8\times10\times.....\times58\times60$

$P = (1\times2)\times(2\times2)\times(3\times2)\times(4\times2)\times(5\times2)\times...$
$...\times(20\times2)\times(30\times2)$

$P = 1\times2\times3\times4\times...\times29\times30\times2^{30}=30!2^{30}$

$\therefore P = 30!\times2^{30}$

b. $I=1\times3\times5\times7\times9\times.....\times59\times61$

Multiplicamos y dividimos a la expresión I por los números en **negrita**

$$I = \frac{1\times\mathbf{2}\times3\times\mathbf{4}\times5\times\mathbf{6}\times7\times\mathbf{8}\times9\times...59\times\mathbf{60}\times61}{\underbrace{\mathbf{2}\times\mathbf{4}\times\mathbf{6}\times\mathbf{8}\times...\times\mathbf{58}\times\mathbf{60}}_{30!\,\times\,2^{30}\text{ de la parte a}}}$$

Luego $I = \dfrac{61!}{30!\times2^{30}}$

PROBLEMA 6

¿Cuántos números de 3 cifras necesitan al menos una cifra par o cero en su escritura?

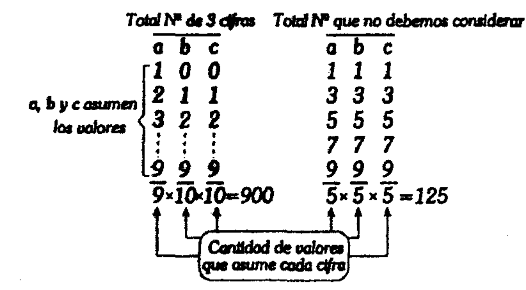
Resolución:

Podríamos resolver este problema de la siguiente manera.

Calculamos la cantidad total de números de 3 cifras y a este total le quitamos la cantidad de números de tres cifras formados sólo por impare (los números que no debemos considerar). ¿Qué nos quedará?.

Veamos:

Sea el número de tres cifras:



Luego, la cantidad de números de 3 cifras que utilizan al menos una cifra par o cero en su escritura es :

$$\begin{array}{r} 900- \\ \underline{125} \\ 775 \end{array}$$

PROBLEMA 7

¿Cuántos números capicúas de 5 cifras significativas existen, tales que el producto de éstas sea un cuadrado perfecto?

Resolución:

Si $\overline{abcba}$ un número capicúa de 5 cifras significativas es decir cifras diferentes de cero, el producto de cifras será $a^2\times b^2\times c$. Nos pide que este producto sea un cuadrado perfecto. Por lo tanto a y b puede tomar valores del 1 al 9 ya que como están elevados al cuadrado serán cuadrados perfectos. En cambio, C solamente puede tomar valores de 1, 4, 9 (cuadrados perfectos).

Entonces:

$\rightarrow (a)^2 \times (b)^2 \times c = \blacksquare^2$ ⇐ cuadrado perfecto

(a)²	(b)²	c
↓	↓	↓
1	1	1
2	2	4
3	3	9
⋮	⋮	
9	9	–
9	× 9	× 3
valores	valores	valores

Por lo tanto, la cantidad de números capicúas es $9 \times 9 \times 3 = 243$ números

PROBLEMA 8

¿Cuántos números de la siguiente forma existen?

a. $\overline{abc}_8$ $a \neq b \neq c \neq 0$

b. $\overline{a\left(\frac{b}{3}\right)(c+4)(2a)}$

Resolución:

a. $\overline{abc}_8$ $a \neq b \neq c \neq 0$

Número de valores asumidos por a, b y c: ↓↓↓ 7 6 5 ⇐ Pues todos deben ser diferentes

∴ Cantidad de números $= 7 \times 6 \times 5 = 210$

b. $\overline{a\left(\frac{b}{3}\right)(c+4)(2a)}$

	a	$\frac{b}{3}$	(c+4)(2a)
		0	0
a está restringido por la cifra de las unidades 2a	1	1	1
	2	2	2
	⋮	⋮	⋮
	4	9	4
	4	10	10
	↓	↓	↓
Cantidad de números	= 4	× 10	× 10 = 400

PROBLEMA 9

¿Cuántos números de la siguiente forma existen?

$$\overline{(4+a)\left(\frac{b}{5}\right)(c+7)(3d)(e-4)}$$

Resolución:

Anotemos el número de valores que asumen cada una de las cifras.

Esta letra asume valores desde –3 hasta 5

$$\overline{(4+a)\left(\frac{b}{3}\right)(c+7)(3d)(e-4)}$$

$9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90\,000$ números

valores valores valores valores valores

PROBLEMA 10

¿Cuántos números de 4 cifras existen tal que el producto de sus cifras sea 14?

Resolución:

Sea $\overline{abcd}$ el número de 4 cifras; por condición, $a \times b \times c \times d = 14 = 2 \times 7 \times 1 \times 1$. Luego, lo que tenemos que hacer es calcular cuántos números de 4 cifras se puede formar con los dígitos 1, 1, 2 y 7 (aquí el orden es muy importante). Estamos frente a una permutación de 4 elementos, uno de ellos se repite 2 veces.

Así: $P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

∴ 12 números

PROBLEMA 11

¿Cuántos números de tres cifras menores que 436 puede obtenerse con los dígitos 1,2,3,4,5,6 y 7, sabiendo que las cifras pueden repetirse?

Resolución:

Sea $\overline{abc}$ el número de 3 cifras

- Consideremos $\overline{abc} < 400$

Veamos:

a	b	c
	1	1
1	2	2
2	⋮	⋮
3	7	7

$\underset{valores}{3} \times \underset{valores}{7} \times \underset{valores}{7} = 147$ números

- Ahora consideremos los números mayores que 400 pero menor que 430.

4	b	c
constante	1	1
	2	2
		⋮
		7

$\underset{valores}{2} \times \underset{valores}{7} = 14$ números

- Por último, los que faltan (mayores a 430 pero menores a 436).

431, 432, 433, 434 y 435

Luego, la cantidad de números pedidos es
147+14+5=166 números

PROBLEMA 12

¿Cuántos productos diferentes de 3 factores pueden formarse con los números 7,9,11,13 y 17?

Resolución:

Si tenemos tres factores a, b y c, entonces el orden de los factores no altera el producto final a×b×c. Luego, en este caso, el orden no interesa, lo que tenemos que hacer es seleccionar 3 factores (grupo) de los 5 que tenemos; es decir, estamos ante una combinación.

Luego: $C_3^5 = \frac{5\times4}{1\times2} = 10$

PROBLEMA 13

Si $C_{11}^n = C_9^n$, calcule P_2^n

Resolución:

Primero debemos hallar el valor de n en el dato:

Recordemos que $C_a^n = C_b^n$

Si y solo si I. $a = b$
o II. $a+b = n$

Entonces, $C_{11}^n = C_9^n$, si $n = 11+9 = 20$

$\therefore n = 20$

Luego:

$$P_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{18!\times19\times20}{18!} = 380$$

PROBLEMA 14

El número de permutaciones de x letras diferentes, tomadas de cuatro a en cuatro, es al número de permutaciones de las mismas x letras, tomadas de cinco en cinco como 1 es a 8. Halle x.

Resolución:

Del problema se deduce:

$$\frac{P_4^x}{P_5^x} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8 \times P_4^x = P_5^x$$

Desarrollando:

$$\Rightarrow 8.\frac{x!}{(x-4)!} = \frac{x!}{(x-5)!}$$

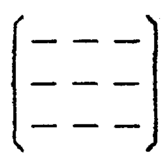
$$\Rightarrow \frac{8}{(x-5)!(x-4)} = \frac{1}{(x-5)!}$$

$$8 = x-4$$

$$\therefore 12 = x$$

PROBLEMA 15

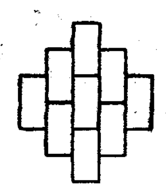
De cuántas maneras diferentes se puede formar una matriz de orden 3 (como se indica en la figura) con los siguientes elementos: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 de manera que cada cifra intervenga una sola vez?



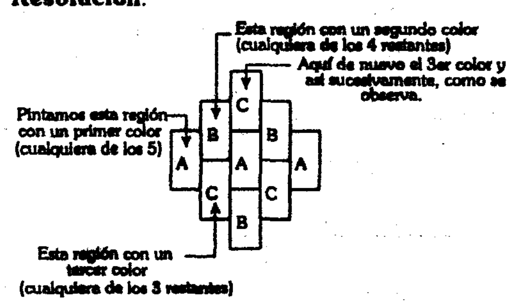
Podemos apreciar que hay 9 posiciones en la matriz y que cada uno de los 9 números dados ocupan una de las posiciones; el orden es de suma importancia, porque tendremos una permutación de 9 elementos. Así: P(9)=9!=362780

PROBLEMA 16

Se dispone de 5 colores diferentes para pintar la siguiente figura para que los cuadrados vecinos tengan colores diferentes. ¿De cuántas maneras puede cumplirse dicho objetivo, si el número de colores utilizados en cada caso es mínimo?



Resolución:



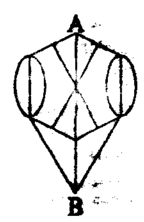
Nos ha bastado 3 colores, como mínimo para pintar la figura dada. Por lo tanto maneras de escoger 3 colores para pintar la figura.

1° color   2° color   3° color

Luego: $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneras

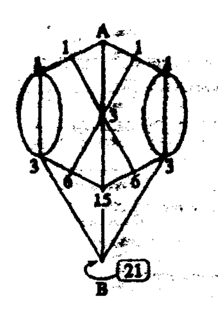
PROBLEMA 17

¿De cuántas maneras distintas se puede llegar al punto B partiendo de A, si siempre se debe ir avanzando hacia la meta?



Resolución:

Utilizando el principio de adición y contando las maneras de llegar a cada punto.



Luego, hay 21 maneras diferentes de llegar al punto B según las condiciones dadas.

PROBLEMA 18

Una compañía aérea debe realizar diariamente 5 viajes al Cusco, 3 a Trujillo y 2 a Iquitos. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar dicho itinerario?

Resolución:

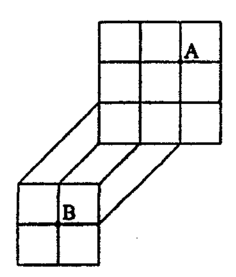
Lo que se desea es realizar el siguiente rol:
CCCCCTTTII

Como podemos deducir, el orden interesa pero se están repitiendo algunos viajes.

Luego, $P^{10}_{\underset{C\ T\ I}{5\ 3\ 2}} = \dfrac{10!}{5! \times 3! \times 2!} = 2520$

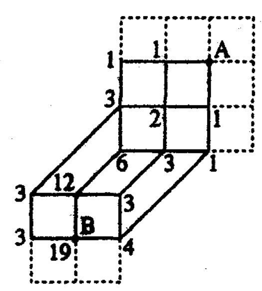
PROBLEMA 19

¿De cuántas maneras distintas se puede ir de A hacia B de modo que siempre avance respecto a su meta?



Resolución:

Vamos a aplicar aquí el principio de adición, teniendo cuidado de contar las maneras de llegar a cada punto. En el esquema mostrado a continuación, se aprecia los caminos para recorrer así como los que no interesan (líneas punteadas).



Luego, hay 19 formas distintas.

PROBLEMA 20

Melissa desea comprar un televisor, para lo cual ha consultado en 3 tiendas comerciales. La primera le ofrece 3 sistemas de crédito; la segunda, 4 sistemas de crédito distintos a las 2 primeras tiendas. ¿De cuántas maneras diferentes puede comprar el televisor?

Resolución:

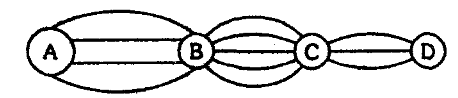
Para la compra del televisor ella se puede dirigir a la:

$$\text{Total: } \underbrace{\overset{1^{\circ}T}{3} + \overset{\text{ó } 2^{\circ}T}{4} + \overset{\text{ó } 3^{\circ}T}{4}}_{\text{formas de crédito}} = 11 \text{ maneras}$$

PROBLEMA 21

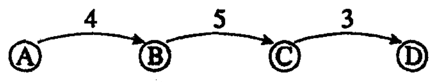
En la figura, A,B,C y D son ciudades y cada línea es un camino. Si una persona desea viajar, ¿de cuántas maneras puede elegir su recorrido?. Se sabe:

a. Sale de A hacia D (pasando por B y C sin retroceder).
b. Sale de A hacia D luego regresa hacia A.
c. Sale de A hacia D luego regresa hacia A sin pasar de nuevo por el mismo recorrido.



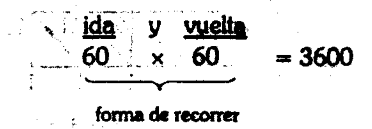
Resolución:

a. En el esquema se muestra el número de caminos entre A, B, C y D:



Luego el números de recorridos es $4 \times 5 \times 3 = 60$

b. Ahora el trayecto es de A hacia D, luego de D hacia A; es decir, ida y vuelta, entonces:



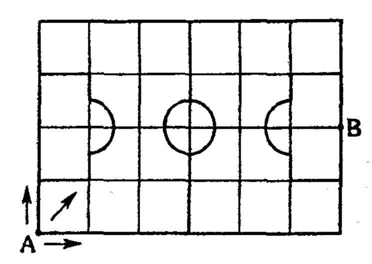
$$\underbrace{\overset{\text{ida}}{60} \times \overset{\text{vuelta}}{60}}_{\text{forma de recorrer}} = 3600$$

c. No regresa por el mismo recorrido de ida por eso sólo le queda 59 recorridos de los 60 que hay en total.

$$\underbrace{\overset{\text{ida}}{60} \times \overset{\text{vuelta}}{59}}_{\text{forma de recorrer}} = 3540$$

PROBLEMA 22

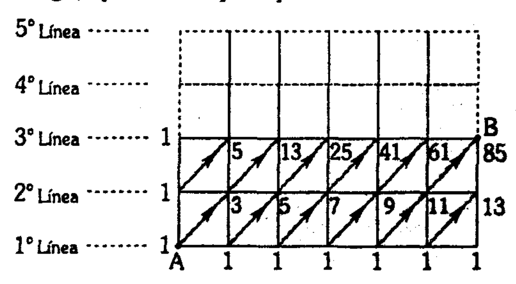
Luis, jugador estrella del Cantolao, debe recorrer la cancha del Nacional de A a B, según los movimientos indicados por la flecha. ¿De cuántas maneras es posible que Luis haga dicho recorrido?



Resolución:

Debemos tener cuidado porque *no podemos llegar hasta la cuarta ni hasta la quinta línea*; pues si lo hiciéramos, tendríamos que hacer un recorrido como ↘ o ↓, lo cual por condición del problema no está permitido; sólo podemos hacerlo así: ↑, →, ↗.

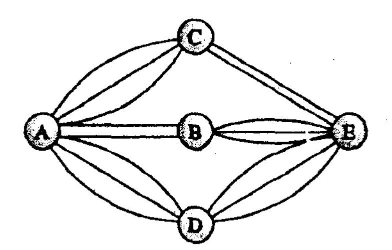
Luego, aplicando el principio de adición:



∴ Hay 85 maneras distintas de llegar desde A hasta B, bajo las condiciones dadas.

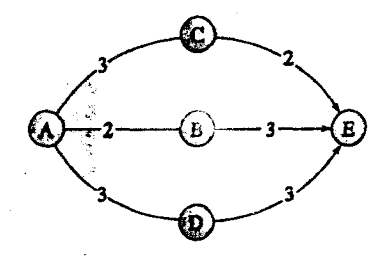
PROBLEMA 23

¿De cuántas maneras distintas se puede viajar de A hacia E siempre avanzando?



Resolución:

El siguiente esquema muestra el número de rutas que unen cada una de las ciudades.



De acuerdo a ello el número de formas de llegar hasta "E" partiendo de A será:

$$3\times2+2\times3+3\times3=21$$

PROBLEMA 24

Un bote va a ser tripulado por 8 hombres de los cuales, Manuel y Pedro reman en el lado derecho y Juan en el lado izquierdo. ¿De cuántas maneras puede ordenarse la tripulación, si en cada lado se ubican 4 hombres?

Resolución:

Lado Izquierdo
Juan rema sólo en este lado y puede ubicarse en cualquiera de los 4 asientos.

Lado derecho
Manuel y Pedro sólo pueden remar en este lado. Así por ejemplo Manuel se ubica en cualquiera de los 4 lugares y Pedro en cualquiera de los 3 lugares restantes.

Luego:

$$\underset{4}{\underline{M}}\times\underset{3}{\underline{P}}\times\underset{4}{\underline{J}}\times\underbrace{\underset{5}{\underline{H_1}}\times\underset{4}{\underline{H_2}}\times\underset{3}{\underline{H_3}}\times\underset{2}{\underline{H_4}}\times\underset{1}{\underline{H_5}}} = 5760$$

Los 5 hombres restantes se sientan en cualesquiera de los 5 asientos vacios

PROBLEMA 25

Tres alumnas desean escuchar en la misma carpeta el seminario de Razonamiento Matemático. Éste se va a realizar en 2 locales, cada uno de 5 aulas y cada aula con 12 carpetas. ¿De cuántas maneras podrían ubicarse si cada carpeta tiene capacidad para 5 alumnos?

Resolución:
Hay 3 alumnas
Locales: 2
Cada local. 5 aulas
Cada aula: 12 carpetas

⇒ Total de carpetas= 2×5×12=120

$$(P_3^5)\times 120 = \frac{5!}{2!}\times 120 = 7200$$

P_3^5: **Nº de formas de acomodarse 3 alumnas en una banca de 5 asientos**
120: Nº de carpetas

PROBLEMA 26
Un producto es armado en 3 etapas, disponiéndose para la primera etapa 3 líneas de armado, en la segunda etapa, 5 líneas de armado y en la tercera etapa, de 4 líneas. ¿De cuántas maneras distintas puede armarse el producto?

Resolución:
Aplicamos el principio de multiplicación:
1° LINEA y 2° LINEA y 3° LINEA

$$3 \times 5 \times 4 = 60$$

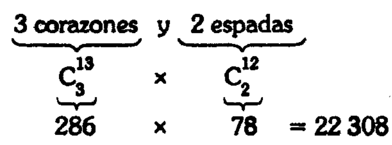
El producto puede armarse de 60 maneras distintas.

PROBLEMA 27
De una baraja de 52 cartas, se extrae al azar 5 de ellas. Calcula de cuántas formas se puede obtener:

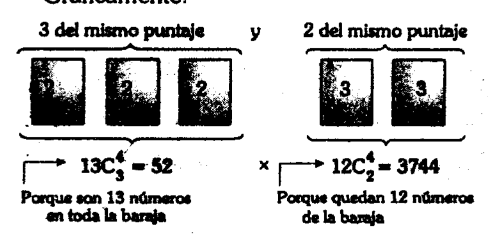
a. 3 corazones y 2 espadas
b. *Full* (3 del mismo puntaje y las restantes también).

Resolución:

a. Queremos obtener **3** corazones y 2 espadas. Se sabe que en una baraja siempre hay 4 figuras distintas como corazones, tréboles, espadas y cocos (oro o diamante) además cada uno se repite 13 veces con una numeración correlativa desde el 1 o AS hasta el 13 o K.
Luego:
Como sólo queremos 3, de los 13 corazones que hay en la baraja, entonces el número de maneras distintas de obtener esto es C_3^{13}, lo mismo hacemos para obtener las 2 espadas.



b. En este caso queremos que 3 cartas tengan el mismo puntaje y las otras 2, también. Se entiende que los puntajes entre sí deben ser distintos; puesto que en una baraja sólo hay 4 cartas que son del mismo puntaje.
Gráficamente:

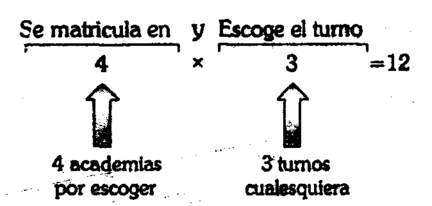


Hay 52×3744 = 194688 formas diferentes de obtener full

PROBLEMA 28
Un alumno para prepararse tiene que escoger entre 4 academias y cada una de éstas tiene turnos de mañana, tarde y noche. ¿De cuántas maneras diferentes podrá matricularse?

Resolución:

Por el principio de multiplicación:



tiene 12 maneras diferentes para matricularse.

PROBLEMA 29

Halle el número de permutaciones con n elementos, en los cuales a y b (dos de dichos elementos) no pueden estar juntos.

Resolución:

Calculemos el número de permutaciones de todos los n elementos y luego hallemos el número de permutaciones de los n elementos; pero de los cuales 2 en particular (a y b) están siempre juntos. Entonces, si al primer resultado encontrado, le restamos el segundo obtendremos las permutaciones donde a y b **no se** encuentren juntos.

Veamos:

N° total de permutaciones de n elementos:

$Pn = n!$

N° de permutaciones cuando a y b estén juntos:

1° 2° 3° 4° ...... n°

(a b) ○ ○ ...... ○

2 elementos juntos — n−2 elementos

$\therefore \quad 2!\,P(n-1) = 2!\,(n-1)!$

Restando:

$\Rightarrow \quad n! - 2(n-1)!$

$(n-1)! \times n - 2(n-1)!$

Por lo tanto, el número de permutaciones de n elementos donde 2 de ellos nunca estarán juntos será:

$\therefore \quad (n-1)! \times (n-2)$

PROBLEMA 30

¿De cuántas maneras diferentes se puede colocar 9 señoritas en una fila, si dos señoritas en particular siempre van a estar juntas?.

Resolución:

Este problema guarda relación con el siguiente: por ello, entendamoslo bien.

Dos elementos (a y b) de los 9 elementos que hay deben estar juntos (forman un solo elemento)

1° 2° 3° 4° ...... 8° 9°

(a b) ○ ○ ...... ○ ○

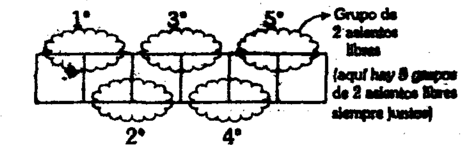
2 elementos juntos — 7 elementos

Luego, $2! \times P(8) = 2! \times 8! = 80640$

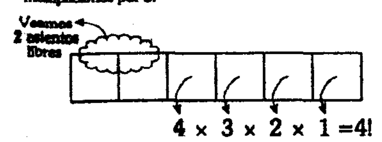
PROBLEMA 31

¿De cuántas formas se podrán ubicar 4 personas en una fila de 6 asientos, dejando los dos asientos libres, siempre juntos?.

Resolución:



Analicemos un solo caso en donde 2 elementos están juntos y luego le multiplicamos por 5.



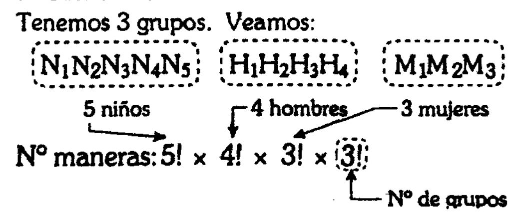
Luego el N° de formas es $5 \times 4! = 120$

PROBLEMA 32

Si cinco niños, cuatro hombres y tres mujeres van a sentarse en una fila de 12 asientos, ¿de cuántas maneras diferentes se podrán ubicar para que los niños siempre permanezcan juntos entre sí, lo mismo que los hombres y las mujeres?

Resolución:

Tenemos 3 grupos. Veamos:



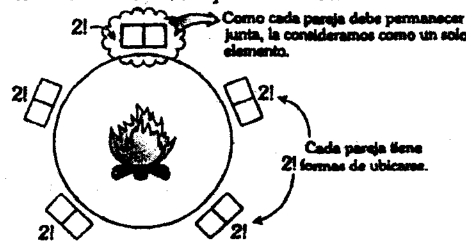
$\therefore$ N° de maneras = 103680

PROBLEMA 33

¿De cuántas maneras distintas se pueden ubicar 5 parejas de esposos alrededor de una fogata, de tal modo que cada pareja permanezca siempre junta?

Resolución:

Estamos frente a una permutación circular.



N° de maneras = $Pc_5 \times (2!)^5 = 4!.\,2^5$

N° de maneras = 768

PROBLEMA 34

Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 niñas y 3 niños. ¿De cuántas formas podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las niñas?.

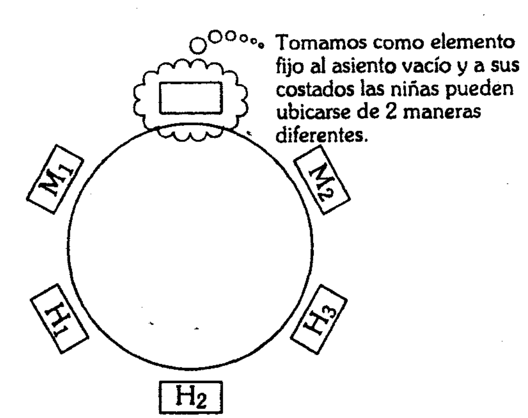
Resolución:

Comenzamos en:

M : mujer

H : hombre

De nuevo otra permutación circular:



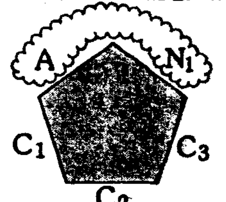
Luego el número de maneras es $3! \times 2! = 12$

PROBLEMA 35

Antonio invita a su novia y a sus tres futuros cuñados a un almuerzo, que se realiza en un restaurante cuyas mesas tenían la forma de un pentágono regular. ¿De cuántas maneras distintas se podrán ubicar, si Antonio y si su novia siempre están juntos?

Resolución:

Fijamos a los novios ellos se ordenan de 2! maneras



$2!\,Pc_4 = 3! \times 2! = 12$ maneras diferentes

PROBLEMA 36

En una caja se tiene 2 fichas rojas, 4 blancas, 3 azules, 1 verde y 1 negra. ¿De cuántas maneras diferentes se les puede ordenar, si se coloca una a continuación de otra?

a. En forma de línea recta

b. En forma de círculo.

Resolución:

5 fichas rojas	4 fichas blancas	3 fichas azules	1 ficha verde	1 ficha negra
RRRRR	BBBB	AAA	V	N

a. $P^{14}_{\underset{R}{5}\ \underset{B}{4}\ \underset{A}{3}} = \dfrac{14!}{5!\times4!\times3!} = 5045040$

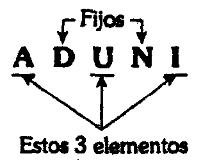
b. Permutación circular con elementos repetidos: $\dfrac{13!}{5!\times4!\times3!} = 360360$

PROBLEMA 37

Si se tiene la palabra ADUNI, ¿cuántos ordenamientos podrá formarse con todas las letras a la vez de manera que las consonantes ocupen sus mismos lugares iniciales?

Resolución:

Ubiquemos las letras de la palabra:



Luego: $\underset{3}{\square}$ D $\underset{2}{\square}$ N $\underset{1}{\square}$

$3 \times 2 \times 1 = 6$ ordenamientos

PROBLEMA 38

¿Cuántas ordenaciones distintas cualesquiera se pueden formar con todas las letras de la palabra ASOCIACIÓN, si las letras S y N deben estar siempre juntas?

Resolución:

Asociación tiene 10 letras y algunas se repiten. Según las condiciones pedidas, tendremos:

Luego:

$$2!\times P^{9}_{\underset{A}{2}\ \underset{I}{2}\ \underset{C}{2}\ \underset{O}{2}} = 2!\times\frac{9!}{2!\times2!\times2!\times2!} = 45360$$

PROBLEMA 39

Calcule el número de arreglos diferentes que se puede formar con todas las letras de la palabra INGENIERO de tal modo que todas las vocales estén juntas.

Resolución:

La palabra INGENIERO tiene 9 letras de las cuales 5 son vocales. Veamos:

[IIEEO] NNGR

todas las vocales deben estar juntas (forman un bloque)

Así apreciamos 5 elementos, es decir, las 4 letras (2 repetidas: la letra N) y el bloque.

Luego:

N° de arreglos: $P^{5}_{\underset{N}{2}} \times P^{5}_{\underset{I-E}{2\,2}}$ (Letras "N" repetidas; Letras "I, E" repetidas)

N° de arreglos: $\dfrac{5!}{2!}\times\dfrac{5!}{2!\times2!} = 1800$

PROBLEMA 40

Se tiene 3 libros diferentes de Razonamiento Matemático, 4 libros diferentes de Razonamiento Verbal y 2 libros diferentes de Literatura. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ubicar en un estante de manera que los libros del mismo curso permanezcan juntos?

Resolución:

Libros de R.M.	Libros de R.V.	Libros de Literatura
$M_1M_2M_3$	$R_1\,R_2\,R_3\,R_4$	$L_1\ L_2$

N° maneras distintas $= 3!\times3!\times4!\times2! = 1728$ (3! : son 3 grupos)

Problemas Propuestos

1. Adquiere destreza con el manejo de las factoriales de un número resolviendo los siguientes ejercicios:

   a. Simplifica $M = \left(\dfrac{4!-5!+6!}{5!+6!-7!}\right)\times 175$

   b. Calcule el valor de a en

   $$\frac{a!(a!-3)}{a!+4}=18$$

   De como respuesta el valor de M +a.

A) – 26 B) 4 C) 22
D) – 22 E) 32

2. Halle M – n!! si

$$M^{-1}=\frac{7!+8!+9!}{9!(7!+8!)}$$

y además

$$1\times3\times5\times7\times.....\times(2n-1)=\frac{11\times12\times13\times...\times20}{2^{10}}$$

A) 36480 B) 35220 C) 40320
D) 33840 E) 14720

3. ¿Cuántos números de la forma

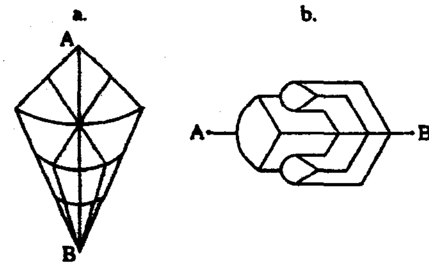
$$\overline{\left(5-\frac{a}{2}\right)(3-b)(c+4)\left(\frac{a+4}{2}\right)}$$ existen?

A) 400 B) 700 C)9000
D) 900 E) 970

4. ¿Cuántos números de 4 cifras significativas existen de modo que el producto de sus cifras sea un número par?

A) 5378 B) 8357 C) 7583
D)8753 E) 8375

5. ¿De cuántas maneras se puede ir de la ciudad A a la ciudad B, siempre avanzando?



A) 47;10 B) 21;10 C) 40;9
D) 52,31 E) 91;18

6. Un funcionario desea viajar de Lima a Tacna y tiene a su disposición 3 líneas aéreas y 5 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras diferentes puede realizar dicho viaje?

A)15 B) 2 C) 8
D)4 E) 30

7. De una ciudad A a otra ciudad B hay 6 caminos diferentes ¿De cuántas maneras se puede hacer el viaje de ida y vuelta, si en el regreso no puede tomar el camino de ida.

A) 12 B) 42 C) 25
D) 36 E) 30

8. Un grupo de 5 amigos se va de paseo, en un auto que tiene 2 asientos adelante y 3 atrás. ¿De cuántas formas se podrán ubicar, si sólo 2 de ellos saben manejar?

A) 10 B) 48 C) 16
D) 24 E) 120

9. Si se tiene 4 libros de aritmética y 3 libros de álgebra, ¿de cuántas formas se podrá ubicar en un estante donde sólo entran 5 libros y deben estar alternados?

A) 144 B) 72 C) 216
D) 220 E) 352

10. Rosa tiene 3 anillos distintos. ¿De cuántas maneras puede colocarlos en sus dedos de la mano izquierda, colocando sólo un anillo por dedo, sin contar el pulgar? (Considere una sola forma de colocación en cada dedo)

A) 36 B) 48 C) 16
D) 24 E) 6

11. Anita tiene 6 blusas de colores diferentes y 5 minifaldas también de colores distintos. ¿De cuántas maneras diferentes puede lucir ambas prendas a la vez, si la blusa azul y la minifalda blanca las usa siempre juntas y la minifalda roja con la blusa negra nunca las usa juntas?

A) 25 B) 36 C) 100
D) 64 E) 49

12. Un equipo de voley se sienta a dialogar en una mesa circular. ¿De cuántas formas se puede sentar sus integrantes si 3 de ellos siempre deben estar juntos?

A) 22 B) 24 C) 12
D) 36 E) 6

13. Un bote de 8 remos será tripulado por un grupo, seleccionado de 14 hombres, los cuales 3 pueden llevar el timón, pero no pueden remar, el resto puede remar pero no llevar el timón. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo, si 2 de los hombres sólo pueden remar en el lado derecho, pero no ambos integrando el mismo grupo? (Cada remo es utilizado por un hombre a cada lado).

A) 15 (9!) B) 30 (8!) C) 23 (7!)
D) 23(8!) E) 30 (9!)

14. Norma tiene 5 aretes diferentes y para usarlos todos se hace 2 perforaciones en la oreja derecha y 3 perforaciones en la de la izquierda. ¿De cuántas maneras diferentes puede lucir todos los aretes?.

A)1440 B) 720 C) 120
D) 640 E) 210

15. Si disponemos de las fichas de ajedrez (sólo las blancas) y queremos ordenarlas en una fila, ¿de cuántas maneras se puede realizar este ordenamiento?

A) $2\left(\dfrac{15!}{8!}\right)$ B) $\left(\dfrac{15!}{8!}\right)$ C) 23!
D) 16! E) 15!

16. Un mozo debe servir 10 vasos diferentes de cerveza y gaseosa en una mesa donde hay 6 caballeros y 4 damas, sabiendo que los vasos de cerveza son para los caballeros y los de gaseosa, para las damas. Calcule la cantidad de maneras diferentes en que el mozo puede realizar la distribución?

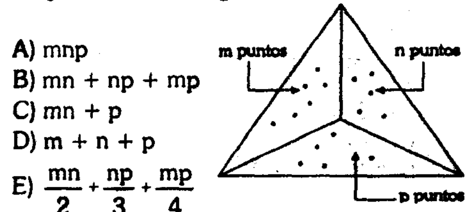
A) 205 B) 450 C) 210
D) 120 E) 135

17. ¿Cuántas señales diferentes puede emitirse con tres focos rojos, cuatro amarillos y tres azules en una serie navideña que contiene diez portafocos?

A) 8400 B) 4200 C) 1316
D) 2632 E) 2100

18. Calcule el número total de segmentos que se puede formar en el siguiente gráfico al unir los puntos de una región con los de otra.

A) mnp
B) mn + np + mp
C) mn + p
D) m + n + p
E) $\dfrac{mn}{2}+\dfrac{np}{3}+\dfrac{mp}{4}$



19. ¿Cuántos ordenamientos diferentes puede obtenerse con las letras de la palabra blanquiazul?

A) $\dfrac{11!}{8}$ B) $\dfrac{11!}{6}$ C) $\dfrac{12!}{5}$
D) $\dfrac{10!}{8}$ E) $\dfrac{10!}{5}$

20. Calcule el número total de ordenaciones diferentes que se puede formar con todas las letras, a la vez, de la palabra KATTII, de manera que las vocales iguales estén juntas.

A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60

21. ¿Cuál será el número de letras, de una palabra sabiendo que el número de combinaciones tomadas de 2 a 2 es igual al de combinaciones tomadas de 3 a 3, como 3 es a 5?

A) 6 B) 7 C)8
D) 9 E) 10

22. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 4 parejas de esposos en una mesa circular para jugar casino, si estas parejas juegan siempre juntas?

A) 364 B)50 C) 24
D) 124 E) 96

23. Un club tiene 15 miembros, (10 hombres y 5 mujeres) ¿Cuántos comités de 8 miembros se pueden formar, si cada comité debe tener 3 mujeres?

A) 2520 B) 2585 C) 1348
D) 2250 E) 5258

24. Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 mujeres y 3 hombres. ¿De cuántas formas podrán ubicarse, si el asiento vacío debe quedar entre las dos mujeres?

A) 6 B) 12 C) 32
D) 24 E) 48

25. Hay dos obras de 3 volúmenes cada una y otras dos de 2 volúmenes cada una. ¿De cuántas maneras puede colocarse los 10 libros en un estante, si deben quedar de tal manera que no se separen los volúmenes de la misma obra?

A)5634 B) 1465 C) 6345
D) 3456 E) 4616

26. ¿De cuántas maneras pueden sentarse correctamente 2n personas alrededor de una mesa circular de modo que n de ellas siempre queden juntas?

A) n^2 B) $2n!$ C) $(n^2)!$
D) $2(n!)$ E) $(n!)^2$

27. En una tienda hay 6 camisas y 5 pantalones que me gustan. Si decido comprar 3 camisas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo escoger las prendas que me gustan?

A) 100 B) 120 C)200
D) 240 E) 480

28. ¿Cuántas comisiones integradas por un chico y una chica puede formarse de cinco chicos y ocho chicas, si cierto chico rehúsa trabajar con dos chicas en particular?

A) 38 B) 40 C) 42
D) 44 E) 46

29. Luchito desea repartir 12 cartas diferentes a Lucía, María y Aurora en ese orden, dándole a cada una 3 cartas respectivamente. ¿De cuántas maneras diferentes podrá hacer la repartición si debe sobrarle siempre 3 cartas?

A) $\frac{12!}{108}$ B) $\frac{11!}{108}$ C) $\frac{9!}{3}$
D) 9! E) 12!

30. Se escoge un comité de 4 personas de 5 varones y 6 mujeres. ¿De cuántas maneras distintas se podrá escoger dicho comité si entre ellos debe haber por lo menos 2 hombres?

A) 300 B) 420 C)125
D) 215 E) 452

31. Si se tiene 4 consonantes diferentes y 3 vocales diferentes, ¿cuántos arreglos de 4 letras se pueden formar donde intervengan 2 vocales diferentes y 2 consonantes diferentes?

A) 36 B) 432 C) 144
D) 24 E) 720

32. Se tiene 8 plátanos, 6 manzanas y 4 naranjas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede hacer una ensalada de frutas, con 8 de éstas pero con la condición de que 4 sean plátanos, entre ellos uno de isla insustituible (único entre los demás), además manzanas y naranjas en igual número?

A) 3051 B)5130 C) 1530
D)1350 E) 3150

33. ¿Cuántos sonidos distintos pueden producirse con las ocho teclas de un piano si sólo se tocan 4 de ellas y simultáneamente?

A) 70 B) 48 C) 36
D) 50 E) 64

34. De un grupo de 8 hombres y 7 mujeres, ¿cuántos grupos mixtos de 7 personas se puede formar sabiendo que en cada grupo hay 4 varones y el resto son damas?

A) 2480 B) 4520 C) 2450
D) 4250 E) 5240

35. El asta de la bandera de un barco tiene tres posiciones en las que puede colocarse una bandera. Suponiendo que el barco lleva cuatro banderas (diferentes) para hacer señales, ¿cuántas señales diferentes puede hacerse con dos banderas?

A) 72 B) 24 C) 48
D) 36 E) 12

36. ¿Cuántos partidos de fútbol se juega en total en un campeonato que se juega a dos ruedas? Supongamos que participan 20 equipos.

A) 190 B) 380 C) 830
D) 890 E) 910

37. Diego tiene 8 bolitas negras y Rudy, 5 bolitas rojas. Si quieren intercambiar sus bolitas, de modo que se intercambien grupos de al menos 2 pero no más de 4, ¿cuántos intercambios posibles se darán?

A) 1180 B) 980 C) 1345
D)1980 E) 1520

38. Si de 10 artículos, 6 de ellos son defectuosos, ¿de cuántas maneras podemos escoger 3 artículos de tal modo que entre ellos hay al menos 2 defectuosos?

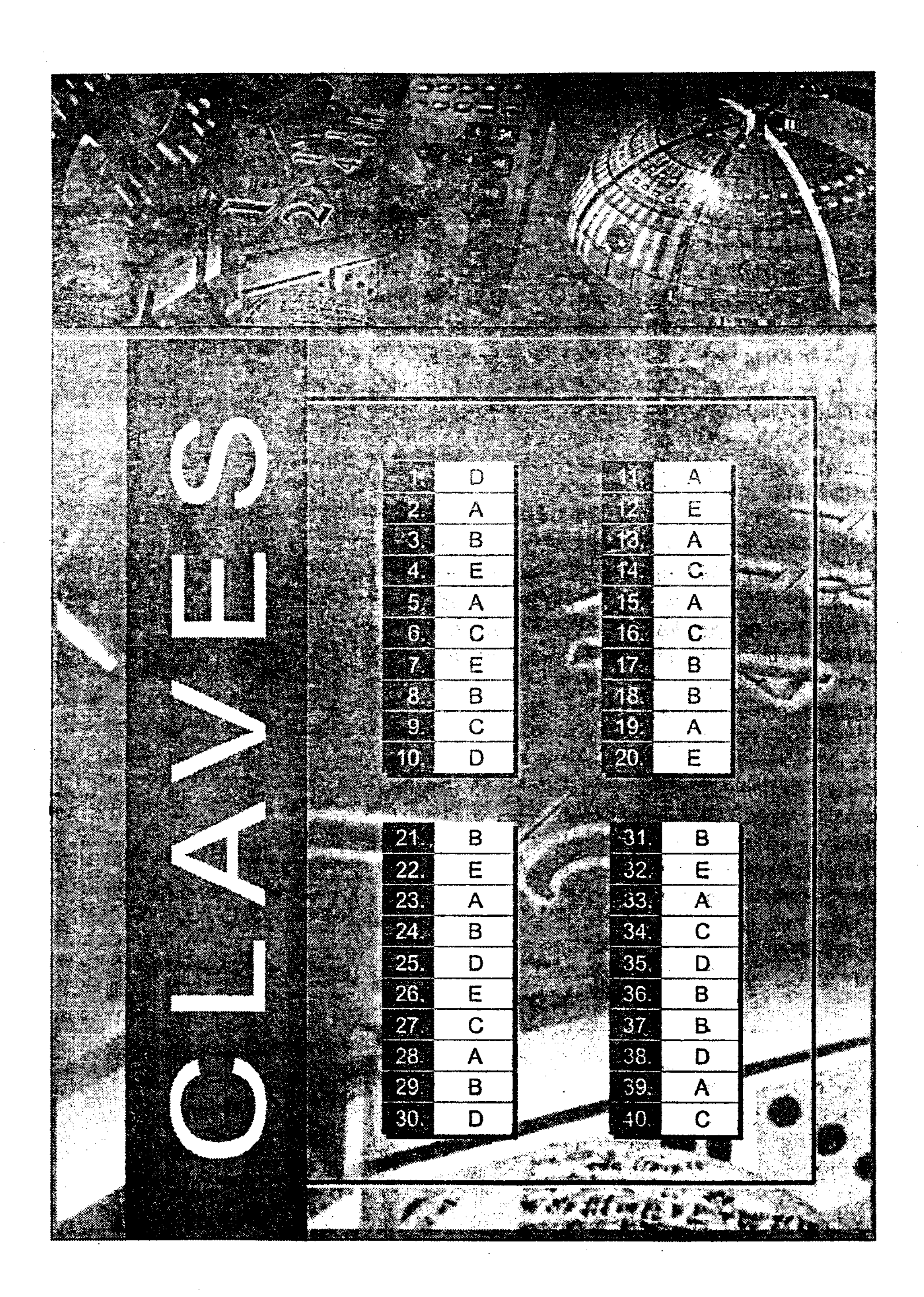
A) 60 B) 50 C) 70
D) 80 E) 90

39. El número de permutaciones de x objetos tomados de 6 en 6, es 720 veces el número de combinaciones de esos mismos objetos agrupados 4 a 4. Halle el valor de x.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

40. ¿Cuántos números enteros y desiguales, mayores que 10 y menores que 100, se puede formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?

A) 72 B) 58 C) 64
D) 50 E) 35



CLAVES

1.	D	11.	A
2.	A	12.	E
3.	B	13.	A
4.	E	14.	C
5.	A	15.	A
6.	C	16.	C
7.	E	17.	B
8.	B	18.	B
9.	C	19.	A
10.	D	20.	E

21.	B	31.	B
22.	E	32.	E
23.	A	33.	A
24.	B	34.	C
25.	D	35.	D
26.	E	36.	B
27.	C	37.	B
28.	A	38.	D
29.	B	39.	A
30.	D	40.	C

Pierre Simón Marqués de Laplace

El interés por la probabilidad aumentó, estimulado por las investigaciones de eminentes matemáticos como Leibniz, Jacques Bernoulli, De Moivre, Euler, el marqués de Condorcet y, sobre todo, Laplace. La obra de este último hizo época, pues en su teoría analítica de la probabilidad, llevó el cálculo a un punto tal que Clerk Maxwerll pudo decir que es "matemática para hombres prácticos".

Era en verdad notable, como escribió Laplace, que "una ciencia que se inició con las consideraciones del juego, se hubiese elevado a los objetos más importantes de la sabiduría humana".

Laplace nació en Beaumont-en-Auge en 1749 y murió en París el año 1827. Se dedicó a la Astronomía, la Física y la Matemática. Fue autor de las obras Mecánica celeste, El sistema del mundo y teoría analítica de la probabilidad.

En los siglos XVIII y XIX, cuando la ciencia y la filosofía estaban casi por completo bajo el influjo de ideas mecanicistas, se supuso con entusiasmo que el cálculo de la probabilidad supliría toda "ignorancia y flaqueza de la mente humana". El cálculo ayudaría a iluminar aquellas regiones del conocimiento donde el faro de la ciencia no alumbraba aún muy brillantemente.

Es fácilmente comprensible que se hiciera popular una filosofía materialista, conveniente y dogmática, en un mundo que había sido testigo de una sucesión de proezas científicas, desde Kepler a Galileo y desde Newton a Laplace. El concepto materialista está basado en una fe intuitiva en la regularidad y el orden periódico en que se cumplen los fenómenos naturales, desde el comportamiento de los átomos hasta el nuestro al levantarnos por la mañana. Los hombres esperaban, y la historia de la ciencia hasta hacía muy poco los alentaba a creerlo, que la ciencia explicaría todos los milagros y revelaría todos los secretos, que el futuro estaba contenido en el pasado y, que, por lo tanto, debía parecerse a él, y en consecuencia, las experiencias del pasado ayudarían a predecir el futuro.

Como representante sobresaliente de estos puntos de vista, Laplace depositaba mucho mayores esperanzas en los límites de los conocimientos que en el modesto crepúsculo de la mediocridad en el que la mente humana, según opinaba Locke, tendría que andar siempre a tientas.

"Es nuestro deber entonces", escribió Laplace, "considerar el estado actual del Universo como un efecto de su anterior estado y como la causa de uno que lo sucederá. Si fuera dable tener por un instante una inteligencia que pudiera abarcar todas las fuerzas que animan a la naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen -una inteligencia suficientemente enorme como para someter al análisis estos datos- comprendería en la misma fórmula el movimiento de los cuerpos más grandes del Universo y el del átomo más liviano; para ella nada sería incierto y el futuro, así como el pasado, se presentarían ante sus ojos".

Se debe a Laplace la definición clásica de probabilidad: "Cuando un experimento aleatorio es simétrico, es decir, que en un número muy grande de pruebas los distintos sucesos ocurren en igual frecuencia la probabilidad de un suceso se obtiene dividiendo el número de casos favorables al suceso entre el número total de casos posibles".

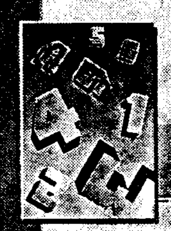
Esta definición, sin embargo, solo es aplicable a los experimentos aleatorios dotados de simetría y, por tanto, tiene un alcance de aplicación muy restringido.

En una oportunidad, Napoleón le preguntó a Laplace en qué lugar de su obra monumental mécanique céleste había alguna referencia a la Divinidad, se dice que le respondió: "Señor, no tengo necesidad de esa hipótesis". Oyendo a Napoleón relatar esta anécdota, Lagrange hizo notar: "Ésa, Excelencia, es una hipótesis maravillosa" La Física moderna y, en realidad, toda la ciencia moderna, es tan humilde como Lagrange y tan agnóstica como Laplace. No creyendo en Dios, no se atribuye a sí misma ni omnisciencia divina, ni la posibilidad de alcanzarla.

INTRODUCCIÓN al CÁLCULO de PROBABILIDADES

"La matemática es el lenguaje de la precisión: es el vocabulario indispensable de aquello que conocemos".

White



Lectura 21

Las profesione[illegible] Matemáticas

Hasta hace poco tiempo, ser matemático no era una profesión, y aunque antaño algunos matemáticos fueron mantenidos por poderosos mecenas que les permitieron consagrarse por entero a la investigación, la mayoría se ganaba la vida como profesores. Hoy en día, todavía sigue siendo así, excepto por el hecho de que el mecenazgo, bien sea estatal o privado, ha adquirido mucho más importancia. Los gobiernos que se han dado cuenta del interés de hacer progresar la ciencia en su país ofrecen, de diversas formas, la posibilidad de que los investigadores de alto nivel se consagren a las matemáticas. Además por razones debidas a la necesidad creciente que la industria tiene de las matemáticas, aparece, aunque todavía débilmente, la posibilidad de hacer carrera en la industria como matemático. Finalmente, y más que todo, la revolución informática es una fuente de empleo en matemática cuyo caudal no deja de aumentar. El resultado es que el número de matemáticos del mundo ha aumentado considerablemente. ¿Qué es lo que necesitan los matemáticos? Muchas veces se caricaturizan las necesidades de los matemáticos con la célebre frase de: "Papel y lápiz, eso es todo". Pero si bien es cierto que pueden trabajar sin necesidad de costosas máquinas, no por ello son nulas sus necesidades. Ya que los matemáticos deben, ante todo, comunicarse para hacer saber e informarse acerca de lo que acaba de descubrirse. Por ello existen ricas bibliotecas que reciben miles de artículos cada año, y la posibilidad de conocer y recibir a colegas extranjeros son imperativos vitales sin los cuales no tardaría en sobrevenir la decadencia.

La docencia es uno de los campos ejercidos por el matemático.

Profesor: *se enseñan matemáticas en todos los niveles, desde párvulos hasta la universidad. No se espera de los profesores de bachillerato que descubran nada nuevo, pero eso si forma parte, al menos en teoría, del trabajo de los universitarios. Enseñar resulta indispensable para gran cantidad de matemáticos. Por desgracia, trabajar en una universidad es también, consagrar, los esfuerzos al trabajo esterilizante del burócrata. Se ve con frecuencia a mucho catedrático y auxiliares que esperan con impaciencia la llegada de las vacaciones para poder por fin dedicarse a estudiar el asunto que les ocupa la mente sin que todavía hayan tenido tiempo que dedicarle. La posibilidad de tomar un año de vacaciones (el año sabático), costumbre que no parece estar generalizada excepto en E. E. U. U, sería tal vez un remedio a este grave inconveniente.*

Investigador y Escritor Científico: *En España, el Instituto "Jorge Juan", de matemáticas, del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, ofrece la posibilidad a algunos matemáticos de consagrar todo su tiempo a la investigación: El otro gran foco de investigación lo constituyen, en teoría, las cátedras universitarias, que, como ocurre con las demás disciplinas, difícilmente pueden realizar una labor distinta a la docente. Una de las razones por las cuales el gran público lo ignora casi todo acerca de las matemáticas es, sin duda, la carencia de obras de divulgación lo cual, es indispensable para el futuro.*

FUENTE : La Clave del Saber Tomo XX

PROBABILIDADES

Objetivos

1. *Iniciar al lector en el estudio del cálculo de probabilidades.*
2. *Conocer las variaciones y propiedades básicas para resolver correctamente lo aprendido en el tema de análisis combinatorio.*
3. *Aprender a simular situaciones relacionadas con el tema para crear y resolver el problema utilizando el razonamiento matemático adquirido.*
4. *Entender, sintetizar y utilizar convenientemente el análisis combinatorio y la probabilidad.*

Introducción

"El ser humano ha sido desde tiempos inmemoriales un ser eminentemente lúdico" nos comenta un compañero profesor de historia y prosigue: "se encuentran pruebas de ello en rituales del periodo neolítico; luego en la edad antigua, las grandes civilizaciones como: Egipto, Grecia, Roma, ... etc., darían importancia a múltiples juegos; entre ellos juegos de azar que entretenían a la clase dominante, aun en la Biblia se cita que en la crucifixión de Cristo sus ropas fueron sorteadas mediante juegos de azar". Así, pues, el juego es tan antiguo como el hombre y de seguro ya se hacían apuestas acerca de la posibilidad de ganar o no. Era el génesis de la probabilidad.

El cielo está nublado, es probable que llueva; aquel automóvil está estacionado en un sitio prohibido, es probable que le pongan una multa; aquel estudiante es poco aplicado, es probable que desapruebe el curso. Estas son algunas proposiciones en las cuales la palabra probable indica la factibilidad de que un cierto acontecimiento se verifique, aunque no se tenga la certeza absoluta de que ello suceda. Si el cielo está nublado se dan las condiciones atmosféricas favorables a la lluvia, pero no se puede afirmar con certeza que lloverá. Es más, cuando el acontecimiento debe verificarse, el uso de la palabra probable es poco adecuado. La oración: "Es probable que esta tarde se ponga el Sol", no es sólo un fenómeno posible, sino, cierto; pues todas las tardes el Sol se oculta y llega la noche. También puede acontecer que un determinado suceso no se pueda verificar en ningún caso, porque se sabe a ciencia cierta que no ocurrirá.

*Respondiendo, por ejemplo, a la pregunta: "¿Qué posibilidad hay de que salga el Sol esta tarde?", es evidente que la respuesta correcta es: "Ninguna posibilidad", porque el fenómeno del Sol que sale por la tarde no tiene ninguna probabilidad de verificarse. **Laplace**, eminente matemático francés de fines del siglo XVIII y principios del siglo XIX, describió en una ocasión la teoría de probabilidades como "el sentido común reducido al cálculo". Veamos hasta qué punto la siguiente anécdota justifica esta descripción.*

Dos estudiantes buscan la manera de pasar la tarde. Finalmente convienen en dejar que sea una moneda la que decida. Si sale cara van al cine, si sale sello van a jugar fútbol ¡y, si la moneda se queda de canto, estudiarán!

Esta anécdota no es tan trivial como parece, ya que de ella podemos aprender mucho. El sentido común, basándose en la experiencia pasada, nos dice que los muchachos no se dedicarán al estudio. Es decir, por intuición sabemos que la moneda no se quedará de canto, sino que saldrá cara o sello. Además tenemos la certeza de que son iguales las posibilidades de que salga cara o sello.

El cálculo de probabilidades se basa en las suposiciones que hacemos respecto a cuestiones como: ¿cuál es la probabilidad de que la moneda quede de canto?, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara o bien sello?, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?, ¿cuál es la probabilidad de que salga sello?

Para discutir estas cuestiones en términos matemáticos es necesario asignar valores numéricos a las diversas probabilidades. Supongamos por un momento que llamamos P al valor numérico de la probabilidad de que salga cara. Puesto que es igualmente posible que salga sello, la probabilidad de que salga sello debe tener también el mismo valor. Pero estamos seguros de que saldrá o cara o sello. Por lo tanto, 2P ha de tener el valor de la certeza; es decir de que ocurra con toda seguridad un acontecimiento que pudiera ocurrir. Como valor de esta certeza podemos elegir el valor que querramos, aunque se acostumbra, y muy convenientemente, elegir el valor 1.

Es decir, suponemos que $2P=1$. Entonces la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$; de que salga sello, $\frac{1}{2}$; y la de que salga cara o sello, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ o sea 1.

Así pues, como decíamos líneas atrás, al desarrollar el cálculo de probabilidades es necesario hacer ciertas suposiciones ideales. En particular, dado que muchísimas cosas a las que desearíamos aplicarlo no son susceptibles de medida, debemos ser doblemente cuidadosos en que los axiomas y postulados que formulemos sean precisos, de modo que su campo de aplicación pueda establecerse fácilmente.

Sin embargo, el cálculo de la probabilidad solamente es útil una vez que hemos hecho una suposición –una suposición que, como todas las hipótesis en la ciencia, debe justificar su existencia por su utilidad y que, además, debemos estar preparados para modificar o descartar cuando la experiencia deja de corroborarla.

Siguiendo tan atrevido procedimiento, las matemáticas de la probabilidad han tenido notable éxito en la ciencia y en el comercio. En el siglo XIX, William S. Jevons, filósofo y economista inglés (Liverpool, 1835 – Bexhill, 1882) maravillado con el cálculo de probabilidades afirmó en forma completamente lírica (citando al obispo Joseph Butler –teólogo y filósofo inglés– sin declararlo), que las matemáticas de la probabilidad son "la verdadera guía de la vida y difícilmente podemos dar un paso o adoptar una decisión sin hacer, correcta o incorrectamente, un cálculo de probabilidad". Y estas opiniones fueron emitidas aun antes de que el cálculo hubiese alcanzado sus más brillantes éxitos en Física y en Genética, o en esferas más prácticas.

¿Qué es probabilidad?

Este término proviene del latín **probabilitas**, que significa verosimilitud o fundada apariencia de verdad. Aquello que tiene calidad de probable, es decir, que se funda en razón prudente; aquello que puede suceder o que hay buenas razones para creer que se verificará o sucederá.

La probabilidad de dicho suceso se define como la relación entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, suponiendo que todos los casos son igualmente posibles. La aplicación del cálculo de probabilidades es diversa: desde estadísticas de población, hasta cálculos muy complicados de posibles averías en telecomunicaciones o de que ocurran fenómenos raros en metereología.

Podemos, además, agregar con respecto a las probabilidades que algunas de las ideas del célebre enciclopedista D'alembert anunciaron la interpretación estadística. Él sugirió que haciendo experimentos, podrían estimarse aproximaciones de probabilidades deseadas. Mucho antes de que la Estadística generase expectativas, influyentes en Europa a mediados del siglo XIX, se llevaron a cabo experimentos de la naturaleza sugerida por D'alembert. Uno de los más famosos experimentos es el llamado "Problema de la aguja de Buffon".

¿Qué dice el problema de la aguja de Buffon?

Georges–Louis Leclerc, más conocido como el Conde de Buffon fue un naturalista y escritor francés (Montbard, 1707 – París, 1788), autor de la monumental obra de ciencia : ***Historia natural***, en 44 volúmenes; escrita en un estilo claro y conciso es uno de los mejores ejemplos de literatura científica. Llevado por el entusiasmo que despertó en su siglo el estudio del cálculo de probabilidades realizó muchos experimentos contribuyendo así a enriquecer el conocimiento sobre esta rama de la matemática. El más famoso de dichos experimentos fue denominado "Problema de la Aguja"; veamos en qué consiste: una superficie plana está dividida por líneas paralelas (como en la figura), separadas entre sí por una distancia H; tomando una aguja de longitud L, menor que H; Buffon la dejaba caer sobre la superficie rayada. Consideraba que la caída era favorable cuando la aguja quedaba atravesando una raya, y desfavorable cuando caía en el espacio entre dos rayas. Su sorprendente descubrimiento fue que la razón de éxitos a fracasos era una expresión en la que aparecía π. Efectivamente, si L es igual a H, la probabilidad de un éxito es $\frac{2}{\pi}$. A medida que aumentaba el número de pruebas, tanto más se aproximaba el resultado al valor de π, aun hasta tres cifras decimales.

Experimentos más completos fueron realizados en el año 1901 por un matemático italiano, Lazzerini, quien, dejando caer la aguja 3408 veces, obtuvo para π un valor igual a 3,1415929, con un error de sólo 0,0000003. Difícilmente podría uno esperar hallar un mejor ejemplo de la interrelación de todas las matemáticas. En nuestros estudios básicos de Geometría hemos visto a π como la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro, como el límite de una semicircunferencia (en el capítulo de series) y como una medida de la probabilidad.

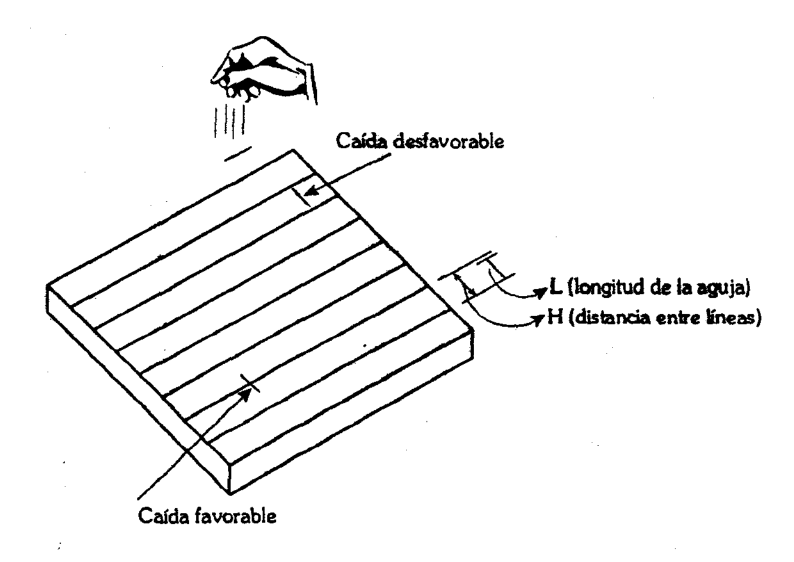


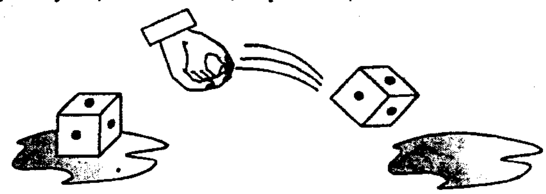
Gráfico que ilustra el problema de la aguja del conde Buffon

NOCIONES PREVIAS

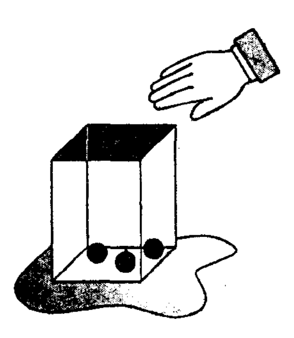
Los estudios iniciados propiamente para juegos se extendieron rápidamente a campos muy diversos: por ejemplo, las compañías de servicios están obligadas a pagar periódicamente a una compañía de seguros una suma de dinero que le cubre el riesgo de provocar daños a terceros en caso de un accidente (usualmente a los usuarios o pasajeros que viajan en las unidades de dichas empresas). La suma a desembolsar depende de muchos factores, entre los cuales, uno de los más importantes, es el cálculo de la **probabilidad** de que ocurra un accidente, cálculo que se hace examinando las estadísticas de accidentes automovilísticos de años anteriores. Además, las grandes compañías de vehículos destinan anualmente fuertes sumas de dinero en la investigación y desarrollo de sistemas de seguridad adecuados para que, en casos de accidentes, se garanticen la vida tanto del conductor como de los pasajeros del vehículo y para ello llevan a cabo experimentos o pruebas simulando accidentes y haciendo uso de criterios análogos se estudia la difusión de las enfermedades en relación con los países, las regiones, las formas de vida, el sexo y la edad; de modo que calculando la **probabilidad** que tiene una persona de enfermar se puede prevenir o combatir el hecho. Es, como algunos dicen, una forma de predecir el futuro leyendo matemáticamente en el pasado. Así, los directores de producción de las grandes empresas e industrias, los científicos, los biólogos, los ingenieros, los analistas de mercados, etc., se tienen que agrupar frecuentemente en el estudio de problemas que los obligan a realizar experimentos, es decir, pruebas bien planeadas para obtener información acerca del problema que les interesa resolver. Estos experimentos son de dos clases: **Determinísticos** y **aleatorios**.

¿Qué son los experimentos determinísticos?

Supongamos que tenemos un dado, como el que muestra la figura, es decir con sus seis caras marcadas por el mismo puntaje. (En este caso, el punto 1).



Si lanzamos este dado, ¿podemos esperar, acaso, obtener puntaje diferente de 1? Pues, no; obtendremos siempre como único resultado posible el punto 1. Consideremos ahora una urna que contiene tres bolillas negras. Se extrae una de ellas al azar; se tiene la **certeza** de que será negra; ya que **no existe la posibilidad** de que sea de otro color, (blanca, por ejemplo).



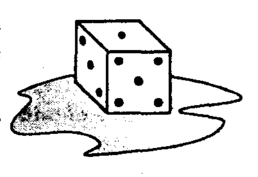
Cuando Galileo planeó sus experimentos para estudiar el movimiento de caída libre de los cuerpos, dispuso un plano inclinado, con varias ranuras por las que hacía rodar bolas de distinto peso; entonces observó algo sorprendente: tanto las bolas livianas como las pesadas descendían en el mismo tiempo. Después estudió el espacio recorrido en un determinado tiempo , por ejemplo, en 30 segundos, y descubrió que cada vez que repetía la experiencia, el espacio recorrido en 30 segundos era el mismo; finalmente descubrió, haciendo variar el tiempo y midiendo los espacios recorridos, que la variación de los espacios es proporcional al cuadrado de la variación correspondiente del tiempo, y que la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{2}$ g, siendo g la constante de la gravedad en el lugar del experimento. Una vez terminado todo este estudio, el fenómeno de la caída libre de los cuerpos en el vacío queda descrito mediante la fórmula matemática:

$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

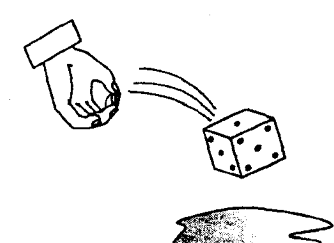
En esta expresión, para cada valor que demos a **t** se determina el espacio correspondiente; por lo cual decimos que la caída de los cuerpos en el vacío es un **fenómeno determinista**; el enlace que existe entre las variables **t** y **e**, es un enlace rígido o funcional; el conocimiento de una variable determina la otra. Una vez conocida esta relación funcional, que se llama "ley del fenómeno", por ejemplo una vez conocida la función $e = \frac{1}{2} gt^2$, podemos predecir, **sin necesidad de nuevas experiencias**, el espacio que recorrerá un cuerpo en caída libre en el vacío, en un número fijado de segundos; es decir, en un tiempo determinado.

En todas las pruebas realizadas anteriormente el resultado podía predecirse de antemano; es decir, sin realizar previamente la prueba, ya que ésta constaba de un único resultado posible. . A éstos experimentos se les llama determinísticos.

¿Qué son los experimentos aleatorios o no determinísticos (ε)?



Asumamos que tenemos un dado normal; es decir, que tiene en cada una de sus seis caras los puntos correspondientes desde 1 hasta 6 y que todas las caras tienen igual posibilidades de mostrarse (o sea que no "está cargado"). Si lanzamos este dado al aire, ¿podremos afirmar acaso que el puntaje a salir será por ejemplo el 3, antes que el dado se detenga?



De seguro pensarás que no es posible saberlo hasta que el dado muestre el resultado y, en efecto, así es. Sin embargo, aunque ignoramos el puntaje que saldrá, sabemos bien que el resultado puede ser cualquiera de los seis puntos que el dado tiene. En este caso no podemos predecir el resultado de antemano y tendremos que esperar a que el dado se detenga para poder saberlo.

¡Sigamos con nuestro dado normal! Ahora lo que haremos será lanzar el dado al aire, de minuto en minuto. Al lanzarlo la primera vez, en el minuto inicial, salió el punto 5; al lanzarlo por segunda vez al siguiente minuto, otra vez salió el punto 5; en el tercer lanzamiento efectuado durante el tercer minuto, ¡otra vez salió el punto 5!; ¿podemos en base a esto predecir acaso cuál será el número de puntos a salir en el cuarto lanzamiento a llevarse a cabo el cuarto minuto?

Veamos:

Aquí apreciamos lo que sucedió luego de cada lanzamiento, hemos obtenido los siguientes resultados:

1° minuto

1° lanzamiento
sale 5

2° minuto

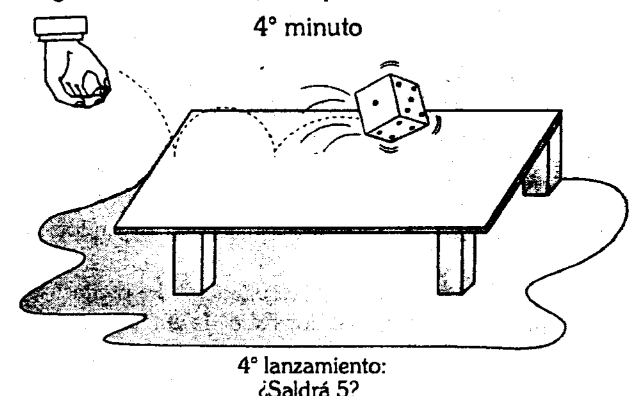
2° lanzamiento
sale 5

3° minuto

3° lanzamiento
sale 5

¡En los 3 lanzamientos hemos obtenido el punto 5 consecutivamente! Ahora, observa que en el cuarto minuto el dado aún no se detiene . . . ¿Podemos, acaso, decir en este momento que otra vez saldrá el punto 5 cuando se detenga? Evidentemente, la respuesta es No.

4° minuto



4° lanzamiento:
¿Saldrá 5?

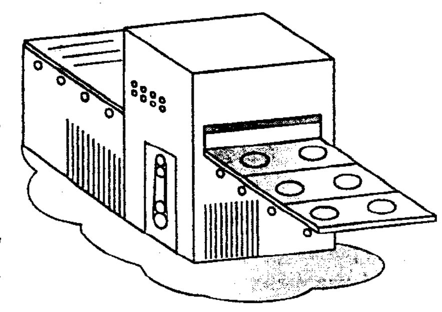
Y si nos piden averiguar el puntaje que saldrá en el quinto minuto al efectuar el quinto lanzamiento, antes de realizar la experiencia, ¿sabemos acaso el resultado?

En este caso, dado el minuto, tampoco podemos determinar el número de puntos que saldrá en ese lanzamiento correspondiente del dado. Diremos, entonces, que el lanzamiento del dado es un ***experimento aleatorio* o de azar** (ε).

Como decíamos líneas atrás, lo único que sabemos es que las ocurrencias que puedan darse son en total seis y que una u otra de esas seis posibilidades ocurre en cada lanzamiento del dado. Cada uno de estos casos que puedan presentarse se denomina suceso o evento del experimento aleatorio. Más adelante estudiaremos todo esto con mayor detenimiento.

Veamos un ejemplo más:

Una máquina automática se dedica a la fabricación de discos metálicos. Se pretende que el diámetro de estos discos sea de 5 cms. y todos los dispositivos de corte del torno se disponen para que el diámetro de cada disco producido sea de 5 cms. Pero, por muchas precauciones que se tomen y por mucho cuidado que se ponga en la fabricación, la experiencia demuestra que los diámetros de los discos varían de uno a otro, en cantidades muy pequeñas; es decir, que todos los discos no salen exactamente con el mismo diámetro.



Supongamos, ahora, que cada minuto se produce un disco. ¿Se podrá determinar de antemano, "a priori", cuál será el diámetro del disco producido en el octavo minuto?

Si piensas un poco en la cuestión, advertirás que es prácticamente imposible predecir "a priori", antes de que el octavo disco haya sido producido y medido, cuál será la longitud de su diámetro, o sea, la longitud del diámetro del disco no queda determinada dando el minuto en que va a ser fabricado: otra vez estamos, pues, frente a un **experimento aleatorio o fenómeno de azar**.

Las razones por las cuales no se puede predecir el diámetro que tendrá el disco se debe a que dicha magnitud depende de un alto número de variables que sufren cambios pequeñísimos e imprevisibles y que afectan al diámetro del disco: fluctuaciones pequeñísimas de la intensidad de la corriente que mueve el motor de la máquina, vibraciones variables de la máquina, falta de homogeneidad absoluta del metal, etc., etc.

Ante un fenómeno de esta clase, mucho más complicado, por supuesto, que un fenómeno determinístico, qué hacer: ¿cruzarse de brazos y resignarse a ignorarlo por completo, o tratar de adquirir todo el conocimiento posible acerca de él?

En el caso del diámetro del disco, se puede tomar el segmento entre 4 cm. y 6 cm. y dividirlo, por ejemplo, en 20 partes (de 1 mm. cada una), y un disco cualquiera tendrá un diámetro que caerá en una de estas "casillas"; de forma que los sucesos posibles serían las 20 casillas.

Los científicos, cada vez con más ahínco, han penetrado en el estudio de los experimentos aleatorios (no determinísticos), y de estos esfuerzos ha surgido el cálculo de probabilidades, una de las creaciones más grandes de la mente humana, y que está influyendo poderosamente, no sólo sobre las ciencias y la técnica, sino sobre todas las corrientes del pensamiento moderno.

¿Qué es el espacio muestral (Ω)?

Antes de intentar definir lo que es probabilidad, debemos considerar primero los **resultados** de los **experimentos aleatorios** (ε). Al llevar a cabo un experimento aleatorio, éste tiene un número discreto (número entero, en este caso positivo) de resultados posibles. Por ejemplo, en el caso del lanzamiento de un dado; el resultado sería uno de los enteros que representan los puntos de las caras del dado; es decir, los números del 1 hasta el 6. Si lanzáramos al aire una moneda, el resultado será cara o sello. Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se le conoce con el nombre de **espacio muestral** y se le representa por la letra Ω. En ocasiones, la determinación del espacio muestral no es tan sencilla y constituye de por sí un problema. A los resultados individuales que conforman el espacio muestral, se les conoce también como **puntos muestrales**.

¿A qué se denominan eventos?

Dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, cualquier subconjunto de Ω se denomina **evento**. Un subconjunto que contiene un solo punto muestral se denomina **evento elemental**. Si decimos que un evento A ocurre, lo que estaremos indicando será que uno de los puntos del espacio muestral y que pertenece al subconjunto A ha ocurrido.

Ejemplo:

ε: lanzamos al aire un dado normal

A: sale puntaje menor o igual que 3

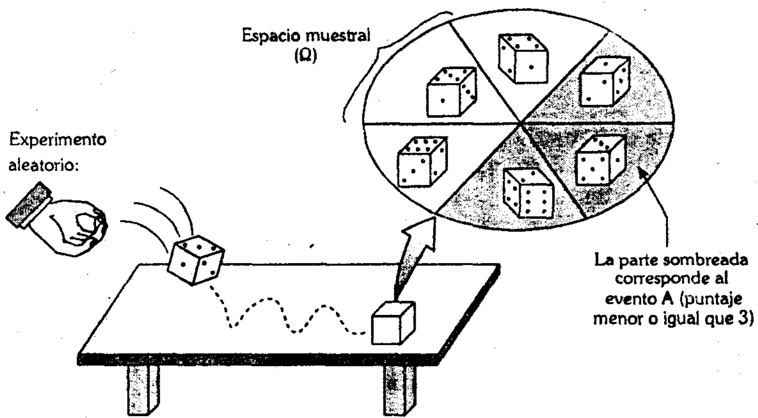
B: sale puntaje 5

El espacio muestral sería:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \; n(\Omega) = 6$

El evento A:
A = {1, 2, 3}; n(A) = 3
El evento B:
B = {5}; n(B) = 1

Conviene aclarar que el evento A "ocurre" si el punto 1 ó el punto 2 ó el punto 3; se muestran como resultado después de lanzar el dado.



¿Qué es un diagrama de árbol?

Hemos mencionado ya que un espacio muestral comprende a todos los resultados posibles de un solo experimento aleatorio y que cada uno de los eventos elementales corresponde a un posible resultado. Frecuentemente ocurre que los resultados son la combinación con otros resultados.

Por ejemplo, consideremos el lanzamiento de dos monedas, una a continuación de la otra, encontremos su espacio muestral.

El conjunto de todos los resultados posibles es: $\Omega=\{(c;c)\ ;\ (c;s)\ ;\ (s;c)\ ;\ (s;s)\}$; $n(\Omega) = 4$

c : cara s : sello

Aquí (c; s) ≠ (s; c) pues las monedas se lanzan según la condición: "Una a continuación de la otra".

No olvidemos que el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de una moneda es: $\Omega_1 = \{c;s\}$ y entonces podríamos escribir: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1$ (producto cartesiano)

pues:

$$\Omega_1 = \{C ; S\}$$
$$\Omega_1 = \{C ; S\}$$

$$\Rightarrow \Omega_1 \times \Omega_1 = \{(c;c)\ ;\ (c;s)\ ;\ (s;c)\ ;\ (s;s)\} = \Omega$$

En otras palabras: si un experimento aleatorio consiste de dos o más partes, tales que el espacio muestral del experimento total se puede representar como el producto cartesiano de los espacios muestrales de las partes; se le denomina usualmente **experimento compuesto**.

Cuando se trabaja con experimentos compuestos; en ocasiones resulta ser útil dibujar un diagrama como el que a continuación mostramos al cual se le conoce como un ***diagrama de árbol***, veamos:

1° Moneda	2° Moneda		Resultados
C	C	-------->	CC
	S	-------->	CS
S	C	-------->	SC
	S	-------->	SS

de aquí:

$\Omega=\{(C;C);\ (C;S);\ (S;C);\ (S;S)\}$

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_1$

además $n(\Omega_1)=2$ luego:

$n(\Omega)=n(\Omega_1)\times n(\Omega_1)$

$4=2\times 2$

Aquí hemos desarrollado el diagrama de árbol para el caso del lanzamiento de dos monedas. Puede observarse que el número de **puntos muestrales** del espacio muestral $\Omega=\Omega_1\times\Omega_1$ es el cuadrado del número de "puntos muestrales" de Ω_1. En general, si Ω_1 y Ω_2 es el espacio muestral correspondiente al **experimento compuesto**, entonces:

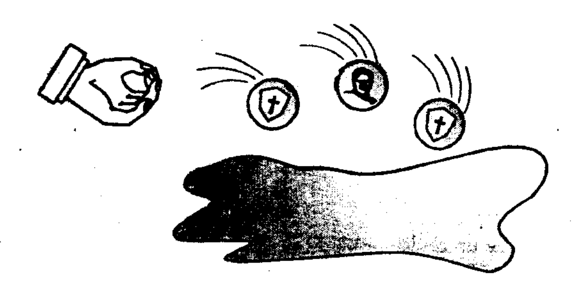
$$n(\Omega)=n(\Omega_1)\times n(\Omega_2)$$

Donde: $n(\Omega)$ denota el número de eventos elementales.

Ejemplo:

Realiza el siguiente experimento aleatorio: Lanza tres monedas, una después de la otra, y escribe el espacio muestral desarrollando un diagrama de árbol.

Resolución:



Procediendo análogamente al caso anterior planteamos:

1° Moneda	2° Moneda	3° Moneda		Resultados
C	C	C	------->	CCC
		S	------->	CCS
	S	C	------->	CSC
		S	------->	CSS
S	C	C	------->	SCC
		S	------->	SCS
	S	C	------->	SSC
		S	------->	SSS

En base al diagrama tendremos:

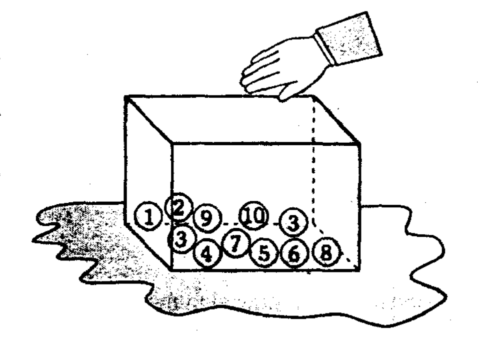
$\Omega = \{(c;c;c)\ ;\ (c;c;s)\ ;\ (c;s;c)\ ;\ (c;s;s)\ ;\ (s;c;c)\ ;\ (s;c;s)\ ;\ (s;s;c)\ ;\ (s;s;s)\}$

$n(\Omega) = 8$

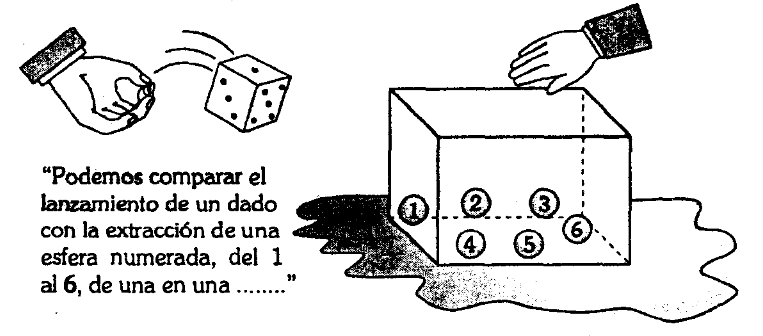
Observa que: $n(\Omega) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

UN MÉTODO INTERESANTE: EL MODELO DE LA URNA

Supongamos que en una calle viven 10 familias y que nuestro trabajo va a consistir en entrevistar a 3 de ellas, pero eligiéndolas al azar. ¿Cómo haríamos para decidir a cuáles entrevistar y en qué orden hacerlo? Una forma podría ser asignar a cada casa un número del 1 al 10 y escribir en esferas estos números, luego colocarlos en una urna y proceder a extraer sin mirar (aleatoriamente) tres de ellas. Así, observamos que podemos trabajar en términos de esferas que son extraídas de una urna para facilitar nuestra labor y hacer las entrevistas.



Algunas veces, métodos que parecen ser diferentes nos conducen a resultados idénticos; por ejemplo, el espacio muestral será el mismo tanto para el lanzamiento de un dado como para la extracción de una esfera de un grupo de seis esferas idénticas, que previamente han sido marcadas con número del 1 al **6**, contenidas en una urna.



> **El modelo de la urna**
> "Si los resultados de un experimento aleatorio son análogos a los resultados asociados con la extracción de esferas de una urna, diremos que esta situación es llamada **modelo de la urna**"

En las matemáticas se dan situaciones que son idénticas en sus partes esenciales, y por lo tanto, la solución que obtenemos para un caso o situación determinada puede ser aplicada en el otro caso, quizás elegiríamos trabajar en términos de la situación más conveniente; así, a menudo es preferible trabajar en función de esferas que son extraídas de una urna.

Al trabajar con esferas que se extraen de una urna se pueden comprender más claramente algunos resultados que pretendemos encontrar y, además, podemos introducir una variación importante: si realizamos varias extracciones podemos especificar si cada esfera extraída de la urna es reemplazada o no antes de proceder a extraer la siguiente esfera.

Tales modalidades de solución reciben el nombre de:

- Extracción con reemplazamiento, y
- Extracción sin reemplazamiento

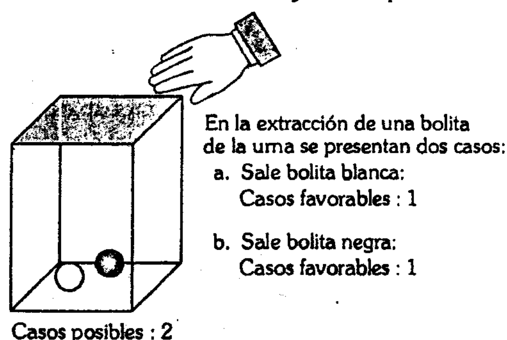
Si elegimos trabajar con la situación descrita como de la urna más bien que con la situación real, decimos que la urna es un *modelo* de lo que sucede en la realidad.

PROBABILIDAD

Antes de dar la noción de probabilidad hagamos una breve referencia a sucesos que por su simplicidad se prestan a ser experimentados.

Ejemplo 1

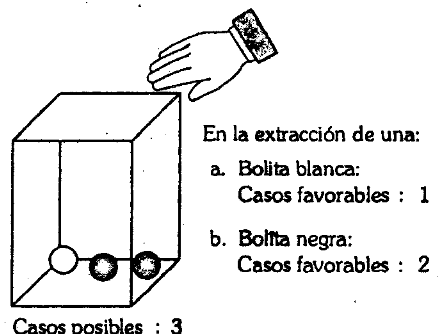
Supongamos que en una urna colocamos una bolita blanca y una bolita negra. Vamos, ahora, a extraer al azar una bolita y ver de qué color es.



Es evidente que la bola extraída es blanca o es negra; es decir; tenemos dos posibilidades, cada una de las cuales puede ocurrir por igual. Así, **hay un caso favorable de entre dos posibles** de que la bola extraída sea blanca (diremos que la relación es de 1 a 2 ó 1/2). En forma análoga establecemos la relación para el caso de la extracción de una bola negra: 1/2 (Otra vez: 1 caso favorable de entre dos casos posibles de que la bola extraída sea negra). A dicha relación vamos a llamarla, en estos momentos, **probabilidad**; pero aún no daremos más detalles de lo que esto significa, teniendo en cuenta lo anterior: la suma de las probabilidades de que la bola sea blanca y de que sea negra es: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, siendo 1 la **certeza**.

Ejemplo 2

Consideremos otra vez el modelo de la urna y pongamos en ella tres bolitas: dos blancas y una negra. Al ser el número de blancas el doble del número de negras, podríamos pensar que es más probable la extracción de una bola blanca.



Luego, la probabilidad de extraer una bola blanca es $\frac{2}{3}$ (2 casos favorables de un total de 3 casos posibles) y la probabilidad de extraer una bola negra es $\frac{1}{3}$ (1 caso a favor de 3 posibles); también aquí ocurre: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$

Decir que la probabilidad de extraer una bola negra es 1/3 y de extraer una blanca, 2/3 equivale teóricamente a afirmar que, repitiendo la prueba tres veces, debería aparecer una vez la negra y dos veces la blanca; repitiéndola seis veces, debería presentarse dos veces la negra y cuatro veces la blanca, y así sucesivamente. Pero si se lleva a la práctica la experiencia, no podemos excluir que se obtengan resultados absolutamente contrapuestos a lo que se ha dicho antes, en el sentido de que en el caso, por ejemplo, de las tres pruebas puede presentarse dos veces la blanca o bien tres veces la negra o la blanca.

En esta circunstancia, **el azar es determinante** y no permite la verificación del suceso según las previsiones matemáticas que, de otra parte, al expresar la probabilidad, no tienen la pretensión de dar la certeza. Pero **si la prueba se repite un número muy grande de veces, el número que expresa la verificación del acontecimiento respecto a las pruebas realizadas se acerca a la probabilidad matemática**. La experiencia, descrita en la tabla, ha sido confeccionada realmente con la extracción de una bola de una bolsa, que contenía dos: una blanca y una negra.

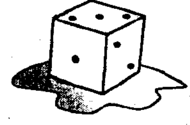
En ningún caso se ha obtenido 1/2; pero nos acercamos a este valor cuando aumenta el número de pruebas realizadas. El lector que quiera repetir el experimento no logrará, ciertamente, los mismos resultados conseguidos y mostrados a continuación; pero si tiene la paciencia de aumentar todavía el número de pruebas, repitiendo mil o dos mil veces la extracción de la bola, podrá encontrar la confirmación del principio según el cual **en una serie de pruebas el número de veces que se verifica un suceso se aproxima a la probabilidad matemática, aumentando el número de pruebas. La probabilidad es un límite cuando el número de las pruebas tiende al infinito**.

Nº de pruebas	Nº de veces que aparece la blanca	Frecuencias		Probabilidad mat.
3	2	$\frac{2}{3}$	$0,\widehat{6}$	$\frac{1}{2} = 0,5$
4	1	$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{1}{2} = 0,5$
10	4	$\frac{4}{10}$	0,4	$\frac{1}{2} = 0,5$
20	3	$\frac{3}{20}$	0,15	$\frac{1}{2} = 0,5$
100	41	$\frac{41}{100}$	0,41	$\frac{1}{2} = 0,5$
200	84	$\frac{84}{200}$	0,42	$\frac{1}{2} = 0,5$
400	236	$\frac{236}{400}$	0,59	$\frac{1}{2} = 0,5$

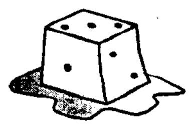
En los ejemplos anteriores para hallar la relación que hemos llamado **probabilidad** de que ocurra un evento dado, ha sido necesario determinar el número total de casos posibles y el número de casos favorables para luego efectuar una división. Hasta aquí parece que **para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera sólo se necesita calcular el número de casos favorables y dividirlo por el número de casos posibles**, pero este procedimiento sólo se puede aplicar cuando todos los casos o eventos son igualmente probables. De aquí se desprende que tenemos que definir lo que son: **eventos equiprobables**.

EVENTOS EQUIPROBABLES

Hay muchos experimentos aleatorios en los cuales no existen razones para suponer que unos eventos se presentarán más frecuentemente que otros; por ejemplo, en el lanzamiento de un dado: si el dado tiene una forma cúbica perfecta (lo cual nunca es rigurosamente exacto) y si, además, es completamente homogéneo, es de esperar que la probabilidad de que salga una cara determinada del dado común es 1/6; ya que todas las caras tienen igual probabilidad de salir; es decir son **equiprobables**.



Dado normal



Dado trucado

Sin embargo, si el dado tiene una forma irregular las probabilidades correspondientes a cada cara son distintas entre sí. Para dar un valor a estas probabilidades se procede así: realizamos sucesivamente la experiencia de lanzar el dado trucado y anotamos los resultados; con esto confeccionamos una tabla donde se expresa el número de veces que ha salido cada cara (**frecuencia absoluta**). Ahora, los cocientes entre la frecuencia absoluta y el número de veces que se ha realizado la experiencia reciben el nombre de **frecuencias relativas**. Por ejemplo, si lanzamos el dado irregular 50 veces y la cara correspondiente al 2 ha salido 17 de las 50 veces que hemos lanzado el dado, diremos que la **frecuencia absoluta del 2 es 17** y que la **frecuencia relativa es** $\frac{17}{50}$. Los valores de estos cocientes son los que tomaremos como probabilidad asociada a cada cara. En nuestro ejemplo; bajo las consideraciones hechas; la cara 2 tiene una probabilidad de $\frac{17}{50}$.

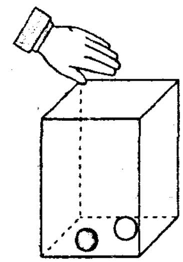
Puesto que líneas atrás hemos utilizado la palabra **equiprobable**, conviene ahora definir qué significa **equiprobable** (**igualmente probable**).

"Dos acontecimientos contingentes serán considerados equiprobables si, ya sea por falta de evidencia o después de considerar todas las circunstancias que hagan al caso, no es de esperar que se dé un acontecimiento con preferencia al otro".

Lo que esto nos quiere decir es que todos los resultados posibles de un experimento aleatorio tienen igual posibilidad de darse.

Ejemplo:

En la urna se muestran dos bolas de igual tamaño y peso, pero de color distinto: una es blanca y la otra roja. Si introducimos la mano y sacamos al azar una bola cualquiera. ¿Qué color saldrá?. Hay posibilidad de que salga blanca , pero también la hay de que salga roja. Además, necesariamente, uno de los dos acontecimientos tendrá que ocurrir y como ya se dijo no es de esperar que se dé un acontecimiento con preferencia al otro.



¿Qué es el principio de razón insuficiente?

Usualmente se acostumbra decir que no puede apreciarse probabilidad alguna donde falta un conocimiento relevante o apropiado y esto estaría en aparente contradicción con lo dicho en la definición dada, pues allí se dice que dos proposiciones, o dos acontecimientos, pueden ser igualmente probables, aun si carecemos de conocimiento alguno, cualquiera que sea. ¡Pero ahí está la clave! Un poco de conocimiento es peligroso, mientras que carecer de él por completo es mucho más satisfactorio. Así para nuestros fines podemos invocar **el principio de razón insuficiente, de acuerdo al cual, a falta de un conocimiento sobre dos acontecimientos, los consideramos igualmente probables**. No debes olvidar que nuestra definición es sólo aproximada. Y también que es posible saber que dos cantidades son iguales sin saber qué son. Así, alguien que tenga un conocimiento general sobre los juegos puede saber que en el ajedrez ambas partes comienzan con fuerzas iguales, sin saber cuáles son éstas, o cualquier otra cosa acerca del juego.

Si suponemos, entonces, que una moneda es simétrica, es equiprobable que caerá cara o sello, ya que no hay razón alguna para anticipar un resultado u otro.

A los experimentos aleatorios dotados de eventos equiprobables también se les denomina experimentos aleatorios simétricos (experimentos aleatorios dotados de simetría). Esto constituye un caso particular, muy importante, de los experimentos aleatorios.

En general, cuando se trata de calcular la probabilidad de que ocurran sucesos que no son equiprobables,, se tratará de realizar la experiencia cierto número de veces y calcular el cociente entre las veces que se verifica el suceso y el número de repeticiones de la prueba. El valor de este cociente o frecuencia relativa será el que se adoptará como **probabilidad** de que el suceso **se verifique.**

Este valor es de gran utilidad para hacer predicciones sobre la mayoría de los sucesos, y se ajusta tanto más a la realidad cuanto mayor sea el número de observaciones hechas para calcularlo.

El primero en estudiar las cuestiones relativas a la relación existente entre la probabilidad matemática y los resultados reales fue el suizo **Jacques Bernouilli (1654–1705)** primer matemático de una numerosa familia cuyos miembros, al menos nueve, fueron matemáticos o físicos notables. Viajó mucho toda su vida y mantuvo contacto con los científicos de su época, principalmente con Leibniz, con el que resolvió problemas sobre cálculo infinitesimal.

Bernouilli escribió ***Ars conjectandi*** (El arte de la conjetura), que es el primer tratado importante sobre probabilidad, donde se expone también una teoría general de las permutaciones y de las combinaciones. En él se encuentra la exposición de la "**ley de los grandes números**", también llamada **Teorema de Bernouilli**, en el que se demuestra de qué manera la probabilidad es límite de las frecuencias reales cuando el número de repeticiones de la experiencia tiende al infinito. Su autor estuvo muy orgulloso de esta demostración, la cual le llevó veinte años de esfuerzos, por su gran utilidad para conocer, a través de las observaciones, las leyes y las causas por las que ocurren ciertos fenómenos.

PRIMERA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD (definición clásica)

"Cuando un experimento aleatorio es simétrico, es decir, en un número muy grande de pruebas los distintos sucesos ocurren con igual frecuencia o todos los eventos son **equiprobables**, la **probabilidad** de un suceso se obtiene dividiendo el número de casos favorables al suceso entre el número de casos posibles del experimento".

Luego: Si "A" es un evento de un espacio muestral Ω, entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota por P(A) y está dado por:

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables al evento A}}{\text{Número total de casos posibles (resultados posibles) en }\Omega}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Esta definición, debida a Laplace, sólo es aplicable a los experimentos aleatorios dotados de simetría y, por lo tanto, tiene un alcance de aplicación muy restringido.

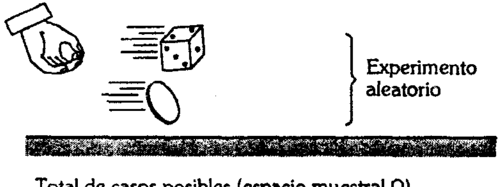
Ejemplo 1

Se lanza un dado acompañado de una moneda. Calcule la probabilidad de obtener:

a. Puntaje par acompañado de sello en la moneda.

b. Puntaje no menor de 3 y acompañado de cara en la moneda.

Resolución:



Total de casos posibles (espacio muestral Ω)

Dado: 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6

Moneda: S S S S S S C C C C C C ⇒ $n(\Omega)=12$

Luego:

a. El número de casos favorables al evento: sale punto par y sello, es:

$n(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b. El número de casos favorables al evento: sale puntaje no menor de 3 y acompañado de cara en la moneda, es:
$n(A) = 4$
$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2

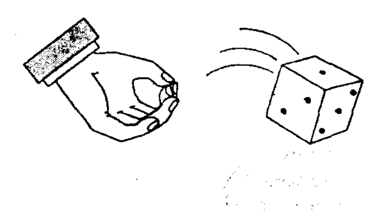
Determine la probabilidad de que, al lanzar un dado, el resultado sea un número impar.

Resolución:

- Experimento aleatorio (ε):
  Lanzamiento de un dado normal

- Espacio muestral (Ω):
  $\Omega=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $n(\Omega)= 6$

- Evento (A):
  El resultado es impar:
  $A=\{1; 3; 5\}$ $n(A)= 3$



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} < > \frac{1}{2}$$

Demos ahora una definición, que de alguna manera ya habíamos adelantado cuando hablamos del dado trucado y cuando extraíamos al azar bolitas de una urna:

SEGUNDA DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Condición de regularidad estadística (De Richard Von Misses)

Dado un experimento aleatorio ε; sabemos que en cada prueba que hagamos no podemos predecir cuál de los sucesos que lo integran se va a presentar (condición de azar); entonces:

"Cuando el número de pruebas se aumenta indefinidamente, el cociente que resulta de dividir el número de veces que ocurre un suceso por el número total de pruebas (frecuencia relativa del suceso) tiende a estabilizarse en torno a un número fijo, que se llama la probabilidad de dicho suceso"

Esta definición corresponde al gran científico alemán **Richard Von Misses**, que junto con **Henry Poincare** criticaron muy duramente la definición de Laplace. En realidad, lo que ocurre es que la definición de Laplace se puede aplicar a muy pocos experimentos aleatorios, y no a los más importantes en la práctica; pero si se cumplen las condiciones de simetría del experimento aleatorio es la más fácil de aplicar porque no requiere experiencias *a priori* para decidir la probabilidad de los sucesos simples que integran el experimento aleatorio.

Pero sigamos viendo más ejemplos:

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de obtener un "as" al extraer una carta de una baraja de 52 cartas?

Resolución:

En este caso, como la baraja tiene 4 ases, y el fenómeno es simétrico, pues no hay razones para suponer que unas cartas saldrán con más frecuencia que las otras; aplicando la definición de Laplace, tendremos:

Probabilidad de obtener 1 "as": $\dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

Ejemplo 4

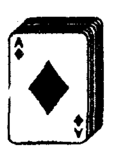
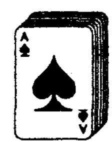
Se tiene una baraja de 52 cartas y de ella se extrae una al azar. Halle la probabilidad de que la carta extraída:

a. Sea un 8 de corazones

b. Sea figura roja

c. Represente su valor con una letra

Resolución:

a. En la baraja *sólo existe un 8 de corazones*, luego su probabilidad P será: $P = \frac{1}{52}$.

b. Las figuras rojas son 13 corazones y 13 oros (cocos); entonces la probabilidad que la carta extraída sea roja es $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

c. Las cartas que presentan su valor con una letra son: el once "J", doce "Q", trece "K" y el as "A"; como cada uno tiene cuatro cartas, en total hay 16; luego la probabilidad es $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

Ejemplo 5

En una urna hay 25 bolas iguales, numeradas del 1 al 25. Una persona extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga un número que sea múltiplo de 5?

Resolución:

Este ejemplo corresponde también a un fenómeno aleatorio dotado de simetría, los casos favorables a salir múltiplo de 5 son: 5, 10, 15, 20 y 25 o sea 5 casos y los casos posibles son 25; por lo tanto, aplicando la **definición clásica** de probabilidad de Laplace.

Probabilidad de múltiplo de 5 : $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

Ejemplo 6

En un almacén se venden cuatro marcas de hojas de afeitar, A, B, C, D, ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo cliente que compre hojas de afeitar las adquiera de la marca C?

Resolución:

En este caso falla la definición de Laplace, pues no hay razones *a priori* para suponer que las preferencias de los clientes están igualmente repartidas hacia las cuatro marcas: si queremos resolver el problema aproximadamente, tenemos que recurrir a una experiencia muy extensa; por ejemplo, anotar las marcas elegidas por 10000 clientes y hallar la frecuencia relativa de cada marca, que se considera como "**una estimación estadística de la probabilidad**". En los cursos superiores de Estadística Matemática se estudian los errores que comportan estas estimaciones, con determinada probabilidad.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

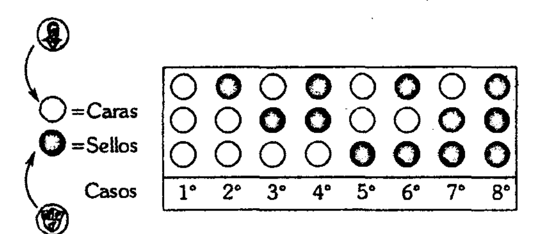
Tenemos ya una idea de lo que es probabilidad y ahora aplicaremos esta noción a diversos problemas, en muchos de los cuales tendremos que usar los conceptos estudiados en el capítulo de Análisis Combinatorio.

Recordemos que el Análisis Combinatorio se ocupa de las permutaciones y las combinaciones, permitiéndonos así determinar el número de modos diferentes en que un acontecimiento puede suceder; se convierte así en el estudio de la posibilidad matemática y proporciona un marco ideal para las matemáticas de la probabilidad.

Los problemas típicos de permutaciones y combinaciones tienen un aspecto árido y monótono. Al principio cuesta trabajo creer que los conocimientos que se adquieren al resolver problemas como el siguiente puedan servir de mucho en otros estudios: "Cuatro viajeros llegan a un pueblo donde hay 5 hosterías. ¿De cuántas maneras distintas pueden alojarse, cada uno, en un hotel diferente?" Tampoco parece que una teoría, que sirve para determinar de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar las letras de la palabra **Missisipi**, pueda ser útil ya sea para

determinar la física del átomo o para fijar las tasas de seguros. Sin embargo, los teoremas del análisis combinatorio son la base del cálculo de la probabilidad. Tenemos que saber calcular el número total de modos diferentes en que un evento puede suceder, antes de aspirar a predecir cómo es probable que suceda.

Por ejemplo; arrojamos al aire una moneda normal, por tres veces consecutivas, siendo posibles los resultados de la figura siguiente:



Aquí se muestran los resultados posibles de tirar tres veces una moneda. Aquí también se muestran los casos en que se producen dos caras y un sello.

Estos ocho resultados posibles contestan todas las preguntas que podrían formularse en permutaciones y combinaciones. Pero además, otras cualesquiera que surjan en el cálculo de la probabilidad, podrían también responderse con ayuda de este diagrama. Así, la probabilidad de obtener 3 caras, nos da la relación $\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{8}$.

La probabilidad de conseguir dos caras y un sello es la conjunción de los casos 2, 3, 5, a todos los casos posibles, vale decir:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{3}{8}$$

Es evidente, ahora, que la enumeración de todos los casos posibles resulta aburrida y difícil a medida que su número aumenta. Por esa razón, el cálculo de probabilidades contiene muchos teoremas, tomados del análisis combinatorio, que hacen innecesaria la enumeración directa.

PROPIEDADES

1° Evento Seguro y Evento Imposible:

Veamos las figuras:

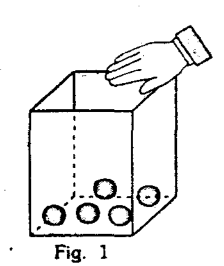


Fig. 1

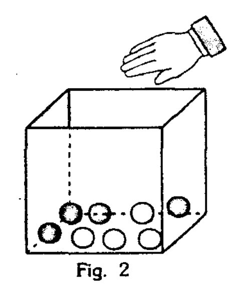


Fig. 2

En la figura se puede apreciar que hay 5 bolitas negras dentro de la urna (Fig. 1), si extraemos al azar una bolita cualquiera, tendremos siempre la *certeza* de que será de color negro, es un "*evento seguro*". Si pedimos que el evento sea: "Sale una bola blanca" tal evento será imposible, ya que no existe la posibilidad que sea de color blanco.

Para indicar que la *certeza* de que un evento se verifica se dice que éste tiene "probabilidad 1"; y si queremos señalar la imposibilidad de que se verifique, se dice que su "probabilidad es cero". Los números 0 y 1 expresan, en cierto sentido, sucesos sobre los que se tiene la certeza de su verificación o su no verificación. Ahora, si la urna contiene bolas blancas y bolas negras y se extrae aleatoriamente una de ellas, la probabilidad de que la bola extraída sea; por ejemplo; blanca, no es ni 0 ni 1 por cuanto existe la posibilidad de que esto ocurra, pero no se tiene la *certeza* de que de hecho va a ocurrir. En tal caso, la probabilidad de extraer una bolita blanca, lo cual depende del número de bolitas blancas y negras que contenga la urna, será expresada por un número comprendido entre 0 y 1.

Luego: si A es un evento de un espacio muestral Ω, se cumple:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Además:

I. Si $P(A) = 0 \Rightarrow A = \phi$; A es un **evento imposible**.

II. Si $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$; A es un **evento seguro**.

2° Probabilidad de un Evento en Función de su Evento Complementario

Sea A un evento definido en un espacio muestral Ω; entonces:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

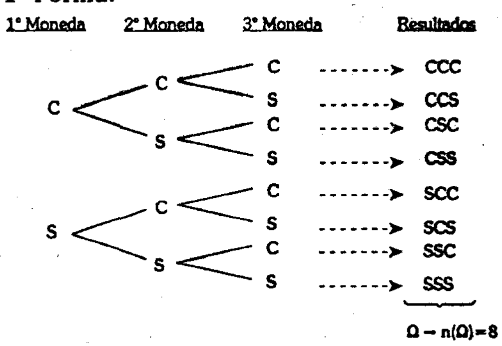
Donde: A' es el suceso complementario de A

Ejemplo:

Calcular la probabilidad de obtener, al menos, una cara en el lanzamiento de 3 monedas legales:

Resolución:

1° Forma:



A: sale al menos una cara, $n(A) = 7$

$\therefore P(A) = \frac{7}{8}$

2da. Forma:

Aplicando la propiedad: Evento complementario de A, el cual sería:

A': "No sale ninguna cara"

Así: $n(A') = 1 \Rightarrow P(A') = \frac{1}{8}$

luego: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

3° Sucesos que se Excluyen Mutuamente: (Mutuamente Excluyentes)

Supongamos que tenemos una baraja de naipes con 52 cartas.

Si hay cuatro ases en un juego de naipes, la probabilidad de retirar un as de entre las 52 cartas es $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ y, analogamente, la probabilidad de extraer un rey es 1/13. Pero, ¿cuál es la probabilidad de retirar, ya sea un as o un rey de un juego de naipes, en una sola vez? Ésta es la probabilidad de sucesos que se excluyen mutuamente o alternativos; si uno de los dos sucesos ocurre, el otro no puede acontecer.

Así, dados dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω se dice que ellos son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente en una prueba del experimento aleatorio; es decir: $A \cap B = \phi$, también se les denomina *sucesos incompatibles*.

Cuando dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes ($A \cap B = \phi$), ocurre $P(A \cap B) = 0$ entonces:

Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Ejemplo:

Apliquemos este resultado en el ejemplo inicial:

ε: Se retira al azar una carta de la baraja

Evento A: sale un as

Evento B: sale un rey

Como se retira una sola carta de la baraja ambos eventos no pueden ocurrir simultáneamente, es decir, sólo ocurre uno de los dos.

Así; de acuerdo con la expresión (α) planteamos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

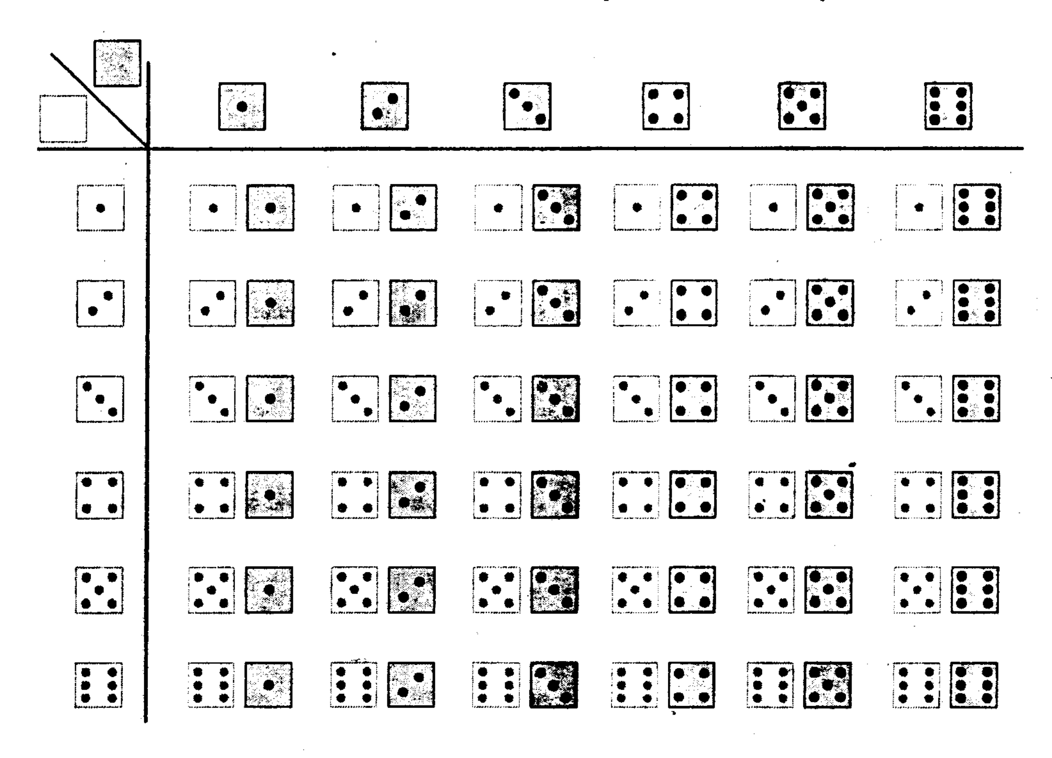
Un teorema más general del cálculo de probabilidades expresa que la probabilidad de que ocurra uno entre varios sucesos que se excluyen mutuamente, es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos aislados.

Ejemplo 1

¿Cuál es la probabilidad de sumar 6 ó 7, al tirar un par de dados normales?

Resolución:

Para comenzar podríamos enumerar la totalidad de casos favorables para que salga una suma igual a 6 ó una suma igual a 7 y luego verificar nuestros resultados con la expresión arriba dada. Veamos, al lanzar un par de dados, el espacio muestral correspondiente sería:



Primer dado:	Segundo dado:	Suma:
1	5	6
2	4	6
3	3	6
4	2	6
5	1	6

Primer dado:	Segundo dado:	Suma:
1	6	7
2	5	7
3	4	7
4	3	7
5	2	7
6	1	7

Al lanzar ambos dados hay 36 combinaciones posibles de ellas y, como podemos apreciar en la tabla, hay 11 casos que son favorables al evento de un total de 36 y, por lo tanto, la probabilidad de obtener una suma 6 o una suma 7 es: $\frac{11}{36}$

Otra forma:

Aplicando, ahora, la propiedad tendremos:

ε: *Se lanzan dos dados normales*

Evento A: Sale suma 6

Evento B: Sale suma 7

Ambos eventos son mutuamente excluyentes, pues al lanzar dos dados ocurre sólo uno de los eventos.

Para el evento A:

Casos favorables: (1;5) , (2;4) , (3;3) , (4;2) y (5;1)

$n(A) = 5$

los casos totales en Ω son 36 $\Rightarrow$ $n(\Omega) = 36$

luego $P(A) = \frac{5}{36}$

Para el evento B:

Casos favorables: (1;6) , (2;5) , (3;4) , (4;3) , (5;2), (6;1); $n(B) = 6$

Los casos totales en Ω son 36 $\Rightarrow$ $n(\Omega) = 36$

entonces $P(B) = \frac{6}{36}$

Con todo lo cual: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$$

Ejemplo 2

Una urna contiene 10 bolas blancas, 20 negras y 30 rojas, si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca o negra?

Resolución:

Los sucesos son excluyentes, la probabilidad de obtener una bola blanca es $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$; la de obtener una bola negra, $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Luego, la probabilidad de obtener una bola blanca o negra será:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

En una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de obtener una carta de corazones con un valor menor que 7 ó un valor mayor que 10?

Resolución:

ε: se extrae al azar una carta de la baraja

Evento A: sale una carta de corazones con un valor menor que 7.

Evento B: sale una carta de corazones con un valor mayor que 10.

Puede deducirse, fácilmente, que ambos eventos son mutuamente excluyentes, pues no puede ocurrir que habiendo extraído una sola carta de corazones ésta tenga, simultáneamente, un valor menor que 7 y a la vez un valor mayor que 10.

Luego.

Casos favorables al evento A: 6; 5; 4; 3; 2; 1

$n(A) = 6$

$n(\Omega) = 52$

$P(A) = \frac{6}{52}$

Casos favorables al evento B: 11, 12, 13.

$n(B) = 3$

$n(\Omega) = 52 \Rightarrow P(B) = \dfrac{3}{52}$

entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{52} + \frac{3}{52} = \frac{9}{52}$$

Observación:

Sucesos compatibles

Si A y B son eventos no excluyentes, se dice **que son *compatibles* cuando en una misma prueba pueden ocurrir ambos simultáneamente, es decir: $A \cap B \neq \phi$.**

Por ejemplo: el evento A: sale un puntaje par al lanzar un dado y el evento B: sale un puntaje múltiplo de 3 son compatibles, pues cuando sale el puntaje 6 se están cumpliendo los dos.

Cuando los sucesos A y B son compatibles, los conjuntos de sus casos favorables tienen elementos comunes; si sumamos los números de elementos de ambos conjuntos, los elementos comunes se contarían dos veces (por estar en ambos conjuntos); este exceso se corrige restando en la expresión anterior de la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes; la probabilidad de la ocurrencia simultánea de ambos eventos (más $A \cap B \neq \phi$); obteniéndose la siguiente expresión:

Teorema de Morgan:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(Probabilidad de sucesos compatibles)

- Como $A \cap B \neq \phi \Rightarrow P(A \cap B) \neq \phi$

Ejemplo 1

Una caja contiene 30 bolas numeradas de 1 al 30 ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar al azar una bola, resulte par o múltiplo de 5?

Resolución:

En este caso los sucesos son compatibles pues cuando sale 10, 20 ó 30 se cumplen simultáneamente las condiciones de ser un número par y múltiplo de 5.

Evento A: Sale una bola con número par.

Evento B: Sale una bola numerada con un múltiplo de 5.

Luego:

La probabilidad de A es $\dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$

La probabilidad de B es $\dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$

La probabilidad de A y B = $\dfrac{3}{30} = \dfrac{1}{10}$

Aplicando el Teorema de Morgan, tendremos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 2

De una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que, al extraer una carta al azar, ésta sea 8 ó de figura negra?

Resolución:

ε : se extrae una carta al azar

Evento A: se obtiene 8

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$$

Evento B: se obtiene figura negra

$$\Rightarrow P(B) = \frac{26}{52}$$

Además: $P(A \cap B) = \frac{2}{52}$ (el 8 de tréboles y el 8 de espadas son dos figuras negras)

Luego:

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{7}{13}$$

Observación:

Sucesos independientes

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, **se dice que dos sucesos son *independientes* uno del otro en relación con un cierto experimento aleatorio, si el acontecer de uno de ellos no está, en modo alguno, relacionado con el acontecer del otro; es decir: la ocurrencia del evento A no afecta al hecho de que ocurra, simultánea o sucesivamente, el evento B.**

Ejemplo:

Sea el evento A: sacar 3 puntos lanzando un dado y el evento B: sacar 5 puntos lanzando el mismo dado. Si efectuamos dos tiradas sucesivas del dado se comprende fácilmente que la probabilidad de que ocurra B en la segunda tirada (es decir, la probabilidad de sacar 5 en la segunda tirada) no depende de que en la primera tirada haya salido 3 o no haya salido 3.

Cuando dos eventos A y B son independientes entonces:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$: Probabilidad producto para sucesos independientes.

Ejemplo 1

Se tira dos veces una moneda; ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 veces cara?

Resolución:

La propiedad correspondiente establece que la probabilidad de que ocurran, a la vez, dos sucesos independientes es el producto de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos. La probabilidad de obtener dos caras seguidas es, por lo tanto: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 2

Supongamos que los sucesos consistentes en comprar una u otra marca de hojas de afeitar sean independientes. Si la probabilidad de que un cliente compre la marca A es 1/3 y la de que compre la marca B es 1/5; la probabilidad de que los clientes sucesivos compren, el primero la marca A y el segundo la B, de acuerdo con la regla anterior es: $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

Ejemplo 3

Supongamos que la probabilidad de que una máquina automática produzca una pieza defectuosa es $\frac{1}{100}$; entonces la probabilidad de fabricar una pieza buena es $\frac{99}{100}$.

Si suponemos que los sucesos "salir pieza buena" y "salir pieza defectuosa" son independientes; la probabilidad de que de 30 piezas las 25 primeras sean correctas, las dos siguientes defectuosas y las 3 siguientes correctas es:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{25} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{2} \times \left(\frac{99}{100}\right)^{3} = \left(\frac{99}{100}\right)^{28} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{2}$$

Ejemplo 4

Se lanza un dado dos veces en forma sucesiva. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean de puntaje 3?

Resolución:

1ro. lanzamiento: P(sale puntaje 3) = $\frac{1}{6}$

2do. lanzamiento P(sale puntaje 3) = $\frac{1}{6}$

el evento: "sale puntaje 3" en el 2° lanzamiento *no depende* de lo que salió en el 1° lanzamiento. Luego la probabilidad de que salga puntaje 3 dos veces consecutivas es: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Analicemos un ejemplo previo:

Luego de entrevistar a 200 estudiantes se observó que:

	Prefieren sólo Raz. Mat.	Prefieren sólo Literatura	
Varones	30	45	Total 75
Mujeres	100	25	Total 125
	Total 130	Total 70	

Sucesos:

Que sean varones: V

Que sean mujeres: M

Que gustan Literatura: L

Que gustan Raz. Mat.: R

¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una persona, ésta prefiera Literatura?

$$P(L) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}$$

¿Cuál es la probabilidad que, al elegir una persona, ésta sea varón?

$$P(V) = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$$

Ahora elegiremos una persona, exclusivamente de las mujeres; ¿cuál es la probabilidad que le guste Raz. Matemático?

$n(\Omega) = 125$ (Total de mujeres)

$n(R) = 100$ (Pref. Raz. Matemático)

$$P(R) = \frac{100}{125}$$

- Para que esté formalmente expresado se denota así:

$$P(R/M) = \frac{100}{125}$$

Se lee: "Probabilidad que prefiera Raz. Matemático, sabiendo que fue mujer".

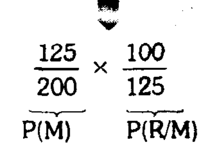
- Se sabe:

$$P(M) = \frac{125}{200} \; ; \; P(R \cap M) = \frac{100}{200} \; ;$$

$$P(R/M) = \frac{100}{125}$$

Analizando: $P(R \cap M)$

$$P(R \cap M) = \frac{100}{200}$$



$$\underbrace{\frac{125}{200}}_{P(M)} \times \underbrace{\frac{100}{125}}_{P(R/M)}$$

Se concluye:

$P(M) \times P(R/M) = P(R \cap M)$

$$P(R/M) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)}$$

¿Qué es probabilidad condicional?

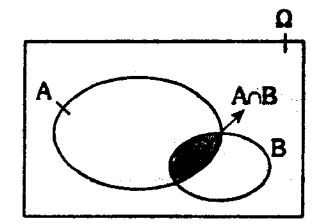
Es un caso particular de probabilidad donde se calcula la probabilidad de un suceso B, sabiendo que ya ocurrió el suceso A, del cual depende el suceso B.

Se denota: $P_{(B/A)}$

Y se calcula, como ya lo hemos demostrado, de la siguiente forma:

$$P_{(B/A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ ;\ P(A) > 0$$

Si hacemos un diagrama, tendríamos:



Aquí debemos de tener cuidado: tendremos que considerar como "**espacio muestral**" los resultados del suceso que ocurren inicialmente.

Ejemplo 1

Se extrae un bolo de un total de 10 (los bolos están numerados del 1 al 10).

¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 3, si se sabe que fue par?

Resolución:

Evento A: Que sea $\overset{\circ}{3}$

Evento B: Que sea par, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$

$A \cap B$: Que el bolo tenga numeración $\overset{\circ}{3}$ y sea par a la vez.

$A \cap B = \{6\}$

$$\therefore\ P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

B: evento que se toma como referencia (que sea par) {2, 4, 6, 8, 10}

$$P(B) = \frac{5}{10}$$

$$\therefore\ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{1}{5}$$

- De otra forma:

  Se sabe ya que el bolo extraído es par {2, 4, 6, 8, 10} de los cuales sólo uno cumple que sea $\overset{\circ}{3}$.

  $$\therefore\ P(A/B) = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 2

Se lanzan un par de dados. Si la suma de los puntajes es 6; hallar la probabilidad de que el puntaje de uno de los dados sea 2.

Resolución:

Evento A: la suma de los puntos es 6

Evento B: sale puntaje 2 en uno de los dados.

Calculemos primero el espacio muestral del evento A: **Sale suma igual a 6**

A={ (1;5); (2;4); (3;3); (4;2); (5;1)} n(A)=5

Ahora tomemos las muestras para el evento B: **Sale puntaje 2 en uno de los dados**.

B = {(2;4) ; (4;2)} n(B) = 2

Luego, la probabilidad de que aparezca 2; si la suma debe de ser 6, será:

$$P_{[B/A]} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 3

Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor que seis si sabemos que dicha suma ha sido múltiplo de cuatro?

Resolución:

Se nos pide la probabilidad

$P(^{\text{suma}<6} / _{\text{suma múltiplo de 4}})$

Utilizando: $P = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$, tenemos:

- Casos posibles: No son todos los resultados posibles al lanzar dos dados, sino sólo aquellos que producen una suma múltiplo de 4; es decir: (1;3),(2;2),(2;6),(3;1),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2),(6;6)
- Casos favorables: Son aquéllos de entre los anteriores cuya suma es menor que 6, es decir: (1;3), (2;2), (3;1)

Por tanto:

$$P(^{\text{suma}<6} / _{\text{suma múltiplo de 4}}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

¡Observa que no hemos utilizado la fórmula de la probabilidad condicionada!; inténtalo usando dicha fórmula.

Ejemplo 4

Un fabricante de partes de avión sabe, por experiencia pasada, que la probabilidad de que un pedido esté listo para ser distribuido es 0,80 y que estará listo para entregarse a tiempo es 0,72 (también que se entregará a tiempo).

¿Cuál es la probabilidad de que este pedido se entregue a tiempo, dado que estuvo listo su envío?

Resolución:

R : Suceso de que un pedido está listo para su distribución.

D : Suceso que se entregará a tiempo.

$P_{(R)}$: 0,80 y $P(D \cap R)$: 0,72

$$P_{(D/R)} = \frac{P_{(D \cap R)}}{P_{(R)}} = \frac{0{,}72}{0{,}80} = 0{,}90$$

PROBABILIDAD COMPUESTA (TEOREMA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA LA PROBABILIDAD CONDICIONAL)

El teorema que trata de la probabilidad de acontecimientos independientes, puede, algunas veces, ser extendido provechosamente para tratar casos en que las probabilidades no son realmente independientes.

Una bolsa contiene una bola blanca (B) y dos negras (N); la probabilidad de retirar una bola negra es $\frac{2}{3}$ y la de una bola blanca es $\frac{1}{3}$.

Supongamos dos extracciones sucesivas de la misma bolsa, reemplazando la bola después de cada extracción. Ahora, la probabilidad de retirar dos B seguidas es: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ y de retirar dos N seguidas es: $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

Sin embargo, si después de cada extracción no se reemplazan las bolas, las extracciones dejan de ser independientes y dependen una de la otra. Después de cada extracción debe calcularse la nueva probabilidad a fin de formar la probabilidad compuesta correcta. Después de haber retirado una bola, la probabilidad de extraer dos N seguidas, sin haber habido reemplazos, es: $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Que la probabilidad de la segunda extracción depende del resultado de la primera, se demuestra también por el hecho de que la probabilidad de sacar dos B es cero, si no se hace un reemplazo, mientras que es $\frac{1}{9}$ si la B es reemplazada.

Ejemplo 1

Tomemos de nuevo el ejemplo de la extracción sucesiva de un naipe y luego de otro, sin devolver el primero, la probabilidad de obtener as de trébol en la primera extracción y figura trébol en la segunda es: $\frac{4}{52}\times\frac{12}{51}$, pues si se sacó as de trébol en la primera extracción y no se devolvió la carta, la probabilidad de figura trébol en la segunda es $\frac{12}{51}$.

Ejemplo 2

La probabilidad de que un determinado día llueva en una ciudad A, estimada estadísticamente es igual a $\frac{1}{50}$ (En una gran cantidad de días con esa fecha, aproximadamente la cincuenteava parte de ellos llueve); se supone que la probabilidad de que llueva en esa misma fecha en una ciudad cercana, B, depende de lo que haya ocurrido en A; si la probabilidad de que llueva en B, habiendo llovido en A es $\frac{2}{3}$; ¿cuál será la probabilidad de que un día con esa fecha llueva, simultáneamente, en A y en B?

Aplicando la regla anterior se tiene:

$$\frac{1}{50}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{75}$$

Ejemplo 3

En una urna se tiene 7 bolas azules y 5 bolas blancas, todas del mismo tamaño. Si extraemos 3 bolas, una por una sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea azul, la segunda blanca y la tercera azul?

1° sale	2° sale	3° sale
Azul	**Blanca**	**Azul**

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{7}{44}$$

Conclusión:

La probabilidad de la conjunción de dos sucesos dependientes (probabilidad de A y B) es igual a la probabilidad de A, por probabilidad de B, habiéndose dado A.

$$P(A\cap B) = P(A) . P[B/A]$$

Ejemplo 4

Se extraen dos cartas de una baraja de 40. Calcular la probabilidad de que ambas cartas sean reyes.

Resolución:

Llamando A al suceso: la primera carta es un rey y B al suceso: La segunda carta es un rey, se nos pide la probabilidad del suceso $A\cap B$: Ambas cartas son reyes. Por tanto:

$$p(A\cap B)=p(A).p(B/A)= \frac{4}{40} . \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Ten en cuenta que el suceso B/A es: Sacar rey en la segunda extracción supuesto que en la primera salió rey. Hay 3 casos favorables (los tres reyes que quedan) sobre 39 posibles (las cartas restantes).

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Una caja contiene 7 lapiceros negros y 5 lapiceros azules, se extrae uno de ellos al azar. Determine la probabilidad de que el lapicero extraído no sea de color azul.

Resolución:

Definamos el suceso o evento (simbolizado por E) de la siguiente manera:

E: el lapicero extraído no es azul.

De acuerdo a la definición de probabilidad tenemos:

$$P(E) = \frac{\text{\# lapiceros que no son azules}}{\text{\# total de lapiceros}}$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{7}{12}$$

OTRA FORMA:

Haciendo uso de la probabilidad del complemento:

Consideremos el suceso A: el lapicero extraído es azul.

$$P(A) = \frac{\text{\# de lapiceros azules}}{\text{\# total de lapiceros}} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{12}$$

Luego; A': El lapicero extraído **no** es azul

$$\Rightarrow P_{(A')} = 1 - \underbrace{P_{(A)}}_{\frac{5}{12}}$$

$$\therefore \; P_{(A')} = \frac{7}{12}$$

PROBLEMA 2

Raúl rinde su práctica calificada y la calificación es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota par mayor que 12?

Resolución:

El espacio muestral tendría 21 elementos (la nota va desde cero hasta 20) veamos:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots 19, 20\}$$

Luego $n(\Omega) = 21$

Consideremos ahora el evento A:

A: Nota par mayor que 12

$A = \{14, 16, 18, 20\}$ luego: $n(A) = 4$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{21}$$

PROBLEMA 3

Halle la probabilidad de que al lanzar tres dados simultáneamente se obtengan los puntos 4; 2 ; 1

Resolución:

La probabilidad de sacar cualquiera de las caras de un dado es $P = \frac{1}{6}$. Puede obtenerse 4; 2; 1 de seis maneras diferentes, observemos el siguiente cuadro:

Primer dado	4	4	2	2	1	1
Segundo dado	2	1	4	1	4	2
Tercer dado	1	2	1	4	2	4
Probabilidad de la combinación	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

Calculemos p_1: la serie "4 con el primer dado", "2 con el segundo dado", "1 con el tercer dado" es una serie de tres acontecimientos independientes, cada uno de los cuales tiene la probabilidad $p = \frac{1}{6}$; por lo tanto: $p_1 = p^3 = \frac{1}{216}$. Del mismo modo, $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{216}$.

Por otra parte, cada combinación excluye las otras (si se hace 4 ; 2 ; 1 en *este* orden, no se hace 2 ; 1; 4, etc.); puede pues aplicarse el teorema de las probabilidades totales, puesto que 4 ; 2 ; 1 puede ser hecho de seis maneras:

$p(\text{"4–2–1"}) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

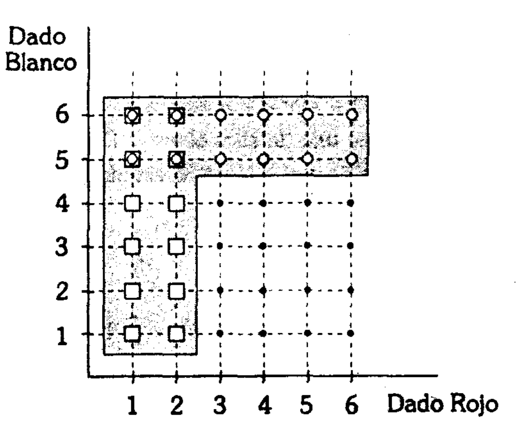
PROBLEMA 4

Se arrojan 2 dados comunes, 1 blanco y otro rojo, halle la probabilidad de obtener un número mayor que 4 en el dado blanco o un número menor que 3 en el dado rojo.

Resolución:

El espacio muestral para cada lanzamiento de los dados se muestra en la figura. El punto (1,5) significa que en el dado rojo se obtuvo 1 y en el dado blanco 5, puesto que los dados son comunes hay 36 puntos muestrales, y la probabilidad por cada punto será: $\frac{1}{36}$

$$P(A \text{ ó } B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$



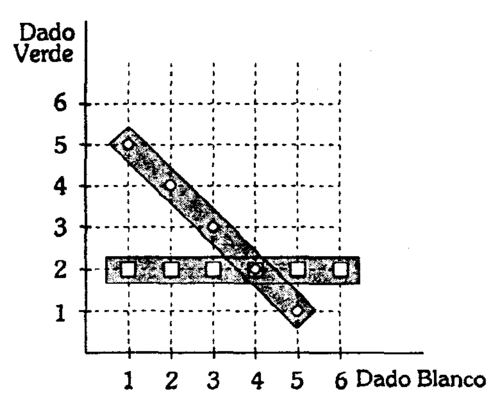
La parte sombreada nos indica los casos favorables de obtener un número mayor que 4 en el dado blanco o un número menor que 3 en el dado rojo.

PROBLEMA 5

Se arrojan dos dados comunes, uno verde y otro blanco. Halle la probabilidad de obtener la suma igual a seis o la obtención de un número 2 en el dado verde.

Resolución:

Análogamente al ejemplo anterior tenemos 36 puntos muestrales y la parte sombreada nos indica los casos favorables de obtener la suma igual a 6 o la obtenían de un número 2 en el dado verde.



Luego:

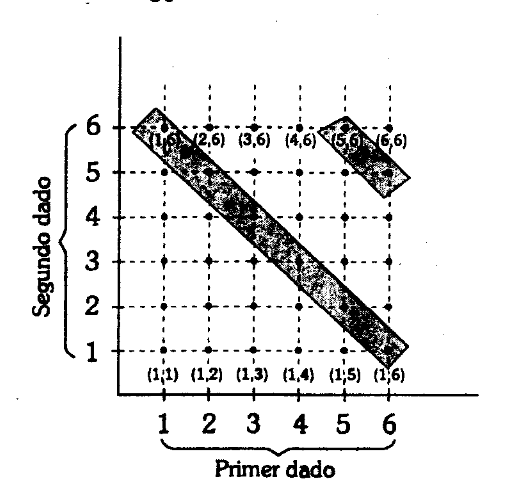
$$P(A \text{ o } B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

PROBLEMA 6

Se lanzan un par de dados comunes. Encontrar la probabilidad de no obtener un total de 7 u 11 en ninguno de los dos lanzamientos.

Resolución:

El espacio muestral para cada lanzamiento de los dados se muestra en el gráfico. Por ejemplo (4,3) significa que el resultado del primer dado es 4 y el del segundo dado 3, puesto que los dados son comunes y hay 36 puntos muestrales asignamos la probabilidad $\frac{1}{36}$ para cada uno.



Si A es el suceso 7 u 11, entonces A se indica por la porción sombreada en el gráfico. Puesto que se incluyen 8 puntos tenemos que $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

Se deduce que la probabilidad de no 7 u 11 está dada por $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Utilizando subíndices 1 y 2 para indicar 1° y 2° lanzamiento de los dos dados observamos que la probabilidad de no 7 u 11 en el primero o segundo lanzamiento está dada por

$$P(A'_1)P(A'_2) = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81}$$

Empleando el hecho de que los lanzamientos son independientes.

PROBLEMA 7

Halle la probabilidad de obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado común.

Resolución:

Sea: A_1 = sale "3 en el primer lanzamiento"

A_2 = sale "3 en el segundo lanzamiento".

Así:

$A_1 \cup A_2$ = sale "3 en el primer lanzamiento ó 3 en el segundo lanzamiento o ambos"

= suceso "al menos un 3".

Nos piden hallar $P(A_1 \cup A_2)$

Método 1:

Los sucesos A_1 y A_2 no son mutuamente excluyentes, pero son independientes. Por tanto:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)(PA_2)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}$$

Método 2:

P(Al menos un 3) + P(ningún 3) = 1

$\Rightarrow$ P(al menos un 3) = 1–P(no 3 en primer lanzamiento y no 3 en 2° lanzamiento)

$$= 1 - P(A'_1 \cap A'_2) = 1 - P(A'_1)P(A'_2)$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{11}{36}$$

Método 3:

Número total de maneras igualmente factibles en las que ambos dados pueden caer = 6.6 = 36

También:

Número de maneras en los que A_1 ocurra, pero no $A_2 = 5$

Número de maneras en los que A_2 ocurra, pero no $A_1 = 5$

Número de maneras en los que tanto A_1 como A_2 ocurran = 1

Luego el número de maneras en los cuales por lo menos uno de los sucesos A_1 ó A_2 ocurra es 5+5+1 = 11. Por lo tanto:

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{11}{36}$$

PROBLEMA 8

Una bola se extrae aleatoriamente de una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 bolas blancas y 5 bolas azules. Determine la probabilidad de que sea:

I. roja | IV. no roja
II. blanca
III. azul | V. roja o blanca

Resolución:

Método 1:

Denótese por R, B y A los sucesos de extraer una bola roja, blanca y azul, respectivamente. Entonces:

$$P(R) = \frac{\text{Maneras de elegir una bola roja}}{\text{Maneras de elegir una bola}} = \frac{6}{6+4+5}$$

$$P(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Método 2:

Nuestro espacio muestral consiste de 6+4+5 = 15 puntos muestrales. Entonces si asignamos probabilidades iguales 1/15 a cada punto muestral observamos que P(R) = 6/15 = 2/5, debido a que hay 6 puntos muestrales que corresponden a bola roja.

I. $P(B) = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$

II. $P(C) = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

De (a)

↓

III. $P(\text{no roja}) = P(R') = 1 - P(R) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

Método 3:

$$P(\text{roja o blanca}) = P(R \cup B) = \frac{\text{Maneras de elegir una bola roja o blanca}}{\text{Maneras de elegir una bola}}$$

$$P(R \cup B) = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Método 4:

De (c)

↓

$$P(R \cup B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Método 5:

Puesto que los sucesos R y B son mutuamente excluyentes se deduce:

$$P(R \cup B) = P(R) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 9

Se escribe al azar un número cualquiera de 4 cifras, calcule la probabilidad de que el producto de cifras sea par o cero.

Resolución:

E: escoger un número de 4 cifras

sea el número: $\overline{abcd}$

cantidad de valores → $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

formas distintas de escribir un número. Consideremos el evento:

A: que su producto de cifras sea par o cero

Total de números – Números con sólo cifras impares

$\overline{abcd}$ $\quad$ $\overline{abcd}$

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000 - 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625 = 8375$

$$\therefore P(A) = \frac{8375}{9000} = \frac{67}{72}$$

PROBLEMA 10

Ana, Betty y 4 amigas más van a ser ubicadas en una carpeta de 6 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Betty se sienten juntas?

Resolución:

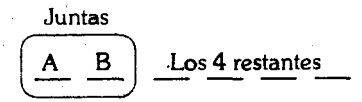
Las personas a sentarse son:

Ana, Betty, 4 amigas más

ε: Se ubican aleatoriamente en 6 asientos

$\therefore \exists n \quad 6! = 720$ formas posibles de sentarse

A: que Ana y Betty se sienten juntas



es como si fueran 5 elementos, 4 personas libres y 2 juntas que hacen como un elemento.

$5! \times 2! = 240$ formas posibles

$$\therefore P(A) = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMA 11

Tres cazadores disparan simultáneamente contra una liebre. El primero consigue hacer blanco 3 veces de cada 5, el segundo 3 veces de cada 10 y el tercero solamente 1 vez de cada 10. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos, uno de los tres cazadores alcance a la liebre?

Resolución:

Sean los cazadores A, B y C

y las probabilidades de que acierten cada uno sean: P(A) ; P(B) y P(C)

$$P(A) = \frac{3}{5} \quad P(B) = \frac{3}{10} \quad P(C) = \frac{1}{10}$$

A: que al menos uno de los cazadores acierte

Sea A': que ningún acierte

$P(A) = 1 - P(A')$

$$P(A) = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10}$$

$$P(A) = \frac{187}{250}$$

PROBLEMA 12

En una caja hay 120 bolas iguales, numeradas del 1 al 120. Una persona extrae una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga un número que sea múltiplo de 4?

Resolución:
Son bolas numeradas:

①, ②, ③, ④, ⑤, ... , (119), (120)

Anotemos los números que son:

$\overset{\circ}{4}$: 4, 8, 12, 16, 20 120

$4n = 120 \Rightarrow n = 30$

$$\therefore \quad P(\overset{\circ}{4}) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

PROBLEMA 13

Se escogen al azar dos dígitos tomados desde 1 hasta 9. Si la suma es par halle la probabilidad p de que ambos números sean impares.

Resolución:
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Números impares = {1, 3, 5, 7, 9}
A = Los dos números escogidos sean impares

$$P(A) = \frac{C_2^5}{C_2^9} = \frac{5}{18}$$

PROBLEMA 14

Diez parejas cenan juntas, se eligen al azar cinco personas para lavar las vajillas. ¿Qué probabilidad hay de encontrar en ellas sólo una de las parejas?

Resolución:
Diez parejas son: 20 personas. Consideramos el evento:
A: encontrar una pareja en 5 personas escogidas

$$P(A) = \frac{C_1^{10}}{C_5^{20}} = \frac{10}{C_5^{20}} = \frac{5}{7752}$$

PROBLEMA 15

Una lista de personas consta de 140 hombres de varones y 30 nombres de mujeres; 3 de ellas se llaman María. Se escoge un nombre al azar y resulta que es de mujer. ¿Cuál es la probabilidad que sea una de las Marías?

Resolución:
En la lista de personas hay nombre de 140 varones y 30 mujeres, además hay 3 que se llaman María
Son en total: 170 personas

E: se escoge el nombre de una persona
Existen 170 formas en total de escoger el nombre de una persona.
A: que sea el nombre de una de las Marías.
como hay 3 nombres de Marías, existen 3 formas de escoger el nombre de una María.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{170}$$

PROBLEMA 16

Tres caballos A, B y C intervienen en una carrera. A tiene doble probabilidad de ganar que B y B doble probabilidad de ganar que C. ¿Cuál es la probabilidad de que gane C?

Resolución:
Son 3 caballos: A, B y C
E: compiten en una carrera
Evento A: que gane A
Evento B: que gane B
Evento C: que gane C

Por dato: $P(A) = 4P \quad P(B) = 2P \quad P(C) = P$

Observación:

Por definición la probabilidad de que alguno gane es igual a 1, es decir:
$P(A \text{ ó } B \text{ ó } C) = 1$
Luego:
$P(A) + P(B) + P(C) = 1$
$4P + 2P + P = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{7}$

$$P(C) = \frac{1}{7}$$

PROBLEMA 17

Considerando que la semana comienza el lunes, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger Manuel 2 días del mes de febrero para salir con su enamorada, éstos resulten ser días consecutivos y de la misma semana, si además el 1ro. de febrero fue lunes?

(Observación: el año es no bisiesto)

Resolución:

E: escoger 2 días

Existen $C_2^{28} = \dfrac{28\times 27}{2} = 14\times 27 = 378$

formas en total de escoger 2 días.

FEBRERO

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

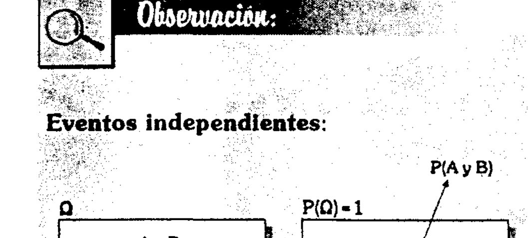
Evento A: que sean días consecutivos y de la misma semana.

En cada semana existen 6 formas de escoger 2 días consecutivos, como son 4 semanas existirán 4(6) = 24 formas de escoger 2 días consecutivos:

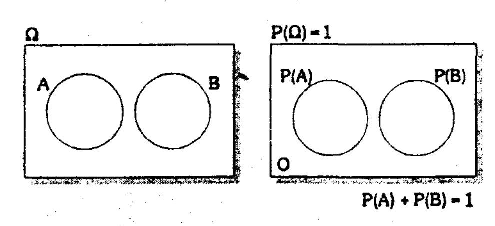
$$\therefore \quad P(A) = \frac{24}{14\times 27} = \frac{4}{63}$$

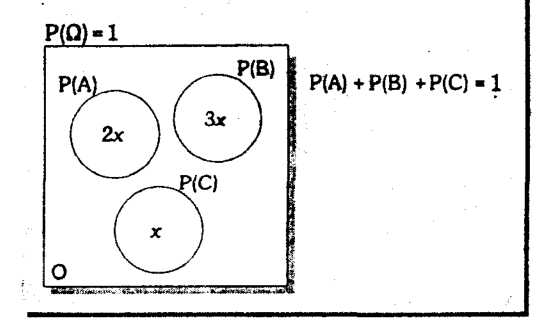
Observación:

Eventos independientes:



Eventos mutuamente excluyentes:

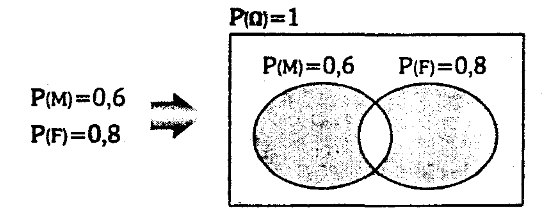




PROBLEMA 18

La probabilidad de aprobar matemática es 0,6 y la probabilidad de aprobar física es 0,8, ¿cuál es la probabilidad de aprobar solo uno de dichos cursos?

Resolución:



$$\Rightarrow \; P(M \text{ o } F) = P(M) + P(F) - P(M)\,P(F)$$

$$P(M \text{ o } F) = 0,6 + 0,8 - 2(0,6)(0,8)$$

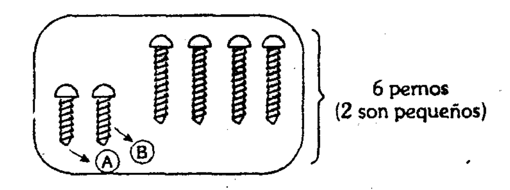
$$= 1,4 - 0,96$$

$$P(M \text{ o } F) = 0,44$$

PROBLEMA 19

Sabemos que entre seis pernos, dos son más cortos que los demás. Si se escogen dos pernos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos más cortos sean los escogidos?

$$P = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{C_2^2}{C_2^6} = \frac{1}{15}$$



[A y B] o [B y A]

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

PROBLEMA 20

Un sistema electrónico consta de dos dispositivos A y B, la probabilidad que falle A es 0,2 de que fallen ambos es 0.15 y de que falle sólo B es 0.45.

Determine la probabilidad de que:

a. Falle A sabiendo que falló B

b. Falle sólo A

Resolución:

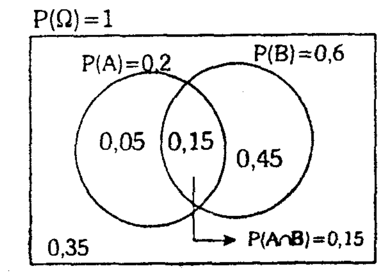
Recordemos que los dispositivos son dos: A y B, además:

P(que falle A) = 0,2

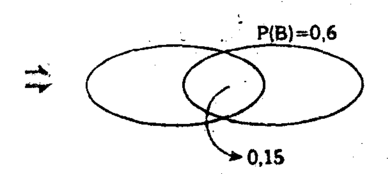
P(que falle A y B) = 0,15

P(que falle sólo B) = 0,45

Haremos un diagrama:



a. Falle A sabiendo que falló B:



$$\therefore \frac{0,15}{0,6} = \frac{1}{4}$$

b. Falle sólo A:

P(falla sólo A) = 0,05

PROBLEMA 21

Tres cazadores A, B y C están aportando con sus rifles a un león. La probabilidad de que acierte A el disparo es 4/5, la de B es 3/7 y la de C es 2/3. Si los tres disparan, calcule la probabilidad de que:

a. Los tres acierten.

b. Acierte A y B y que C falle.

c. Ninguno acierte.

Resolución:

Datos:

P(A) = 4/5

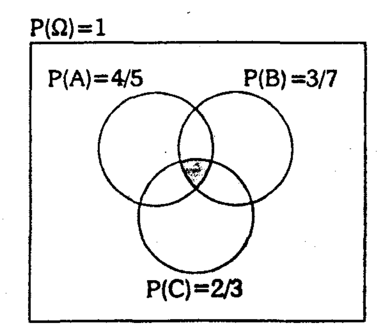
P(B) = 3/7

P(C) = 2/3

a. Los tres disparan simultáneamente

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{35}$$



b. Evento A: aciertan A y B
evento B: falla C

$$P\begin{pmatrix}\text{Acierten A y B,}\\ \text{pero C falla}\end{pmatrix} = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} - \frac{8}{35}$$

$$= \frac{4}{35}$$

P(Ω) = 1
P(A) = 4/5
P(B) = 3/7
P(C) = 2/3

c. Ninguno de ellos acierta; es decir los tres fallan.

$$P\begin{pmatrix}\text{falle A , falle B}\\ \text{y falle C}\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\text{falle}\\ \text{A}\end{pmatrix} \times P\begin{pmatrix}\text{falle}\\ \text{B}\end{pmatrix} \times P\begin{pmatrix}\text{falle}\\ \text{C}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{105}$$

PROBLEMA 22

El evento C tiene el doble de posibilidad que el evento A; el evento B tiene igual posibilidad que la suma de posibilidades de A y C. Los eventos son mutuamente excluyentes y uno de ellos debe ocurrir. Halle la probabilidad de cada uno de los eventos.

Resolución:

Datos:

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = P \\ P(B) = 3P \\ P(C) = 2P \end{array}\right\}$$

Como los eventos son mutuamente excluyentes:

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P + 3P + 2P = 1$$

$$\therefore\ P = \frac{1}{6}$$

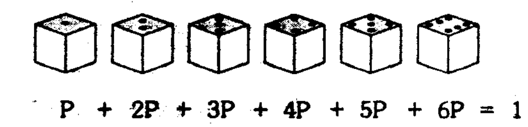
Luego:

P(A) = 1/6
P(B) = 1/2
P(C) = 1/3

PROBLEMA 23

Suponga que se ha cargado un dado de manera que la probabilidad que ocurra un número determinado es proporcional al mismo. Si se lanza el dado, calcule la probabilidad que ocurra un número mayor que 4.

Resolución:



$$P + 2P + 3P + 4P + 5P + 6P = 1$$

$$\therefore\ P = \frac{1}{21}$$

Para que ocurra un número mayor que 4 debe salir 5 ó 6; luego:

$$5P + 6P = 11P = \frac{11}{21}$$

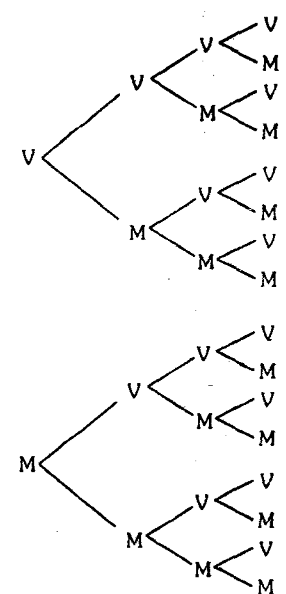
PROBLEMA 24

Una pareja planifica tener 4 hijos. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. Sean todos del mismo sexo
b. Dos sean niñas
c. Entre ellos haya a lo más 3 niños.

Resolución:

Por el diagrama del árbol hallamos el espacio muestral



Podemos ver que el espacio muestral tiene 16 elementos. Además consideramos los eventos:

Evento A: Todos son del mismo sexo
Evento B: dos son niñas
Evento C: Entre ellos hay a lo más 3 niños

Luego:

a. $P(A) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$

b. $P(B) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

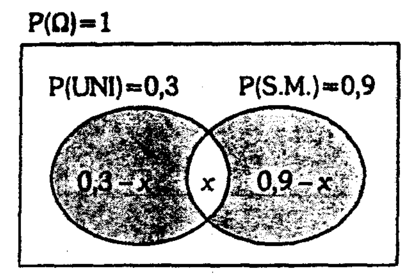
c. $P(C) = \dfrac{15}{16}$

PROBLEMA 25

Yamilet se presenta a los exámenes de la UNI y San Marcos, la probabilidad que ingrese a la UNI es 0,3 y de que ingrese a San Marcos es 0,9. Si la probabilidad de que ingrese sólo a una de dichas universidades es 0,7 ¿cuál es la probabilidad de que ingrese a ambas a la vez?

Resolución:

$P(\Omega)=1$



P(ingrese a ambas a la vez) = x

Luego: $0,3 - x + 0,9 - x = 0,7$

Despejando:

$$x = \frac{0,3+0,9-0,7}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

PROBLEMA 26

Se elige un comité de 8 personas de un grupo de 6 hombres y 5 mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho comité haya, al menos, 3 mujeres?

Resolución:

El grupo de personas está conformado por:
6 hombres
y 5 mujeres se presentaron 3 casos en la formación del comité:

Caso 1: 3M y 5H ⇛ $C_3^5 \times C_5^6 = 60$

Caso 2: 4M y 4H ⇛ $C_4^5 \times C_4^6 = 75$

Caso 3: 5M y 3H ⇛ $C_5^5 \times C_3^6 = 20$

Luego:
Número formas de integrar el comité:
3M y 5M ó 4M y 4H ó 5M y 3H

$$C_3^5 \times C_5^6 + C_4^5 \times C_4^6 + C_5^5 \times C_3^6$$

$$60 \quad + \quad 75 \quad + \quad 20 \quad = 155$$

Cálculo de elementos del espacio muestral:

$$C_8^{11} \times C_3^{11} = 165$$

Entonces:
P(en el comité hay por lo menos 3 mujeres) =

$$\frac{155}{165}$$

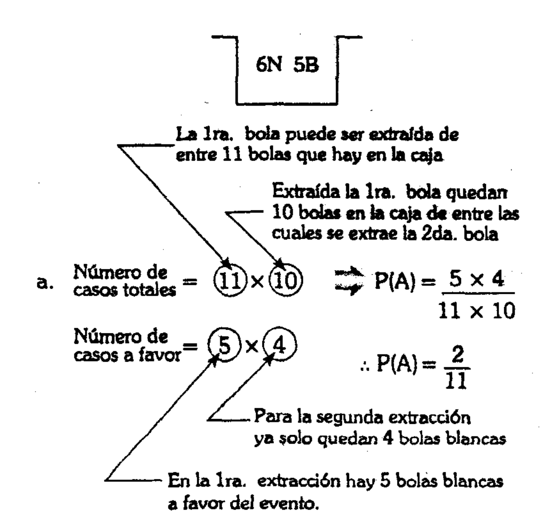
$$P = \frac{155}{165} = \frac{31}{33}$$

PROBLEMA 27

Pepe tiene 6 bolas negras y 5 bolas blancas en uno de sus bolsillos, si extrae al azar 2 bolas en forma sucesiva; determinar la probabilidad de que:

a. Evento A: Las 2 sean blancas
b. Evento B: Haya una de cada color
c. Evento C: Las 2 sean del mismo color.

Resolución:



b. $\left.\begin{array}{l} N^\circ C.T. = 11 \times 10 \\ N^\circ C.F. = 6 \times 5 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B) = \dfrac{30}{110}$

$$\therefore \; P(B) = \frac{3}{11}$$

c. $\left.\begin{array}{l} N^\circ C.T. = 11 \times 10 \\ N^\circ C.F. = 6 \times 5 + 5 \times 4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(C) = \dfrac{50}{110}$

$$\therefore \; P(C) = \frac{5}{11}$$

PROBLEMA 28

Se lanzan dos dados simultáneamente, uno rojo y el otro negro. ¿Cuál es la probabilidad de obtener en uno resultado par y en el otro un número impar?

Resolución:

N° Casos totales $\Rightarrow 6^2 = 36$
N° Casos favorables = 18

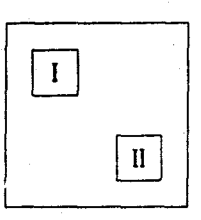
R	N		R	N
2	1	análogamente	3 × 3 = 9	
4	3			
6	5			

3 × 3 = 9 combinaciones posibles
(Números pares) (Números impares)

$$\therefore \; P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

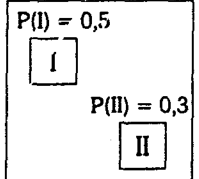
PROBLEMA 29

Se efectúa un disparo sobre un objetivo que consta de 2 partes I y II (como se muestra en la figura) la probabilidad de tocar la parte I es 0,5; la de tocar la parte II es 0,3. Un disparo efectuado no alcanzó la parte I, determine la probabilidad de que este disparo haya alcanzado la parte II.



Resolución:

$P(\Omega)=1$:



$$P(I) = \frac{1}{2} <> \frac{5}{10}$$

$$P(II) = \frac{3}{10}$$

P(no dé en ninguna)=

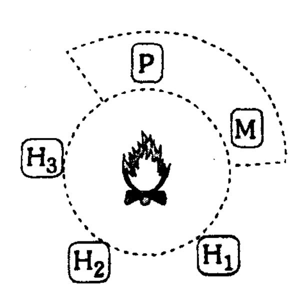
$$P(\sim I \text{ y } \sim II) = \frac{2}{10} <> \frac{1}{5}$$

$$\therefore \quad P_{\left(\substack{\text{Que dé en II dado} \\ \text{que no dió en I}}\right)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5}$$

PROBLEMA 30

Una pareja y sus tres hijos salen al campo. Una vez que llegaron prenden una fogata y se sientan alrededor de ésta. ¿Cuál es la probabilidad de que los padres estén siempre juntos?

Resolución:



N° Casos totales: $P_C(5) = 4! = 24$

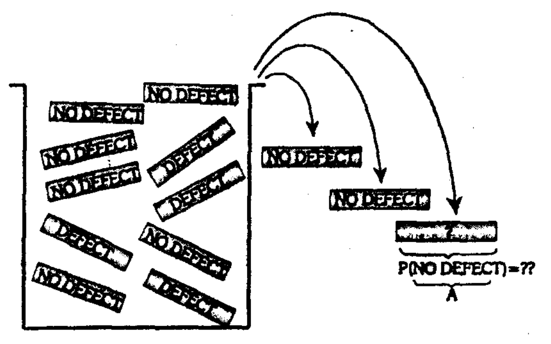
N° Casos favorables: $P_C(4) \times 2! = 3! \times 2!$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 31

Una caja contiene 4 tubos defectuosos y 6 no defectuosos. Se sacan 3 a la vez. Se prueban dos de ellos y se encuentra que son no defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad que el otro también sea no defectuoso?

Resolución:



Como ya se han extraído 2 tubos aún quedan 8 en la caja.

Luego: N° Casos totales : 8

Como los 2 tubos extraídos son no defectuosos todavía quedan 4 de esta clase (pues al inicio había 6 no defectuosos).

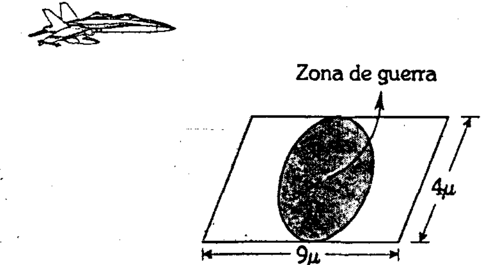
⇒ N° Casos favorables: 4

Aplicando la definición de probabilidad tenemos:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 32

El proyectil lanzado por el "Kafir F-17" de la figura cae dentro del rectángulo. ¿Qué probabilidad existe de que no caiga en zona de guerra? (Región sombreada: círculo)



Resolución:

Caso total:

$4 \times 9 = 36$ ⇒ área del rectángulo.

Caso a favor:

$36-\pi(2)^2 = 36-4\pi$ ⇒ área de la región fuera de la zona de guerra

$$\therefore\ P(A) = \frac{36-4\pi}{36} = \frac{9-\pi}{9}$$

PROBLEMA 33

Eva dice la verdad 2 de cada 3 veces. Ana de cada 5 dice la verdad 4; ambas concuerdan en asegurar que de una bolsa que contenía 6 fichas de distintos colores se retiró una de color verde. Halle la probabilidad de que la aserción sea verdadera.

Resolución:

$$P(E) = \frac{2}{3} \qquad P(A) = \frac{4}{5}$$

Para que la aserción sea verdadera, cualquiera de las 2 debe decir la verdad:

$$\therefore\ P(E\cup A) = P(E) + P(A) - P(E\cap A)$$

$$P(E\cup A) = \frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$$

$$P(E\cup A) = \frac{22}{15}-\frac{8}{15}=\frac{14}{15}$$

PROBLEMA 34

Una caja contiene 30 bolas numeradas del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola resulte par o múltiplo de 5?

Resolución:

El espacio muestral es:

Ω={①, ②, ③, ④, ⑤, ... ㉚}

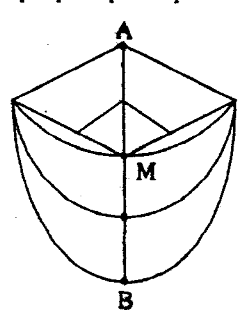
Se extrae una bola al azar; entonces debe resultar par o múltiplo de 5

$$P(N^\circ \text{ par ó } \overset{\circ}{5}) = P(N^\circ \text{ par}) + P(\overset{\circ}{5}) - P(\text{par y } \overset{\circ}{5})$$

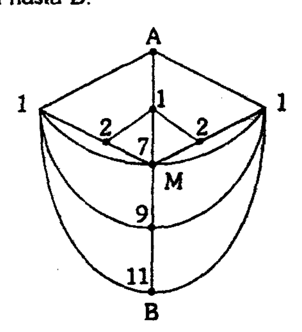
$$= \frac{15}{30}+\frac{6}{30}-\frac{3}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

PROBLEMA 35

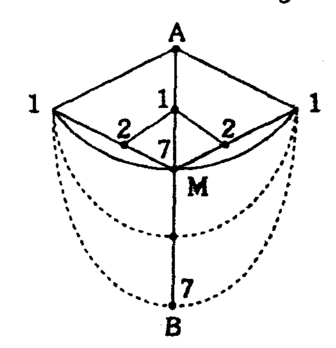
Una persona debe pasar del punto A al punto B. Al llegar a una intersección elige el camino a seguir aleatoriamente, además hace su recorrido sin retroceder en ningún momento. ¿Cuál es la probabilidad que pase por el punto M?



Casos posibles: Hay 11 recorridos que nos conducen hasta B.



Casos favorables: 7 manera de llegar hasta M.



$$P(\text{para pasar por M}) = \frac{7}{11}$$

PROBLEMA 36

Una caja contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Las cuatro primeras son blancas y las 6 últimas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola salga blanca o número par?

Resolución:

$$\Omega = 10 \text{ bolas} = \{\overbrace{①,②,③,④}^{\text{blancas}},\overbrace{⑤,⑥,⑦,⑧,⑨,⑩}^{\text{negras}}\}$$

$n(\Omega)=10$

Se extrae una bola al azar esta debe ser blanca o tener un N° par; luego:

P(blanca o N° par) =P(blanca) + P(N° par) − P(blanca y N° par)

$$= \frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

PROBLEMA 37

La probabilidad que mañana llueva es 0.10 ; la probabilidad que truene es 0.05 y la probabilidad que llueva y truene es 0.03. ¿Cuál es la probabilidad que llueva o truene ese día?

Resolución:

Evento A: que llueva ; Evento B: que truene

$P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,05$;

$P(A\cap B) = 0,03$

Sabemos que:

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0,1 + 0,05 - 0,03$

$\Rightarrow P(A\cup B) = 0,12$

PROBLEMA 38

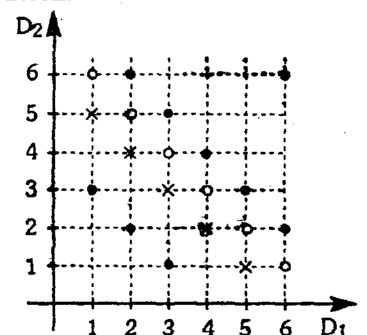
Se lanza un par de dados en forma simultánea. Determinar la probabilidad de que:

a. Se obtenga suma 7

b. Se obtenga suma divisible por 4.

c. Se obtenga suma divisible entre 2 y 3 simultáneamente.

Resolución:



- ∘ sumas con resultado 7
- • sumas divisibles por 4
- × sumas divisibles por 2 y 3

$n(\Omega) = 36$

a. A: Obtener suma 7 $\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b. B: Obtener suma divisible por 4
$n(B) = 3 + 5 + 1 = 9$
$P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

c. C: Obtener suma divisible entre 2 y 3 (dichas suma debe ser $\overset{\circ}{6}$)

$n(c) = 5 + 1 = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

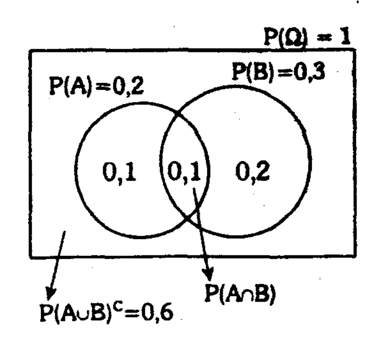
PROBLEMA 39

Sean A y B dos eventos que no son mutuamente excluyentes tal que:
$P(A) = 0{,}20$; $P(B) = 0{,}30$ y
$P(A \cap B) = 0{,}10$
Calcule: $P[A^C \cap B^C]$

Resolución:

$P(A) = 0{,}2 \quad P(B) = 0{,}3$

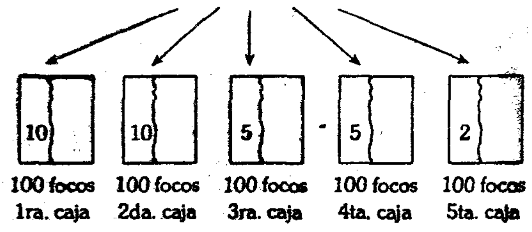
$P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad ¿\underbrace{P(A^C \cap B^C)}_{P(A \cup B)^C}?$



PROBLEMA 40

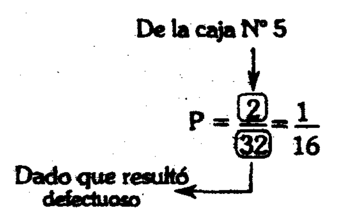
Se tienen cinco cajas que contienen cada uno 100 focos. Dos de las cajas contienen 10 focos defectuosos cada una; las otras dos cinco focos defectuosos cada uno y la última 2 focos defectuosos. Si se selecciona al azar una de estas y de ella se toma un foco, ¿cuál es la probabilidad de que el foco defectuoso provenga de la caja que contiene el 2% de defectuosos, dado que al seleccionar aleatoriamente un foco, resultó siendo defectuoso?

Resolución:



Nº total de focos = 500

Nº de focos defectuosos: $10+10+5+5+2 = 32$



Problemas Propuestos

1. Al lanzar dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma mayor que diez?

A) 11/12 B) 10/15 C) 13/12
D) 1/12 E) 13/15

2. Se lanzan 3 dados. Halle la probabilidad de obtener exactamente un as (el número uno).

A) 28/72 B) 52/72 C) 30/72
D) 25/72 E) 42/72

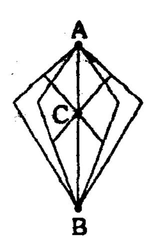
3. En una caja hay 10 bolas de billar, de las cuales sólo 4 son amarillas, se toman tres al azar. Halle la probabilidad de que por lo menos una resulte de color amarillo.

A) 1/30 B) 15/24 C) 10/12
D) 1/6 E) 5/6

4. De un total de 52 cartas, se extraen 2 a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de espadas?

A) 13/52 B) 1/17 C) 1/23
D) 1/52 E) 3/17

5. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que realiza un paseo aleatorio pase por C, si inicialmente partió de A y en ningún momento debe retroceder respecto a su meta que es B?



A) 5/21 B) 6/13 C) 5/7
D) 6/7 E) 7/9

6. Se lanzan dos dados insesgados (no cargados) un blanco y otro negro. Halle la probabilidad de:

a. Sacar la suma 6.
b. Sacar la diferencia 2
c. Sacar la diferencia 2 ó la suma 6.
d. Sacar la suma 6 y la diferencia 2.

A) 5/36; 7/9; 13/36; 5/162
B) 5/36; 2/9; 13/36; 5/162
C) 5/36; 2/7; 13/36; 5/162
D) 5/36; 2/9; 13/37; 5/162
E) 5/36; 2/7; 13/37; 5/162

7. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) 2/36 B) 6/18 C) 7/18
D) 6/36 E) 2/6

8. Si se arrojan 6 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 4 caras y 2 sellos?

A) 1/64 B) 63/64 C) 1/5
D) 1/2 E) 15/64

9. En una habitación 6 personas tienen respectivamente S/. 1; S/. 2; S/. 3; S/ 4; S/. 5 y S./6. Se eligen 3 personas al azar y se apunta el número de soles que tiene cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que el menor número de soles escrito sea 3?

A) 2/3 B) 9/11 C) 1/2
D) 1/7 E) 3/5

10. En una carrera de caballos el caballo A tiene las apuestas 5:1 en su contra, mientras el caballo B las tiene 9:1 en su contra; ¿cuál es la probabilidad que cualquiera de estos dos caballos gane?

Observación: La notación a :b nos indica **a** apuestas a favor y **b** en contra

A) 15/17 B) 13/16 C) 13/19
D) 15/17 E) 13/15

11. Se escogen, al azar, tres planchas de un grupo de quince de las cuales 5 son defectuosas. Halle la probabilidad de que al menos 3 sean defectuosas.

A) 187/1001 B) 185/1001 C) 177/1001
D) 178/1001 E) 170/1001

12. La probabilidad de no aprobar Matemática I es 0,8 y la probabilidad de no aprobar Física I es 0,75 y la probabilidad de aprobar sólo uno de dichos cursos es 0,95. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar Física I, si sabemos que no se aprobó Matemática I?

A) 3/4 B) 2/7 C) 3/25
D) 2/25 E) 5/17

13. Se tiene una baraja de 52 cartas. Calcule la probabilidad de:

a. Obtener un rey o una reina al tomar una sola carta de la baraja.
b. Que al tomar una sola carta esta sea una reina o una espada.
c. Que al tomar una carta de la baraja y luego de ponerla de nuevo, en el mazo, se toma otro naipe, siendo ambos naipes ases.

A) 2/13; 4/13; 1/169 B) 3/13; 4/13; 1/116
C) 2/13; 4/13; 2/169
D) 2/13; 5/13; 1/169 E) 4/13; 5/13; 1/169

14. Juan y cuatro amigos se ubican en una fila, ¿cuál es la probabilidad de que Juan quede en el centro?

A) 1/5 B) 2/5 C) 3/10
D) 4/7 E) 3/13

15. Para una rifa se venden 20 boletos, comprando Luis 2 de ellos.

Si se ofrecen dos premios, ¿cuál es la probabilidad de que Luis obtenga sólo uno de los premios?

A) 19/95 B) 1/190 C) 3/190
D) 18/95 E) 5/98

16. En una bolsa se tienen 5 caramelos de fresa, 4 de limón y 2 de naranja. Si extraemos 3 caramelos al azar, ¿cuál es la probabilidad que entre los 3 que se han sacado exista por lo menos un caramelo de cada tipo?

A) 3/15 B) 8/30 C) 7/21
D) 4/15 E) 9/15

17. En una urna se tienen 12 bolas, 7 blancas y 5 negras. Se extraen 2 bolas al azar una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea roja?

A) 30/121 B) 35/121 C) 38/121
D) 33/121 E) 36/121

18. En una urna se tienen 4 bolas blancas y 6 rojas. Se extrae al azar una por una. ¿Cuál es la probabilidad de que en la tercera vez se obtenga por primera vez la bola blanca?

A) 1/6 B) 1/15 C) 3/16
D) 2/13 E) 5/12

19. Si se lanza un dado legal, ¿cuál es la probabilidad de obtener un puntaje mayor que 2?

A) 2/7 B) 2/5 C) 2/3
D) 3/5 E) 5/7

20. Entre los números 1,2,3 . . . 50 se escoge un número al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 ó 8?

A) 0,24 B) 0,48 C) 0,36
D) 0,32 E) 0,49

21. En una urna hay 8 fichas negras y 5 fichas blancas. Se extrae una ficha al azar. ¿Cuál es la probabilidad que sea de color negro?

A) 7/15 B) 3/17 C) 8/13
D) 9/13 E) 5/31

22. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras en 4 tiros de una moneda y una suma igual a 11 en un tiro de dos dados?

A) 3/73 B) 5/72 C) 17/72
D) 2/73 E) 1/72

23. En una urna hay 10 bolitas numeradas del 1 al 10. Se extraen de esta urna 2 bolitas al azar. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento aleatorio?

A) 45 B) 53 C) 62
D) 47 E) 70

24. En una bolsa se tienen 8 caramelos de fresa y 3 de limón. Si se extraen al azar 2 caramelos; ¿cuál es la probabilidad que salga 2 caramelos de fresa?

A) 31/45 B) 13/45 C) 28/45
D) 29/45 E) 17/45

25. Se escribe al azar un número de 2 cifras, ¿cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 5?

A) 1/15 B) 1/13 C) 2/15
D) 1/17 E) 3/17

26. Una moneda se lanza 4 veces. Calcule la probabilidad que haya salido un número igual de caras y sellos.

A) 2/5 B) 7/10 C) 11/13
D) 3/7 E) 3/8

27. Se reunieron 10 hombres y 5 mujeres para elegir un presidente (a) dentro de los presentes. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer sea elegida?

A) 1/5 B) 1/3 C) 3/15
D) 1/7 E) 4/13

28. Una empresa quiere contratar un empleado y se presentan 3 candidatos: M, N, P. Las probabilidades de M son de 7 contra 5 y las de N de 1 contra 3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene P de ocupar la vacante?

A) 1/12 B) 3/12 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/10

29. De una caja que contiene 3 bolas negras, 4 blancas y 2 amarillas, se extrae al azar una de ellas. Halle la probabilidad que la bola extraída no sea negra.

A) 2/7 B) 1/5 C) 2/3
D) 3/5 E) 7/9

30. Nueve libros, de los cuales 5 son de Razonamiento Matemático y 4 de Razonamiento Verbal, se colocan al azar en una estantería. Halle la probabilidad de que los libros de cada materia estén juntos?

A) 7/63 B) 1/63 C) 3/57
D) 3/62 E) 2/63

31. Si se lanzan 3 monedas, ¿cuál es la probabilidad de no obtener 2 caras?

A) 1/8 B) 7/8 C) 5/8
D) 3/8 E) 1/2

32. Siete parejas de casados participan en un concurso. Si se escogen 2 personas al azar. Halle la probabilidad de que una sea hombre y la otra mujer.

A) 7/13 B) 5/13 C) 7/12
D) 2/13 E) 13/15

33. En una justa deportiva internacional 10 atletas compiten en una carrera de 1000 metros. Se otorga un primer, segundo y tercer premio. Si un país cuenta con cuatro participantes en la carrera, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga los 3 premios?

A) 1/25 B) 7/30 C) 3/25
D) 2/25 E) 1/30

34. Un grupo de 10 amigos (4 hombres y 6 mujeres), fueron de paseo. En el grupo se encuentran Nano e Yngrid, se eligen al azar una pareja de exploradores , ¿cuál es la probabilidad de que la pareja esté constituida por Nano e Yngrid?

A) 2/73 B) 2/45 C) 3/50
D) 1/45 E) 4/45

35. Una ficha cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4 respectivamente es lanzada 5 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 17?

A) 9/17 B) 3/16 C) 5/16
D) 7/16 E) 5/17

36. Se lanzan 2 dados y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que aparezcan un número par, una cara y un número impar?

A) 1/2 B) 1/4 C) 3/5
D) 3/4 E) 2/7

37. Tres estudiantes de la Academia ADUNI intervienen en una prueba de Razonamiento Matemático, Yngrid y Fernando tienen la misma probabilidad de ganar y el doble que la de Nano. Halle la probabilidad de que gane Nano o Yngrid.

A) 3/5 B) 5/7 C) 3/7
D) 2/5 E) 1/5

38. Suponga que se tiene un dado cargado de tal forma que la probabilidad del número que salga sea proporcional al mismo. Calcule la probabilidad de la ocurrencia de:

a. Un número par
b. Un número mayor que 4

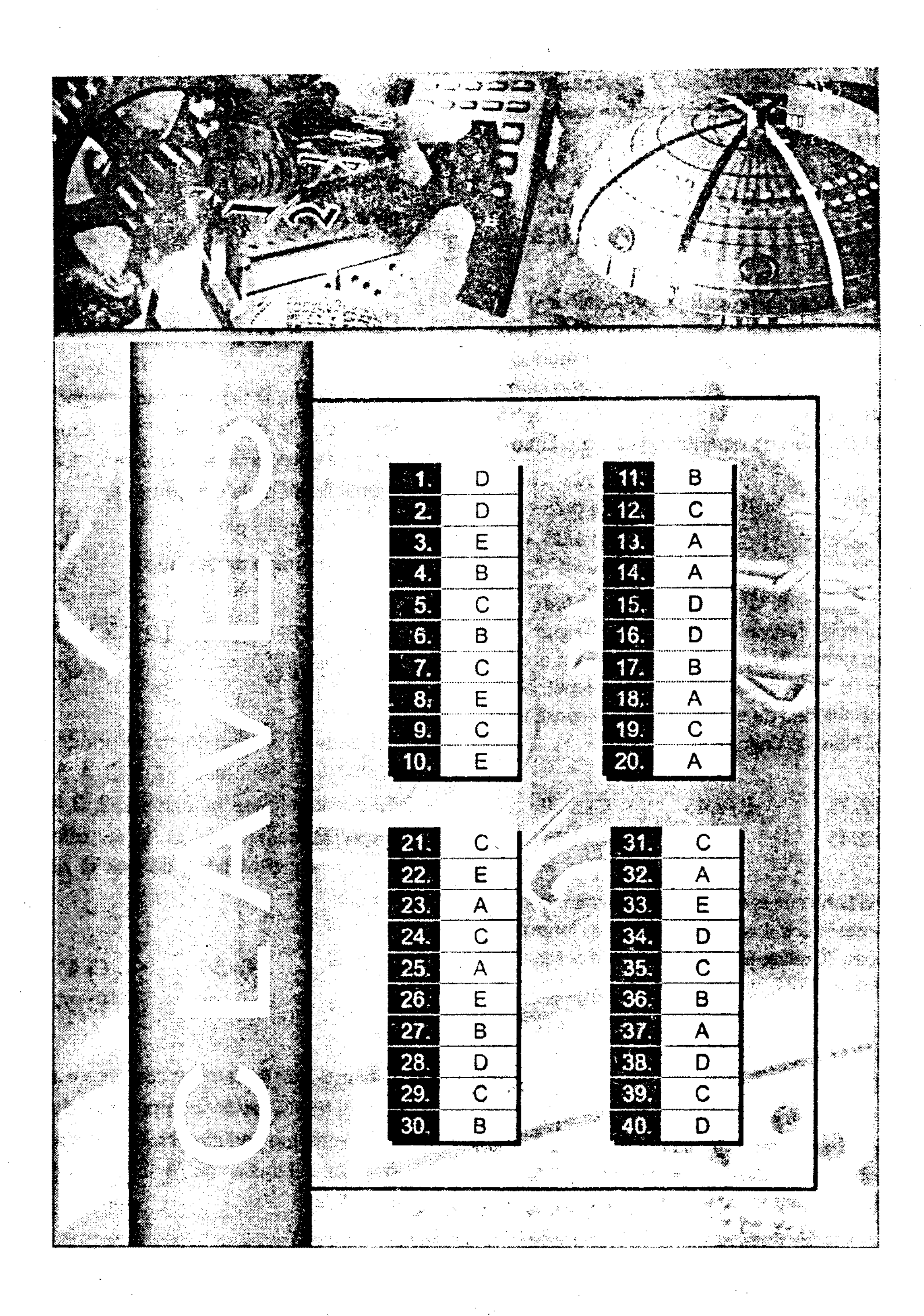
A) 4/7; 12/21 B) 5/7; 11/21 C) 6/7; 11/21
D) 4/7; 11/21 E) 4/7; 13/21

39. Un dado está cargado de tal modo que la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5, ó 6 es proporcional a los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente. Si se lanza este dado, calcule la probabilidad de que el resultado sea par.

A) 3/17 B) 3/7 C) 4/7
D) 5/21 E) 2/7

40. Digamos que las familias con hijos están bien repartidas, si están compuestos de tantos varones como mujeres. Halle la probabilidad que una familia de 4 hijos estén bien repartidas.

A) 2/7 B) 1/5 C) 3/4
D) 1/4 E) 7/9



1.	D	11.	B	21.	C	31.	C
2.	D	12.	C	22.	E	32.	A
3.	E	13.	A	23.	A	33.	E
4.	B	14.	A	24.	C	34.	D
5.	C	15.	D	25.	A	35.	C
6.	B	16.	D	26.	E	36.	B
7.	C	17.	B	27.	B	37.	A
8.	E	18.	A	28.	D	38.	D
9.	C	19.	C	29.	C	39.	C
10.	E	20.	A	30.	B	40.	D

Blas Pascal

"Quise descubrir leyes eternas . . ."

En la infancia, cuando aún estaba muy pequeño, le dio una rarísima enfermedad nerviosa. Según las descripciones se supone que lo había mordido un perro con hidrofobia: el niño tenía un miedo pánico al agua, se debatía en tremendas convulsiones y luego se calmaba quedando completamente sin sentido y como si estuviera muerto. Si fue así, no se explica cómo logró sobrevivir. De todos modos, sobrevivió y bastante pronto mejoró de su mal. A los 4 años perdió a su madre y, en esencia, quedó abandonado a su propia suerte en la elección de sus juegos y ocupaciones. A veces su padre, presidente de la cámara de colectas e impuestos de Auvernia, le hablaba de distintas cosas raras: sobre la pólvora, las tormentas, los lentes de aumento. Su padre quería desarrollar la inteligencia en él, y no la memoria, por eso nunca le exigía que aprendiera algo de memoria. Blas, durante mucho tiempo, no perdió el gran don de la infancia: la capacidad de sorprenderse. Una vez, mientras desayunaba, se dio cuenta que si golpeaba un plato de loza con un cuchillo y luego lo tocaba con un dedo, el sonido desaparecía. ¿A dónde? Sobre esto escribió una pequeña composición. Tenía entonces 12 años.

Su padre tenía fama de ser un apasionado y talentoso aficionado a las matemáticas. Mantenía correspondencia con Descartes, Fermat y Roberval, y las discusiones sobre las matemáticas no eran raras en su casa.

–¿Papá, qué es la geometría?–preguntó un día Blas.

Su padre quedó pensativo. Veía el futuro de su hijo en el estudio de los idiomas y no quería dispersar su aplicación.

–¿Cómo explicártelo? . . . Es un medio de dibujar figuras regulares y encontrar las relaciones que existen entre ellas.

Según sus cálculos, esta explicación difícilmente podía despertar la curiosidad infantil, pero se equivocó. Sobre el papel y en el suelo de su cuarto, Blas dibujaba los teoremas iniciales de Euclides. Ni siquiera conocía los términos generalmente aceptados y llama "palo" a la línea recta, "rueda" al círculo y "cuadrado largo" al paralelogramo. Su padre al verlo ocupado de ello se alegró mucho.

A los 16 años demostró el teorema de Pascal y escribió un tratado sobre las secciones cónicas. A los 18 años inventó una máquina calculadora, la "abuela" de los aritmómetros modernos. Previamente construyó 50 modelos. Cada nuevo modelo era más perfecto que el anterior. El joven constructor anotó sin saber aún que su pensamiento se adelantaba en siglos a su tiempo: "La máquina calculadora ejecuta acciones que se aproximan más al pensamiento que todo lo que hacen los animales". La máquina le dio popularidad. Apreciar sus fórmulas y teoremas sólo pueden hacerlo contadas personas, pero aquí, ¡la máquina cuenta por sí sola!

Blas Pascal se volvió célebre.

Entre otras cosas, el título de hombre famoso lo mereció realmente.

Descartes se negaba a creer que el autor de los trabajos matemáticos que acababan de enviarle no tenía sino 16 años.

A los 24 años Pascal quedó paralítico. Se movía con dificultad, con muletas, pero seguía trabajando. ¡Oh, cómo le mortificaban esas muletas! Máxime que había decidido descifrar definitivamente el enigma de la presión atmosférica y poner punto final a los trabajos de muchos años de Galileo, Torricelli y Rey. Al principio aceptaba el antiguo axioma escolástico: "Si, evidentemente la naturaleza, en realidad, no soporta el vacío". Mas, profundizado en la esencia de la cuestión, comprendió que la "repugnancia que la naturaleza siente por el vacío" era una vacua combinación en palabras. Si esto era verdad, la "repugnancia" en la cumbre de la montaña y en sus estribaciones debía ser igual; pero si era distinta, no se trataba de ninguna "repugnancia", sino de la presión de la atmósfera. ¿Pero cómo realizar el experimento si las piernas se negaban a servirle?

En noviembre de 1 647, Pascal escribe a su cuñado una carta detallada donde le pidió que realizará el experimento pensado por él en el monte Puy de Dom (de 1 467 metros de altura). Sólo en septiembre del año siguiente. Pascal, consumido por la curiosidad, recibió una repuesta precisa: la presión en la cumbre del monte es menor que en su base. En París él mismo repite este experimento en la torre de la calle Rivoli.

Parecía que el espíritu de esta persona extraordinaria había vencido su débil cuerpo, pero de pronto, aquel mismo año, fatal para él (1 648), Pascal, de 25 años de edad, sufre un cambio brusco. Abandona todas sus ocupaciones alusivas a las matemáticas y la física, lee solamente libros teológicos y trata de aislarse. Es difícil explicar las causas de esta transformación. Se debía indudablemente a su estropeado sistema nervioso, a los frecuentes dolores de cabeza y a la doctrina en boga de los jansenistas que le convencía de que su renuncia a la ciencia sería un sacrificio a Dios, quien le encomendara sufrimientos físicos.

Influyó en él, asimismo, la muerte de su padre en 1 651, y el hecho de que su hermana menor, Jacqueline, la más querida, tomara los hábitos. Pascal era una persona muy impresionable y delicada, con un sistema nervioso inestable y frágil. Los sufrimiento de su cuerpo y de su espíritu lo vivían martirizando. La salud empeoraba de manera catastrófica. Siente espasmos en la garganta, padece terribles dolores de cabeza. Podía tomar líquidos sólo gota a gota, calentaba los pies friccionándolos con alcohol. Lo atendían tiernamente sus fieles amigos, que trataban de divertirlo, sacándolo "al gran mundo".

Y nuevamente, pese a todos los sufrimientos físicos, su genio, despertándose paulatinamente del opio religioso, busca la salvación en el trabajo. Reanudó la correspondencia con Fermat, respondió a la carta del conocido parrandista y jugador caballero de Mere, exponiendo nuevas ideas en la esfera de la teoría de las probabilidades, inventó la carretilla y el ómnibus. Poco a poco va saliendo del abismo de la desesperación. Se siente mejor de salud e incluso piensa en contraer matrimonio. ¡Pero se presentó aquí el viaje a la fiesta a Neuilly! Los caballos, desbocados, tiraron de la carroza, en el puente sobre el Sena, se apartaron, y los primeros dos, rompiendo los tirantes, cayeron al agua. La carroza se salvó por milagro. Cuando la gente se acercó corriendo, Pascal estaba privado. Desde aquel momento, podía considerarse muerto, aunque vivió ocho años más.

Con estos ocho años de vida de Pascal la Iglesia se vengaba cruelmente de la ciencia.

Pascal murió el 19 de agosto de 1 662, a la edad de 39 años.

LÓGICA PROPOSICIONAL Y DE CLASES

"Las proposiciones matemáticas son parecidas a las de la lógica porque no conciernen a las cosas sobre las que deseemos discutir, sino más bien al modo con que deseamos discutirlas".

Hahn

Lectura 22

El Razonamiento Lógico

El arte del razonamiento, sin el cual no existirían las matemáticas, fue elevado por los griegos a un alto grado de perfección. En su obra "Elementos", Euclides demostraba teoremas deduciéndolos de proposiciones admitidas a priori y, desde entonces, siempre se ha procedido de esta forma, definiendo objetos y fijando, mediante leyes llamadas axiomas, las reglas que los rigen.

Kurt Godel demostró el teorema que lleva su nombre

El razonamiento por reducción al absurdo: *La deducción de teoremas a partir de axiomas obedece a las reglas del razonamiento lógico, de las cuales la más fundamental es tal vez la que prohibe que una proposición y su negación sean verdaderas simultáneamente. De hecho, basta que en una teoría haya una proposición contradictoria para que todas lo sean, restando así todo interés a la teoría. El método por reducción al absurdo se basa en este principio. Consiste en probar la veracidad de una proposición demostrando la incompatibilidad de su negación con los axiomas de la teoría la que se supone no contradictoria. Para ello, se hace la hipótesis de que la proposición por demostrar es falsa, lo cual añade un axioma implementario, y se entrega uno a las deducciones hasta que se descubre una contradicción. Como al principio la teoría era no contradictoria y se ha convertido en contradictoria: resulta que la hipótesis hecha era, falsa.*

El teorema de Godel: *El temor a la contradicción es, en cierto modo, el temor a demostrar demasiado, pero, en el extremo opuesto, está el temor de no demostrar lo suficiente. De hecho, la cuestión que se plantea es la de saber si es siempre posible, a partir de axiomas, demostrar o rechazar todas las proposiciones de una teoría. Si ese fuera el caso, la etapa siguiente consistiría en encontrar un procedimiento mecánico que permitiese llegar a ese mismo fin, después de lo cual el matemático se habría quedado en paro. victima de la máquina construida por él. Sin embargo se sabe desde 1931, año en que Kurt Godel demostró que existían, en toda proposición matemática lo bastante rica, proposiciones fuera del alcance de la deducción, que no podían probarse ni rechazarse mediante el método de reducción al absurdo. Así es como se ha excluido la posibilidad de encontrar un día una contradicción en la aritmética, a menos que se le añada como axioma una proposición falsa.*

El miedo al Infinito: *Durante mucho tiempo se ha desconfiado del concepto de infinito. Hay varios conceptos de infinito: los números infinitamente grandes, los puntos del infinito en geometría, los conjuntos que poseen infinitos elementos, etc. Toda la dificultad se deriva de la impotencia para establecer unas reglas coherentes que rijan el infinito. Así pues, seria posible inventarse un nuevo número, llamado infinito, decretando que es el resultado de la división de 1 entre 0. pero habría que declarar de inmediato, en aras de la coherencia. que 2 dividido entre 0 da también infinito, de donde se deduciría que el infinito por 0 da igualmente 1 que 2. y no se saldría de ahí! Otro rompecabezas son los conjuntos que contienen infinitos elementos ya que, ¿es acaso razonable decir que hay el mismo número de puntos sobre una recta que sobre un plano?.*

FUENTE: El mundo de las matemáticas.

Objetivos

1. *Interpretar adecuadamente un esquema molecular de proposiciones.*
2. *Conocer y aplicar en forma correcta los principios lógicos.*
3. *Ampliar los conocimientos adquiridos en la etapa escolar sobre lógica proposicional y lógica de clases.*

Introducción

La escuela de Atenas, obra de Rafael (siglo XVI). En el están representados los grandes pensadores de la Grecia Clásica: Platón, Pitágoras y Euclides.

Todos los tópicos relativos a las matemáticas se razonan desde el punto de vista lógico y por tanto hay que tener muy en cuenta el enunciado de las proposiciones matemáticas, pues, de ellas deducimos su validez. En cualquier fórmula matemática encontraremos tres tipos de símbolos diferentes: las constantes, las variables, y los símbolos auxiliares. Por ejemplo: en la expresión $(a+b)^2$, el signo "+" y el exponente 2 son constantes, las letras "a" y "b" constituyen las variables y los paréntesis representan los símbolos auxiliares. Las constantes son símbolos cuyos significados en un contexto dado son fijos. Así, en la expresión dada, el signo "+" indica que debemos formar la suma de dos cantidades "a" y "b", en tanto que el exponente 2 indica que debemos multiplicar la suma "a+b" por sí misma. Las variables siempre representan entidades de un tipo dado, pero permiten determinar, posteriormente, con exactitud qué tipo de entidad particular es la que vamos a considerar. En el ejemplo, mencionado anteriormente, las letras "a" y "b" representan cantidades no específicas. Los símbolos auxiliares funcionan más o menos como los signos de puntuación en la escritura ordinaria.

Por ejemplo, si omitiéramos el paréntesis en la expresión anterior, obtendríamos lo siguiente: $a+b^2$, que posee otro significado diferente a la expresión $(a+b)^2$.

En este capítulo usaremos variables de un sólo tipo. Indicaremos estas variables por medio de letras minúsculas: p, q, r, s, etc., que representan proposiciones no específicas. Siempre estas proposiciones serán simples. Pero también las habrá compuestas, en los cuales encontramos dos o más proposiciones simples unidas a través de conjunciones gramaticales; estas conjunciones gramaticales, dependiendo de quién se trate, las representaremos con las constantes lógicas $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, Δ, $\leftrightarrow$. En cualesquiera de los casos la proposición, ya sea simple o compuesta, tendrá un valor veritativo.

NOCIONES PREVIAS

ENUNCIADO

Se llama enunciado a toda frase u oración. Algunos enunciados son mandatos, interrogaciones o expresiones de emoción; otros en cambio son afirmaciones o negaciones que tienen la característica de ser verdadero o falso.

Ejemplos:

- ¿Qué hora es?
- ¡Apúrate!
- Prohibido hacer bulla.
- Dos más tres es igual a cinco.
- Todas las gallinas son aves.
- París es la capital de Francia.

ENUNCIADO ABIERTO

Son expresiones que contienen "variables" y que no tienen la propiedad de ser verdaderos o falsos. También se les conoce con el nombre de función proposicional.

Ejemplo:

"$x < 5$"

Es un enunciado abierto (o función proposicional) porque no podemos afirmar si es V o F; sólo cuando "x" toma un valor numérico se hace V o F.

Así tendremos:

- $x = 3 \Rightarrow 3 < 5$ .... (V)
- $x = 9 \Rightarrow 9 < 5$ .... (F)

PROPOSICIÓN

Es todo enunciado que tiene la cualidad de ser verdadero o ser falso pero nunca puede ser verdadero y falso a la vez.

Nota:

Denotaremos a las proposiciones con letras minúsculas: p, q, r, s, etc.

Ejemplo:

p : dos más tres es igual a cinco .... (V)

q : cuatro y diez son múltiplos de dos ..... (V)

r : ocho es menor que tres .... (F)

PROPOSICIÓN SIMPLE

Llamada también atómica o elemental. Son aquellas que carecen de conjunciones gramaticales y del adverbio de negación (no). No tiene relación con ninguna otra proposición, sino que es una idea única y simple, es decir, es de un solo significado.

Ejemplo:

p : nueve es múltiplo de tres.

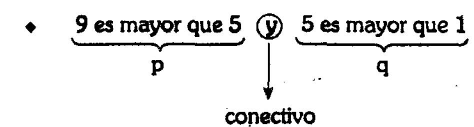
q : tres es mayor que dos.

r : tres es menor que ocho.

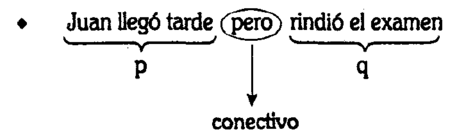
PROPOSICIÓN COMPUESTA

Llamada también molecular o coligativa. Son aquellas que están formadas por dos o más proposiciones simples, unidas por conjunciones gramaticales (conectivos), o afectados por el adverbio de negación (no).

Ejemplo 1



Ejemplo 2



CONECTIVOS LÓGICOS

Son símbolos que enlazan proposiciones simples sin formar parte de ellos. Dichos símbolos también toman el nombre de operadores.

Los conectores lógicos que usaremos son:

- La conjunción (y) : $\wedge$
- La disyunción débil (o) : $\vee$
- La condicional (si, entonces) : $\rightarrow$
- La bicondicional (si y sólo si) : $\leftrightarrow$
- La negación (no) : $\sim$
- La disyunción fuerte (o, o) : Δ

FUNCIONES VERITATIVAS

El valor de verdad de una proposición compuesta se determina por medio de los valores de verdad de sus componentes. Al discurrir sobre un conectivo, nuestro interés principal es saber en qué forma la verdad de una proposición compuesta, construida con dicho conectivo, depende de la verdad de sus componentes. Una forma muy conveniente de tabular tal dependencia es por medio de una tabla de verdad.

Ejemplo 1

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tabla de Verdad

Ejemplo 2

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabla de Verdad

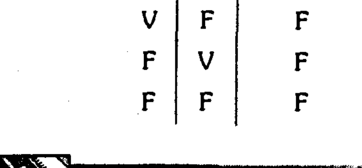
A continuación veremos las tablas de verdad de la conjunción, disyunción, condicional, bicondicional y de la negación.

La Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, la conjunción es el resultado de reunir estas proposiciones con el conectivo lógico "y".

Se denota como: $p \wedge q$ y se lee: "p y q". La proposición "p" puede se verdadero o falso, e igual puede suceder con q. Por lo tanto hay cuatro pares posibles de valores de verdad para esta conjunción y deseamos saber si es o no verdadera o falsa. La respuesta es directa: si p y q son ambos verdaderos, entonces $p \wedge q$ es verdadero y en caso contrario $p \wedge q$ sería falso. Esto parece razonable, puesto que la proposición $p \wedge q$ dice ni más ni menos, tanto p como q, son ambos verdaderos. Su tabla de verdad será así:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F



Las palabras: "pero"; "sin embargo"; "además"; "aunque"; "no obstante" y otras expresiones más; equivalen al conectivo de la conjunción.

Ejemplo 1

- Los perros son cuadrúpedos, **también** mamíferos.

p : los perros son cuadrúpedos
q : los perros son mamíferos
} $p \wedge q$

Ejemplo 2

- Las computadoras son caras, **sin embargo** son útiles.

p : las computadoras son caras
q : las computadoras son útiles
} $p \wedge q$

Ejemplo 3

- Juan es inteligente, **además** es alto.

p : Juan es inteligente
q : Juan es alto
} $p \wedge q$

LA DISYUNCIÓN

La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q con el conectivo lógico "o".

Aquí la aseveración consiste en que uno o el otro de los enunciados es el verdadero. Claramente, se ve que si un enunciado es verdadero y el otro falso, entonces la disyunción es verdadera mientras que, si ambos son falsos, entonces la disyunción es ciertamente falsa. Es así que podemos indicar la tabla siguiente.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Notamos que una posibilidad (la primera fila) no se definió del todo, pues cabe la pregunta: "¿Qué pasa si ambos componentes son verdaderos?".

Entendemos que el uso familiar de "o" resulta ambiguo. De momento no estamos seguros si "o" significa "uno o el otro, o ambos" o significa "uno o el otro, pero no ambos".

Para su análisis, veamos algunos ejemplos: "Este verano pienso concertar una cita con Betty o con Kelly"; abre la posibilidad que el que lo dice, concierte la cita con ambas señoritas. Sin embargo la siguiente expresión:

"Iré o a Argentina o a Brasil", indica que sólo se puede escoger uno de los dos países; "Compraré un televisor o un equipo de sonido", puede usarse en los dos sentidos; es decir, la persona podría querer decir que está tratando de ponerse de acuerdo consigo mismo acerca de cuál de los dos deberá comprar, pero también podría querer decir que va a comprar cuando menos uno de ellos, o posiblemente ambos. Observamos que algunas veces el contexto podrá hacer que el significado sea claro, pero no siempre. De acuerdo a esto, podemos establecer una disyunción inclusiva (p o q o ambos) y otra llamada disyunción exclusiva (p o q pero no ambos). Las tablas de verdad de cada una de estas dos disyunciones se muestra a continuación:

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción exclusiva

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos (sobre disyunción inclusiva)

- "a es mayor o igual que b"

$$a \geq b \equiv \underbrace{a > b}_{p} \vee \underbrace{a = b}_{q}$$

$$\equiv p \vee q$$

- De dos cursos : computación y matemáticas, Manuel domina por lo menos uno.

  ≡ Manuel domina computación o
  p
  Manuel domina matemática
  q

  $\equiv p \vee q$

  $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge \sim p)$

Nota:

$p \vee q$ es una disyunción inclusiva porque incluye a $p \wedge q$: Manuel domina ambas materias.

Ejemplos (sobre disyunción exclusiva)

- De dos cursos: computación y matemáticas. Manuel domina sólo un curso.

  ≡ Manuel domina computación pero no matemática
  $(p \wedge \sim q)$
  o Manuel domina matemática pero no computación
  $q \wedge \sim p$

  $\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

  $\equiv p \Delta q$

- Juan ordenó hacer el trabajo A o B pero
  $p \vee q$ $\wedge$
  no ambos
  $\sim(p \wedge q)$

  $\equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

  $\equiv p \Delta q$

LA CONDICIONAL

Es la relación de dos proposiciones mediante el conectivo:

"Si . . . . , entonces . . . . "
p q

La proposición "p" se llama antecedente (hipótesis) y la proposición "q" se llama consecuente (conclusión).

Su tabla de verdad es como se muestra:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En el buen lenguaje, para hacer condicionales $p \rightarrow q$, se pone especial cuidado en que el antecedente "p" sea verdadero, porque se supone que sólo a partir de antecedentes verdaderos se deduce que el consecuente "q" sea verdadero.

En matemáticas se puede hacer condicionales a partir de antecedentes falsos.

Ejemplos:

- "Si el pejerrey es un pez, entonces tiene respiración branquial"

- "Si el sapo ladra, entonces es un perro".
  En este caso no tiene sentido ya que el antecedente es falso.

- "Si 2=3 entonces 15=15".
  Tiene sentido hacer la condición por tanto es verdadero.

En matemáticas es corriente aplicar condicional lógica cada vez que se desea deducir nuevas proposiciones verdaderas. Igualmente, en toda investigación de diversas disciplinas se hacen inferencias a partir de algunas premisas (antecedentes) para llegar a una conclusión (consecuente).

LA BICONDICIONAL

Cuando dos proposiciones están unidas por el conectivo "si y sólo si".

Una proposición bicondicional es verdadera, si ambas componentes son verdaderas o ambas son falsas, caso contrario será falso.

Su tabla de verdad es como se muestra:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo:

- ($m^2=4$ si y sólo si $m=2 \lor m=-2$) ≡ p ↔ q, donde $m^2=4$ es p y $m=2 \lor m=-2$ es q
- ($x^2 < 9$ si y sólo si $-3 < x < 3$) ≡ p ↔ q, donde $x^2 < 9$ es p y $-3 < x < 3$ es q

LA NEGACIÓN

Dada una proposición "p", la negación de "p" es otra proposición que se denota por "~p" y se lee: "no p" o "no es cierto que p".

La negación (no), cumple la función de negar una afirmación y de afirmar una negación.

Su tabla de verdad es:

p	~p
V	F
F	V

Observación:

Cuando en un párrafo se escribe los términos:

- No es el caso que .... y ....
  ~ p ∧ q
- Es falso que .... y ....
  ~ p ∧ q

En estos casos, los indicados términos niegan toda la proposición compuesta representada por "p ∧ q".

Ejemplos:

- "No es el caso que los perros ladren y muerdan"

  Tenemos:

  p : los perros ladran
  q : los perros muerden
  } ~ (p ∧ q)

- Es falso que si una bicicleta es de marca n es barata
  (Es falso que = ~)

  ≡ ~(p → ~q)

Nota:

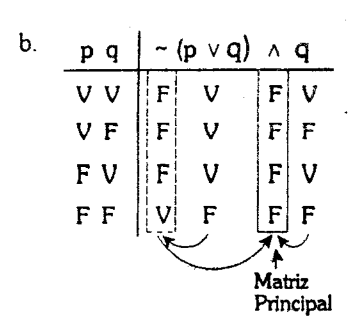
- **La equivalencia**: dos fórmulas (esquemas moleculares) A y B son equivalentes cuando unidos por el bicondicional "↔" el resultado es una tautología.
- **La implicación**: Una fórmula "A" implica a "B", cuando unidos por el condicional "→", siendo "A" antecedente y "B" consecuente, el resultado es una tautología.
- Un esquema molecular es tautológico cuando los valores de su operador principal (matriz principal), son todos verdaderos (esquema "a").
- Un esquema molecular es contradictorio cuando el resultado de su operador principal (matriz principal), todos los valores son falsos. (esquema "b").
- Un esquema molecular es consistente (de contingencia) cuando en su resultado (matriz principal) hay por lo menos una verdad y una falsedad (esquema "c").

a.

p	q	[p	∧	(p → q)]	→	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V	F

Matriz Principal

b.



p	q	~	(p ∨ q)	∧	q
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F

c.

p	q	(p → q)	∧	q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Matriz Principal

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

En el cálculo o análisis proposicional se utilizan ciertas leyes lógicas o tautologías que veremos a continuación.

Involución (doble negación)

$\sim(\sim p) \equiv p$

Idempotencia

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$

Conmutativa

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

Asociativa

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Distributiva

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

De De-Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Del Condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Del Bicondicional

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \,\Delta\, q)$

LEYES LÓGICAS ADICIONALES

- $\sim p \vee q \equiv \sim p \vee (p \wedge q)$
- $\sim p \wedge q \equiv \sim p \wedge (p \vee q)$
- $p \,\Delta\, q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
- $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
- $p \wedge F \equiv F$
- $p \wedge V \equiv p$
- $p \wedge (\sim p) \equiv F$
- $p \vee F \equiv p$
- $p \vee V \equiv V$
- $p \vee (\sim p) \equiv V$
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$
- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

Al resolver la tabla de verdad de:

$$\sim p \vee [q \leftrightarrow \sim(p \,\Delta \sim q)]$$

indique el resultado de la matriz principal.

Resolución:

Recordemos que la matriz principal se ubica debajo del operador de mayor jerarquía. En este caso se ubica debajo de la disyunción.

p	q	~p	∨	[q	↔	~	(p	Δ	~q)]
V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	V	V

∴ FFVV

PROBLEMA 2

Determine la matriz principal de:

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

Resolución:

p	q	~	(p ∨ q)	↔	(~p	∧	~q)
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

∴ VVVV

PROBLEMA 3

Dada las proposiciones:

p : 18 es un número primo.

q : 4 es un número cuadrado perfecto.

r: 11 es un número par.

Calcule el valor veritativo de:

$$[(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (s \,\Delta \sim s)] \wedge \sim r$$

Resolución:

De acuerdo a las proposiciones dadas podemos determinar que: p ≡ F ; q ≡ V; r ≡ F.

Además, en el esquema molecular tenemos la expresión: "s Δ ~s". Entonces se puede deducir que para cualquier valor de verdad que tome la proposición "s" dicha expresión siempre será "V"

Luego:

```
[ ( ~ p → q ) ↔ ( s Δ ~ s ) ] ∧ ~ r
      F                            F
    V     V           V            V
       V
             V
                     V
```

∴ Valor veritativo : V

PROBLEMA 4

Sabiendo que la proposición "p" es verdadera, ¿en cuál de los siguientes casos es suficiente dicha información para determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

a. $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

b. $(q \rightarrow p) \vee \sim r$

c. $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$

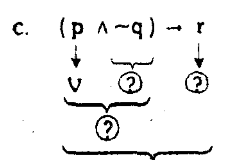
d. $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim p)$

Resolución:

```
a. ( p ∨ q ) → ( ~ p ∧ ~ q )
                   V
   V   ?        F      ?
     V            F
           F
```

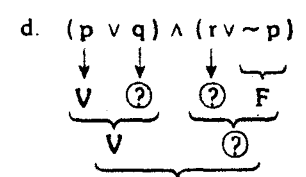
```
b. ( q → p ) ∨ ~ r
     ?   V       ?
       V        ?
           V
```

c. $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$



No se puede determinar el valor de verdad

d. $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim p)$



No se puede determinar el valor de verdad

$\therefore$ a y b

PROBLEMA 5

Se definen las proposiciones:

$p \# q \equiv \sim p \wedge q$

$p \,\theta\, q \equiv p \vee \sim q$

Además la proposición:

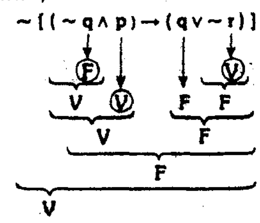
$$\sim [(q \# p) \rightarrow (q \,\theta\, r)]$$

es verdadera. Halle los valores de verdad de "p", "q", "r".

Resolución:

Reemplazando, tenemos:

$\sim [(\sim q \wedge p) \rightarrow (q \vee \sim r)]$



$\therefore\ p \equiv V;\ q \equiv F;\ r \equiv V$

Observación:

El desarrollo de este tipo de problemas se inicia con el dato proposicional (valor de verdad del esquema) y a partir de ello ir reconstruyendo de abajo hacia arriba dándole el valor de verdad correspondiente a cada proposición.

PROBLEMA 6

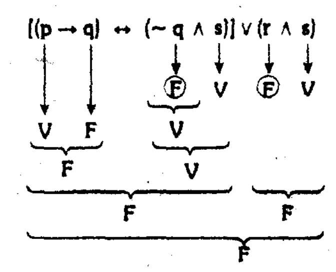
Si "s" es verdadera y la proposición:

$$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \wedge s)] \vee (r \wedge s)$$

es falso, halle los valores de verdad de "p", "q" y "r".

Resolución:

$[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \wedge s)] \vee (r \wedge s)$



$\therefore\ p \equiv F,\ q \equiv F,\ r \equiv F$

PROBLEMA 7

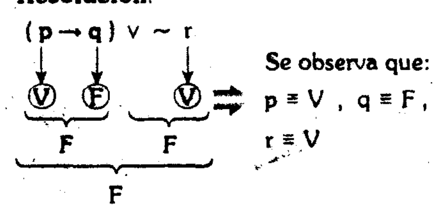
Sabiendo que:

$$[(s \leftrightarrow p) \Delta r] \vee (p \wedge q)$$

es verdadero y la proposición: $(p \rightarrow q) \vee \sim r$ es falsa, halle los valores de verdad de "p"; "q" y "s".

Resolución:

$(p \rightarrow q) \vee \sim r$



Se observa que: $p \equiv V$, $q \equiv F$, $r \equiv V$

Luego:

$[(s \leftrightarrow p) \Delta r] \vee (p \wedge q)$

F V — V — V F; F V → V; V F → F; V ∨ F → V

$\therefore\ p \equiv V;\ q \equiv F;\ s \equiv F$

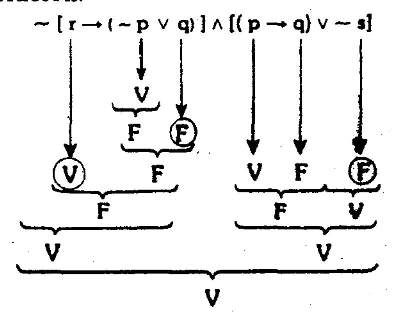
PROBLEMA 8

Si la proposición:

$$\sim [\, r \rightarrow (\sim p \vee q)\,] \wedge [\,(p \rightarrow q) \vee \sim s\,]$$

es verdadera, halle los valores de verdad de cada una de las proposiciones (p; q; r; s)

Resolución:



$\therefore \quad p \equiv V\,;\, q \equiv F\,;\, r \equiv V\,;\, s \equiv F$

PROBLEMA 9

Se define: $p \# q \equiv \sim(p \rightarrow q)$

Además las proposición:

$$\sim \{[\,\sim p \# (\sim p \leftrightarrow q)\,] \# (r \,\Delta\, q)\,\}$$

es falsa. Halle los valores de verdad de "p", "q" y "r".

Resolución:

Reemplazando:

$$\sim \{[\,\sim p \# (\sim p \leftrightarrow q)] \# (r \quad q)\, \Delta q\ \}$$

$$\sim [\,\sim p \rightarrow (\sim p \leftrightarrow q)]$$

$$\sim [\,\sim (\,\sim p \rightarrow [\sim p \leftrightarrow q]) \rightarrow (r \,\Delta\, q)]$$

Luego:

$$\sim \{\,\sim [\,\sim (\,\sim p \rightarrow [\,\sim p \leftrightarrow q\,]) \rightarrow (r \Delta\, q)\,]\}$$

F V F

V F

F F F

V F

F

V

F

$\therefore \quad p \equiv F\,;\, q \equiv F\,;\, r \equiv F.$

PROBLEMA 10

Si la proposición:

$$[\,(\,r \rightarrow s) \vee p\,] \rightarrow \sim(p \,\Delta\, q)$$

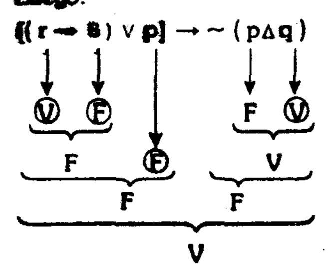
es verdadera, entonces determine los valores de verdad de p; q; r y s.

Además: $p \leftrightarrow q$ es falso.

Resolución:

Recordando: $\underbrace{p \leftrightarrow q}_{F} \equiv \underbrace{\sim (p \,\Delta\, q)}_{F}$

Luego:



$\therefore \quad p \equiv F\,;\, q \equiv V\,;\, r \equiv V\,;\, s \equiv F$

PROBLEMA 11

Determine si las siguientes proposiciones son leyes lógicas (tautologías)

a. $(p \wedge q) \rightarrow q$

b. $p \rightarrow (p \vee q)$

Resolución:

Para determinar si es o no una ley lógica podemos analizar mediante una tabla de verdad o aplicar las leyes del álgebra proposicional.

Aplicando la tabla de verdad:

a.

p	q	(p	∧	q)	→	q
V	V		V		V	V
V	F		F		V	F
F	V		F		V	V
F	F		F		V	F

Observamos que en la matriz principal todos los valores son "V" entonces es una tautología, es decir, es una ley lógica.

Otra forma:

$(p \wedge q) \rightarrow q$

$\sim(p \wedge q) \vee q$ ...... Condicional

$(\sim p \vee \sim q) \vee q$ ...... de Morgan

$\sim p \vee (\sim q \vee q)$ ...... Asociativa

$\sim p \vee V \equiv V$

∴ Es siempre verdadera

b. $(p \rightarrow (p \vee q))$

$\sim p \vee (p \vee q)$ ...... Condicional

$(\sim p \vee p) \vee q$ ...... Asociativa

$V \vee q \equiv V$

∴ Es siempre verdadera.

∴ a y b son siempre verdaderas.

PROBLEMA 12

Simplifique:

$$[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim s)] \wedge \sim q$$

Resolución:

Para simplificar o reducir un esquema molecular se hace uso de las leyes del álgebra proposicional.

Luego:

$[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim s)] \wedge \sim q$

$[\sim(\sim p \wedge q) \vee (r \wedge \sim s)] \wedge \sim q$ .... Condicional

$[(p \vee \sim q) \vee (r \wedge \sim s)] \wedge \sim q$ .... de Morgan

$\{[(r \wedge \sim s) \vee p] \vee \sim q\} \wedge \sim q$ .... Conmutativa y Asociativa

$\sim q$ .... Absorción

∴ $\sim q$

PROBLEMA 13

Simplifique:

$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

Resolución:

$[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

$[(q \vee \sim p) \rightarrow (p \vee \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$ ... Condicional

$[(\sim q \wedge p) \vee (p \vee \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$ ... Condicional y deMorgan

$\{[(\sim q \wedge p) \vee \sim q] \vee p\} \wedge \sim p \vee \sim q\}$ ... De Morgan

$(\sim q \quad \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ ... Absorción

$\sim q \vee (p \wedge \sim p)$ ... Distributiva

$\sim q \vee F \equiv \sim q$

∴ $\sim q$

PROBLEMA 14

Si: $p \triangle q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$

$p \square q \equiv \sim p \wedge \sim q$

Simplifique: $[(p \triangle q) \rightarrow (p \square q)] \vee q$

Resolución:

Reemplazando tenemos:

$[(p \triangle q) \rightarrow (p \square q)] \vee q$

$[(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$

$[(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$ .... Condicional

$[\sim(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$.... Condicional

$[(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$ .... De Morgan

$[(\sim p \wedge q) \vee q] \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .... Absorción

$q \quad \vee (\sim p \wedge \sim q)$ .... Ley adicional

$q \vee \sim p$ .... Ley adicional

$p \rightarrow q$ .... Condicional

∴ $p \rightarrow q$

PROBLEMA 15

Para una proposición cualquiera "p" se define:

$$\theta_{(p)} = \begin{cases} 1 \;;\; \text{si "p" es verdadera} \\ 0 \;;\; \text{si "p" es falsa} \end{cases}$$

Si: $\theta_{(x)} = 1$; $x \equiv (p \wedge \sim s) \leftrightarrow (s \leftrightarrow w)$

$\theta_{(y)} = 0$; $y \equiv w \vee \sim s$

Halle: $\theta_{[(s \leftrightarrow \sim w) \leftrightarrow (\sim p \vee s)]}$

Resolución:

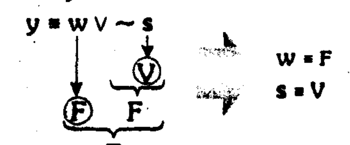
Del dato deducimos:

a. Si: $\theta_{(x)} = 1$, entonces "x" es verdadero.

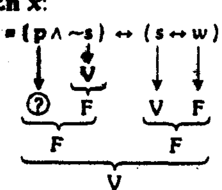
b. Si: $\theta_{(y)} = 0$, entonces "y" es falso.

Luego:

En y:



En x:



Observamos que "p" puede tomar dos valores, pero también notamos que:

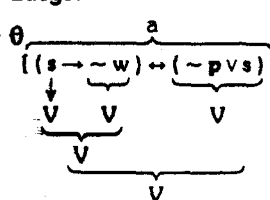
$(p \wedge \sim s)$ es falso

entonces:

$\sim (p \wedge \sim s)$ será verdadero

$\sim p \vee s$ (de Morgan)

Luego:



entonces:

$\theta_{(a)} \equiv 1$; porque "a" es verdadero

$\therefore$ 1

PROBLEMA 16

Simplifique:

$[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \to r)]\}$

Resolución:

$[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge \underbrace{[p \wedge (q \to r)]}\}$

$\wedge \sim [\sim p \vee \sim (q \to r)]\}$

$\wedge \sim [\sim p \vee (q \wedge \sim r)]\}$

$\wedge \sim [p \to (q \wedge \sim r)]\}$

Luego:

$$\underbrace{\underbrace{[p \leftrightarrow (q \vee \sim r)]}_{m} \overset{\downarrow}{\wedge} \underbrace{\{[p \to (q \wedge \sim r)] \wedge \sim [p \to (q \wedge \sim r)]\}}_{F}}_{F}$$

$\therefore$ F

PROBLEMA 17

Simplifique:

$[\sim (p \to q) \to \sim (q \to p)] \wedge (p \vee q)$

Resolución:

$[\sim \underbrace{(p \to q)} \to \sim \underbrace{(q \to p)}] \wedge (p \vee q)$

$[\underbrace{(p \wedge \sim q) \to (q \wedge \sim p)}] \wedge (p \vee q)$

$[\underbrace{\sim (p \wedge \sim q)} \vee (q \wedge \sim p)] \wedge (p \vee q)$

$[(\sim p \vee q) \vee (q \wedge \sim p)] \wedge (p \vee q)$

$[\sim p \vee \{\underbrace{q \vee (q \wedge \sim p)}\}] \wedge (p \vee q)$

$(\sim p \vee \quad q \quad \wedge (p \vee q)$

$\underbrace{(q \vee \sim p) \wedge (q \vee p)}$

$q \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_{F}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{q}$

$\therefore$ q

PROBLEMA 18

¿Cuál de las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes entre si?

a. $(\sim p \vee q) \vee (\sim r \wedge \sim p)$

b. $p \wedge (r \rightarrow q)$

c. $\sim q \rightarrow \sim p$

Resolución:

Para determinar cuáles son lógicamente equivalentes, debemos reducir cada proposición a su mínima expresión.

a. $$(\underbrace{\sim p \vee q}) \vee (\underbrace{\sim r \wedge \sim p})$$
$$(q \vee \sim p) \vee (\sim p \wedge \sim r)$$
$$\underbrace{q \vee [\underbrace{\sim p \vee (\sim p \wedge \sim r)}]}$$
$$\sim p$$
$$q \vee \sim p$$

b. $$p \wedge (\underbrace{r \rightarrow q})$$
$$\underbrace{\sim r \vee q}$$
$$p \wedge (\sim r \vee q)$$

c. $$\underbrace{\sim q \rightarrow \sim p}$$
$$\underbrace{\sim (\sim q) \vee \sim p}$$
$$q \vee \sim p$$

Observando los tres resultados, podemos indicar que son lógicamente equivalentes a y c.

$\therefore$ a y c

PROBLEMA 19

¿Cuáles son equivalencias lógicas?

a. $\sim(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$

b. $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$

c. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

Resolución:

Para determinar si son o no equivalencias lógicas, las expresiones que se encuentran tanto en el lado izquierdo y derecho respecto a la bicondicional deben ser iguales, es decir, la expresión molecular debe ser una tautología.

Entonces:

a. $$\sim (q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$$
$$\underbrace{\sim (\sim q \vee \sim p)}$$
$$(q \wedge p) \leftrightarrow (q \vee p) \equiv \text{Contingencia}$$

b. $$[\underbrace{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q}] \leftrightarrow \sim [\underbrace{(p \vee q) \wedge q}]$$
$$\underbrace{\sim q \quad \leftrightarrow \quad \sim q}$$
$$\text{Tautología}$$

c. $$\sim (\underbrace{p \rightarrow q}) \leftrightarrow [\underbrace{(p \vee q) \wedge \sim q}]$$
$$\underbrace{\sim (\sim p \vee q)} \leftrightarrow (\sim q \wedge p) \quad \ldots\ldots \text{ Ley adicional}$$
$$\underbrace{(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim q \wedge p)}$$
$$\text{Tautología}$$

como se observa las dos últimas son tautologías, por lo tanto, son equivalencias lógicas.

$\therefore$ b y c

PROBLEMA 20

¿Cuáles son tautologías?

a. $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$

b. $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$

c. $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim (p \vee r)]$

Resolución:

a. $$[\underbrace{(p \vee \sim q) \wedge q}] \rightarrow p$$
$$(p \wedge q) \quad \ldots \text{ Ley adicional}$$
$$\underbrace{(p \wedge q) \rightarrow p}$$
$$\sim (p \wedge q) \vee p$$
$$\underbrace{(\sim p \vee \sim q) \vee p}$$
$$\underbrace{(p \vee \sim p)} \vee \sim q$$
$$\underbrace{V}$$
$$V \equiv \text{Tautología}$$

b. $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$

q ...... Absorción

$q \leftrightarrow q$

V ≡ Tautología

c. $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim (p \vee r)]$

$(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim r)$

$[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [\sim p \wedge (q \vee \sim r)]$

V ≡ Tautología

∴ Los tres son tautologías.

LÓGICA DE CLASES

Hemos visto anteriormente las diferentes formas de relacionar proposiciones mediante los conectivos lógicos. Ahora veremos o analizaremos la *estructura interna* de cada proposición, es decir, la relación existente entre el sujeto y predicado.

Entiéndase por clase o conjunto a cualquier agrupación o colección de elementos u objetos concretos o abstractos que tienen propiedades comunes.

NOCIONES PREVIAS

Proposición Categórica

Es un enunciado o proposición que afirma o niega una relación de inclusión o exclusión, total o parcial entre conjuntos o clases (sujeto y predicado).

Ejemplo 1

- Todos los **hombres** son **mortales**.

Nos indica que todos los elementos del conjunto o clase **hombres** está incluido totalmente en el conjunto o clase **mortales**.

Ejemplo 2

- Algunas **personas** son **sinceras**.

Nos indica que sólo algunos elementos del conjunto **personas** son también elementos del conjunto **personas sinceras**.

Ejemplo 3

- No todos los **niños** son **felices**.

Nos indica que algunos elementos del conjunto **niños** son **no felices**, es decir, es una exclusión parcial.

Inferencia

Es un razonamiento en la cual a partir de una o más proposiciones llamadas premisas se deriva una nueva proposición llamada conclusión.

Ejemplo:

- Todos los peruanos son honestos.
- Todos los limeños son peruanos.

De ambas premisas podemos deducir que:

Todos los limeños son honestos.

TIPOS DE INFERENCIAS

Inductivas

A partir de casos o hechos particulares se llega a una conclusión de carácter general. La conclusión en toda inferencia inductiva es probable con respecto al conjunto de premisas.

Ejemplo:

- Juan es del Callao y le gusta la salsa.
- María es del Callao y le gusta la salsa.
- Rubén es del Callao y le gusta la salsa.

Entonces:

Es muy probable que a todos que son del Callao les guste la salsa.

DEDUCTIVAS

Cuando a partir de ciertas premisas (que pueden ser generales) se obtiene una conclusión (particular) que se deriva necesariamente de ellas.

Ejemplo:

- Todos los carnívoros son mamíferos.
- Todos los caninos son carnívoros.

Entonces:

Todos los caninos son mamíferos.

Las inferencias deductivas a la vez pueden ser inmediatas o mediatas.

Inmediatas

Son aquellas inferencias que están formadas por solo una premisa y su correspondiente conclusión.

Ejemplo:

- Todos los ingenieros son matemáticos.

Entonces:

Algunos ingenieros son matemáticos.

Mediatas

Son aquellas inferencias que están conformadas por dos o más premisas y su respectiva conclusión.

Ejemplo:

- Todos los limeños son sinceros.
- Algunas mujeres son limeñas.

Entonces:

Algunas mujeres son sinceras.

Nota:

Las inferencias deductivas mediatas que tengan dos premisas adoptan el nombre de **silogismo**.

EXTENSIÓN DE LAS PROPOSICIONES

De Acuerdo a su Cantidad

Universal

- Todos los perros son caninos.
- Todos los gatos son felinos.

Particular

- Algunas personas son cariñosas.
- Algunas plantas son comestibles.

De Acuerdo a su Calidad

Afirmativa

- Marcos es varón.
- Algunos hombres son obreros.

Negativa

- Ningún pez es plantígrado.
- Algunos marsupiales son no canguros.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA MEDIANTE DIAGRAMAS DE VENN

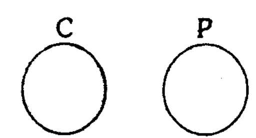
a. Todos los estudiantes son honestos.

E H

H
E

El conjunto "E" está incluido totalmente en el conjunto H.

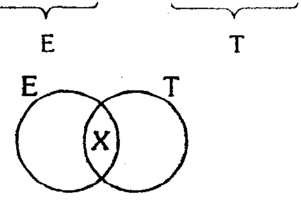
b. Ningún carnívoro es pez.



El conjunto "C" está excluido totalmente del conjunto "P".

c. Algunos estudiantes son trabajadores.

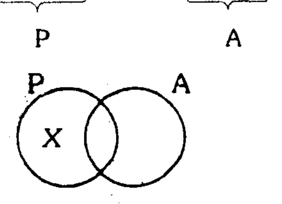
E T



Los conjuntos "E" y "T" tienen una inclusión parcial.

d. Algunas personas no son amables.

P A



El conjunto "P" está excluido parcialmente del conjunto "A".

DISTRIBUCIÓN DE TÉRMINOS

Dentro de una proposición categórica un término está distribuido cuando se hace referencia a la totalidad de sus elementos.

Ejemplo:

Todo ave es plumífera

Aquí se toma en cuenta a la totalidad de los elementos del término ave, de ahí que sea un término distribuido.

Nota:

a. Para indicar la presencia de por lo menos un elemento lo denotaremos con un aspa (X).
b. Generalmente los problemas se refieren a silogismos, por tal motivo debemos recordar algunas reglas sobre silogismos.
   - El silogismo ha de constar de tres términos: medio, mayor y menor.
   - El **término medio** (aquella expresión que se repite en ambas premisas) debe distribuirse por lo menos una vez.
   - El **término medio** nunca debe entrar en la conclusión.
   - No puede haber en la conclusión ningún término distribuido que no esté también distribuido en las premisas.
   - De dos premisas afirmativas no se puede concluir una proposición negativa.
   - De dos premisas negativas nada se concluye.
   - La conclusión siempre sigue a la premisa más débil, entendiéndose por tal a la premisa particular o a la premisa negativa.
   - De dos premisas particulares nada se concluye.

Entonces sin mas preámbulo entremos a la resolución de problemas.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 21

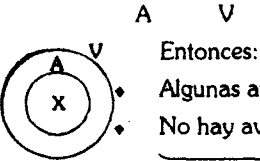
Si afirmamos:
"Todas las aves vuelan".
Entonces:

a. Algunas aves no vuelan.
b. No hay aves que vuelan.
c. Todos los que vuelan son aves.
d. Ningún ave no vuela.
e. Ningún ave vuela.

Resolución:

Todas las aves vuelan.

A V



Entonces:
- Algunas aves vuelan.
- No hay ave que no vuela.

Ningún ave no vuela.

∴ d

PROBLEMA 22

Si afirmamos:

- Ningún vietnamita es americano.
- Muchos valientes son vietnamitas.

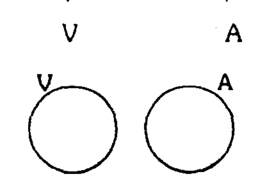
Entonces:

a. Todo valiente es no americano.
b. Ningún americano es valiente.
c. Muchos valientes mueren.
d. Todo americano no es valiente.
e. Muchos valientes no son americanos.

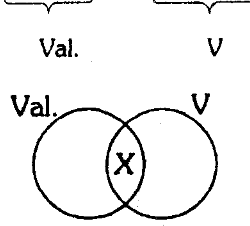
Resolución:

- Ningún vietnamita es americano.

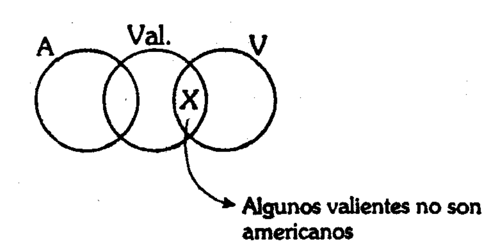
V A



- Muchos valientes son vietnamitas.



Uniendo adecuadamente ambas gráficas tenemos:



∴ e

PROBLEMA 23

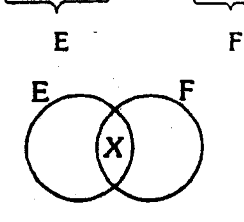
- Algunos estudiosos van a fiestas.
- Todos los que van a fiestas pierden tiempo.

Entonces:

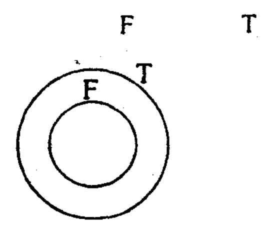
a. Los que van a fiestas no son estudiosos.
b. Los que van a fiestas son estudiosos.
c. Algunos estudiosos pierden tiempo.
d. Todos los estudiosos aprovechan el tiempo.
e. No todos los que van a fiestas aprovechan el tiempo.

Resolución:

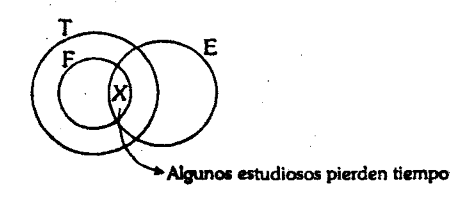
- Algunos estudiosos van a fiestas.



- Todos los que van a fiestas pierden tiempo.



De ambas gráficas podemos indicar lo siguiente:



∴ c

PROBLEMA 24

Si:

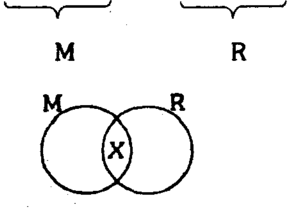
- Algunos mamíferos son rumiantes.
- Todo mamífero es vertebrado.

Entonces:

a. Algunos rumiantes son invertebrados.
b. Todo rumiante es vertebrado.
c. Algunos vertebrados son rumiantes.
d. Algunos vertebrados son mamíferos.
e. Algunos rumiantes son mamíferos.

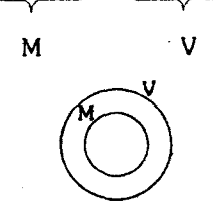
Resolución:

- Algunos mamíferos son rumiantes.

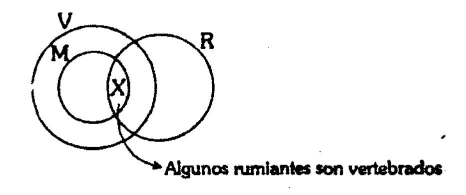


- Todo mamífero es vertebrado.

M V



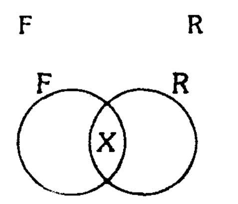
De ambos tenemos lo siguiente:



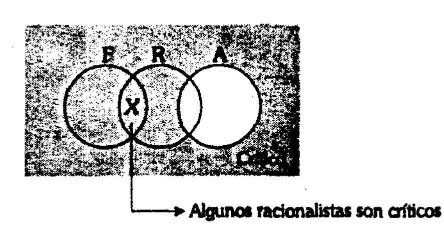
∴ c

- Ciertos filósofos son racionalistas.

F R



Luego, tenemos:



∴ d

PROBLEMA 25

Si:

- Ningún filósofo es acrítico.
- Ciertos filósofos son racionalistas.

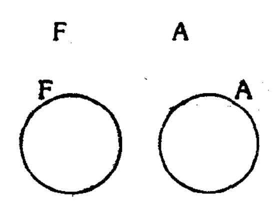
Entonces:

a. Algunos críticos son filósofos.
b. Algunos racionalistas son acríticos.
c. Algunos críticos son irracionales.
d. Algunos racionalistas son críticos.
e. Algunos críticos no son racionalistas.

Resolución:

- Ningún filósofo es acrítico.

F A



PROBLEMA 26

Si:

- Los médicos son profesionales.
- Algunas personas no son profesionales.

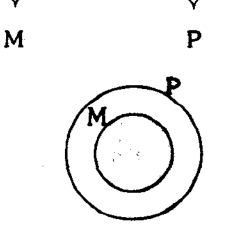
entonces:

a. Toda persona es médico.
b. Ningún médico es persona.
c. Es falso que los médicos sean personas.
d. Ciertas personas no son médicos.
e. Ningún no persona es no médico.

Resolución:

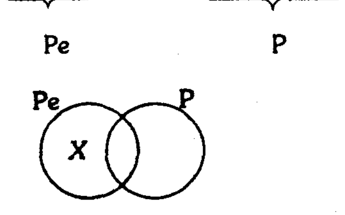
- Los médicos son profesionales.

M P

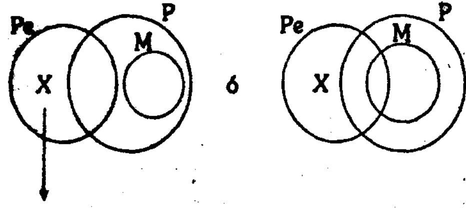


- Algunas personas no son profesionales.

Pe P



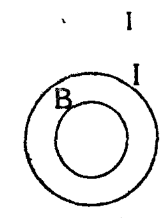
Entonces:



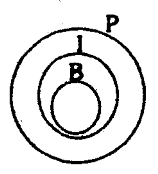
∴ d

- Cada bebé es un infante.

B I



Uniendo adecuadamente, tenemos:



- Algunos bebes son preescolares.
- Todo bebé es preescolar.

∴ c

PROBLEMA 27

Si:

- Los infantes son preescolares.
- Cada bebé es un infante.

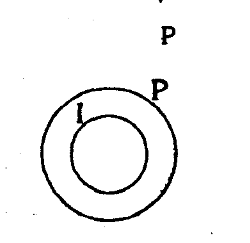
Entonces:

a. Ningún bebé es preescolar.
b. No existe preescolar que sea bebé.
c. Los bebes son preescolares.
d. Algún escolar es bebé.
e. Algún bebé es escolar.

Resolución:

- Los infantes son preescolares.

I P



PROBLEMA 28

Si:

- Todo hombre es racional.
- Ningún animal es un ser que razona.

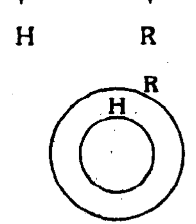
Entonces:

a. Algún animal es hombre.
b. Algún no animal no es hombre.
c. Ningún animal es hombre.
d. Todo animal es siempre animal.
e. Cierto no hombre no es hombre.

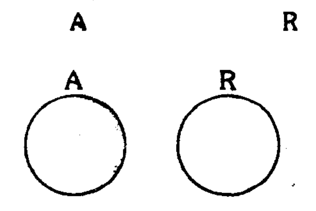
Resolución:

- Todo hombre es racional.

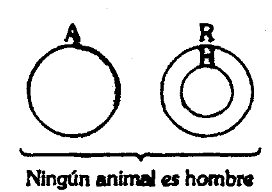
H R



- Ningún animal es un ser que razona.



Entonces, de ambos tenemos:



∴ c

PROBLEMA 29

Si:

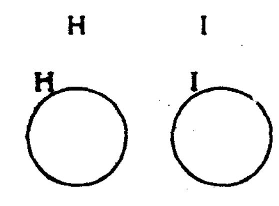
- Ningún hombre es inmortal.
- Todo racional es hombre.

Entonces:

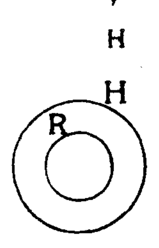
a. Ningún racional es inmortal.
b. Todo racional es inmortal.
c. Ningún irracional es inmortal.
d. Todo irracional es mortal.
e. Ningún mortal es irracional.

Resolución:

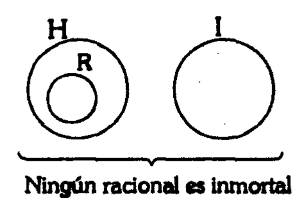
- Ningún hombre es inmortal.



- Todo racional es hombre.



Luego, tenemos:



∴ a

PROBLEMA 30

Si:

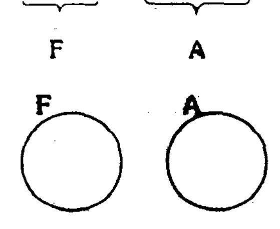
- Ningún francés es americano.
- Algún americano es peruano.

Entonces, se concluye que:

a. Algún peruano es francés.
b. Algún francés es no peruano.
c. Algún no peruano es francés.
d. Algún peruano es no francés.
e. Algún francés es peruano.

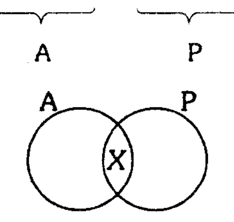
Resolución:

- Ningún francés es americano.

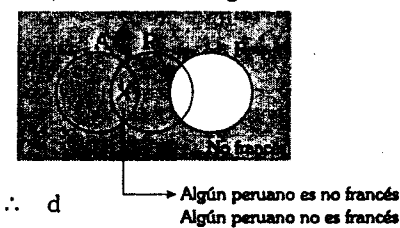


- Algún americano es peruano.

A P



Entonces, deducimos lo siguiente:



∴ d

PROBLEMA 31

Partiendo de las siguientes premisas:

- Todo lo digno humaniza
- Algún trabajo es digno

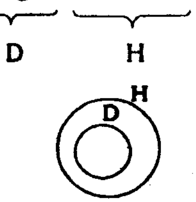
Se concluye que:

a. Todo trabajo humaniza.
b. No todo trabajo humaniza.
c. Algún trabajo no humaniza.
d. Algún trabajo humaniza.
e. Algún trabajador no es humano.

Resolución:

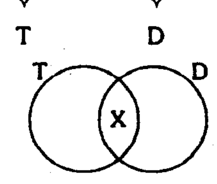
- Todo lo digno humaniza.

D H

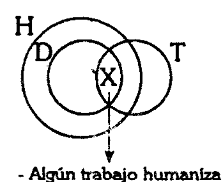


- Algún trabajo es digno.

T D



De ambas gráficas podemos indicar lo siguiente:



∴ d

PROBLEMA 32

Si:

- Todos los niños son juguetones.
- Todo juguetón es travieso.

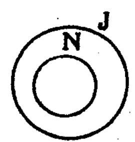
Entonces:

a. No todos los niños son traviesos.
b. Todos los niños son traviesos.
c. No es cierto que todos los niños son traviesos.
d. No es cierto que todo travieso es juguetón.
e. Todos los traviesos son juguetones.

Resolución:

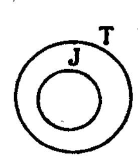
- Todos los niños son juguetones.

N T

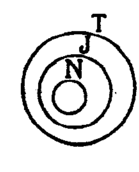


- Todo juguetón es travieso.

J T



De ambos, tenemos:



- Todos los niños son traviesos.

∴ b

PROBLEMA 33

Si:

- Muchos filósofos son críticos.
- Todo crítico es intrépido.

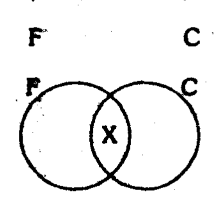
Entonces:

a. Ningún filósofo es crítico.
b. Ningún filósofo es intrépido.
c. Algunos filósofos son intrépidos.
d. Todo filósofo es intrépido.
e. Muchos filósofos no son intrépidos.

Resolución:

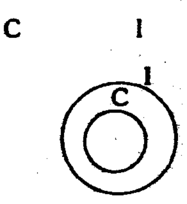
- Muchos filósofos son críticos.

F C

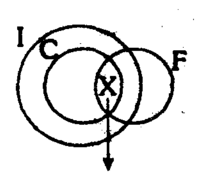


- Todo crítico es intrépido.

C I



De ambos tenemos:



∴ c

PROBLEMA 34

Si:

- Algunos jóvenes son alienados.
- Todo alienado es inmaduro.

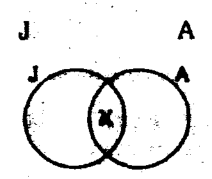
Entonces:

a. Todos los jóvenes son inmaduros.
b. Todos los jóvenes son alienados.
c. Es falso que algunos jóvenes son no alienados.
d. No todo joven es inmaduro.
e. Algún joven no es maduro.

Resolución:

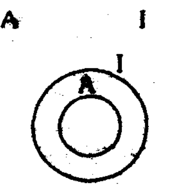
- Algunos jóvenes son alienados.

J A

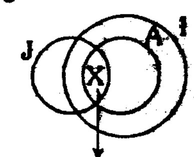


- Todo alienado es inmaduro.

A I



Luego tenemos:



- Algunos jóvenes son inmaduros
- Algún joven no es maduro

∴ e

PROBLEMA 35

Si afirmamos que:

- Ningún ave tiene alas.
- Algunos mamíferos tienen alas.

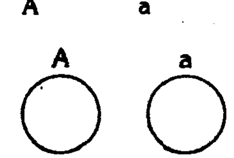
Se puede concluir que:

a. Ningún mamífero es ave.
b. Algunas aves tienen alas.
c. Algunos mamíferos son aves.
d. Algunos mamíferos no son aves.
e. Algunas aves son mamíferos.

Resolución:

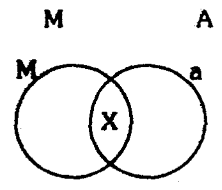
- Ningún ave tiene alas

A a

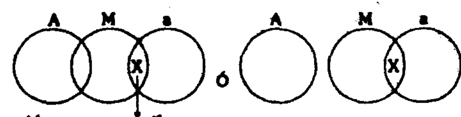


- Algunos mamíferos tiene alas.

M A



Concluimos en:



∴ d

PROBLEMA 36

Se afirma que:

- Todos los que habitan en Marte son inteligentes.
- Algunos que habitan en Marte son caníbales,

Entonces podemos afirmar que:

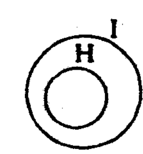
a. Algunos que son inteligentes y habitan en Marte son caníbales.
b. Todos los que habitan en Marte son caníbales.
c. Algunos caníbales no habitan en Marte.
d. Todos los inteligentes son caníbales.
e. Algunos inteligentes son caníbales.

Resolución:

- Todos los que habitan en Marte son inteligentes.

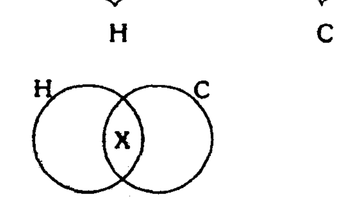
H

I

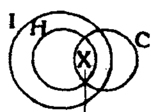


- Algunos que habitan en Marte son caníbales.

H C



De ambas gráficas concluimos:



-Algunos inteligentes son caníbales

∴ e

PROBLEMA 37

Si:

- Todas las hormigas tienen cuatro patas.
- Todos los seres de cuatro patas no tienen antenas.

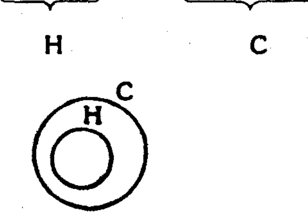
Entonces:

a. Todos los seres de cuatro patas son hormigas.
b. Algunas hormigas tienen antenas.
c. Todos las hormigas no tienen antenas.
d. Todas las hormigas tienen antenas.
e. Ningún ser de cuatro patas es hormiga.

Resolución:

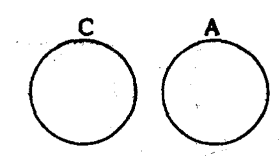
- Todas las hormigas tienen cuatro patas.

H C

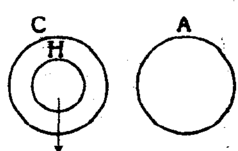


- Todos los seres de cuatro patas no tienen

antenas.



De ambas gráficas tenemos:



- Todas las hormigas no tienen antenas

∴ c

PROBLEMA 38

Si:

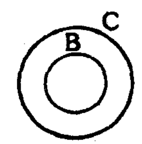
- Todos los biólogos son científicos.
- Los científicos son racionalistas.

entonces:

a. Todos los racionales son científicos.
b. Todos los científicos son biólogos.
c. Algunos biólogos no son racionales.
d. Todos los biólogos son racionales.
e. Algunos no biólogos no son racionales.

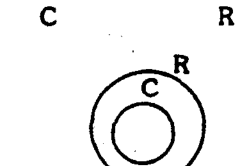
Resolución:

- Todos los biólogos son científicos.

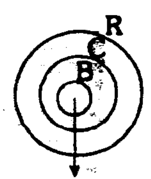


- Los científicos son racionalistas.

C R



Entonces, tenemos:



- Todos los biólogos son racionalistas.

∴ d

PROBLEMA 39

Si afirmamos que:

- Todas las serpientes son reptiles.
- Algunas serpientes no son venenosas.

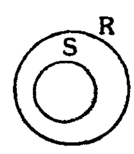
Entonces:

a. Todos los reptiles son venenosos.
b. Todas las serpientes son venenosas.
c. Algunos reptiles no son venenosos.
d. Algunas serpientes no son reptiles.
e. Todos los reptiles y algunas serpientes son venenosas.

Resolución:

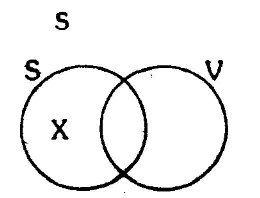
- Todas las serpientes son reptiles.

S R

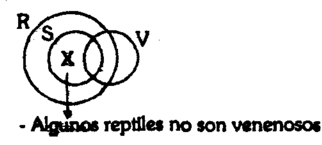


- Algunas serpientes no son venenosas.

S V



De ambas gráficas podemos indicar lo siguiente:



∴ c

PROBLEMA 40

Si se afirma que:

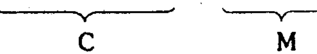
- Todos los animales con cola son mamíferos.
- Todos los perros tienen cola.

Entonces:

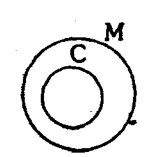
a. El perro es carnívoro.
b. Ningún perro es mamífero.
c. Todos los perros son mamíferos.
d. Algunos perros son no mamíferos.
e. Sólo algunos perros son mamíferos.

Resolución:

- Todos los animales con cola son mamíferos.

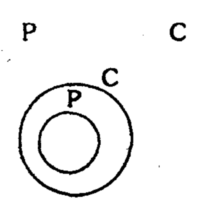


C M

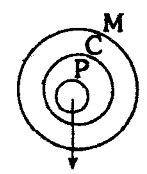


- Todos los perros tienen cola.

P C



Entonces:



- **Todos los perros son mamíferos.**

∴ c

Problemas Propuestos

1. Cuántos "V" y "F" tiene la matriz principal de:

$$\sim [(\sim p \vee q) \rightarrow r] \wedge r$$

En ese orden:

A) 2 y 6 B) 3 y 5 C) 8 (V)
D) 8 (F) E) 6 y 2

2. Si: $\sim p \vee [(p \wedge r) \rightarrow (r \leftrightarrow q)]$
es falso, halle el valor de verdad de:

$$[(p \rightarrow q) \vee r] \leftrightarrow (p \wedge r)$$

A) V B) F C) V o F
D)V y F E) No se puede determinar

3. Si: $(p \rightarrow \sim q) \vee [(r \leftrightarrow \sim p) \vee (q \leftrightarrow \sim s)]$
es falsa, halle el valor de verdad de:

$$(p \rightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

A) V B) F C) V o F
D) V y F E) No se puede determinar

4. Si las proposiciones:
$\sim[(p \vee \sim q) \wedge \sim p] \vee (r \leftrightarrow s)$ y $(r \rightarrow s)$
son equivalentes a F, entonces determine el valor de verdad de:
$\sim (p \Delta p) \vee \sim(q \leftrightarrow q)$ y
$[(p \vee q) \wedge \sim(p \rightarrow q)] \leftrightarrow (\sim r \wedge s)$

A) VV B) FF C) VF
D) FV E) No se puede determinar

5. Si: $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow \sim p$ es falso y además "q" es verdadero. Determine los valores de verdad de "p", "q" y "r".

A) FVF B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFF

6. Si: $\sim \{ [\sim(p \rightarrow q) \rightarrow s] \rightarrow (\sim q \vee t) \}$
es verdadero, halle el valor de verdad de:
$[(p \vee q) \rightarrow r] \vee [(p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim t)]$

A) verdadero B) falso C) V o F
D) V y F E) No se puede determinar

7. Si: $[\sim (p \rightarrow q) \wedge \sim r] \rightarrow [p \wedge (q \vee r)]$
es falsa, halle los valores de verdad de "p", "q" y "r".

A) VFF B) VVF C) VVV
D) FVV E) FFF

8. Si la proposición: $(p \Delta q) \wedge \sim(q \rightarrow s)$
es verdadera, halle los valores de verdad de:
$(s \wedge r) \rightarrow (p \vee s)$ y
$(s \rightarrow q) \Delta (p \vee s)$

A) VF B) FF C) VV
D) FV E) No se puede determinar

9. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas?

a. $\{[(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] \wedge (q \vee p)\} \rightarrow (p \wedge q)$
b. $\{[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)] \vee (q \vee p)\} \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

A) sólo a B) sólo b C) a y b
D) Ninguno E) a o b

10. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

a. Si 2+3 = 7 entonces 5 + 5 = 10
b. No es verdad que 3 + 3 = 7 si y sólo si 4 + 4 = 10
c. Es falso que si París está en Francia entonces Lima está en Colombia.
d. No es cierto que 1 + 1 es 3 o que 2+1=3

A) VVFF B) VFVF C) VVVV
D) FFFF E) VFFV

11. Se define la proposición:

$$p * q \equiv \sim p \vee q$$

Halle cuántas "V" o "F" tiene la matriz principal de:

$$(p * \sim q) \rightarrow (\sim p * q)$$

A) 3V y 1F B) 1V y 3F C) 2V y 2F
D) 4V E) 4F

12. Si:

$p(x) : x^2 = 16$

$q(x) : x - 4 = 8$

$r(x) : x^2 - 4 > 5$

Halle el valor de verdad de:

a. $\{[p_{(1)} \wedge p_{(3)}] \leftrightarrow [r_{(2)} \vee p_{(3)}]\} \rightarrow q_{(4)}$

b. $[p_{(2)} \wedge \sim q_{(12)}] \leftrightarrow r_{(4)}$

c. $\sim p_{(4)} \rightarrow [r_{(5)} \vee \sim q_{(4)}]$

A) FFF B) VVV C) VFV
D) VVF E) FFV

13. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones es siempre falsa?

a. $[\sim (p \wedge q) \rightarrow p] \wedge \sim p$

b. $\sim[\sim(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee \sim q)]$

c. $[(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \rightarrow q)] \wedge \sim(p \rightarrow q)$

A) sólo a B) sólo b C) sólo c
D) a y c E) a y b

14. Si la proposición:

$$[\sim (p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee s)] \rightarrow r$$

es falsa, halle los valores de verdad de "p", "q" y "r"

A) VVV B) FFF C) VVF
D) FVV E) VFF

15. Si la proposición:

$$\{[(r \rightarrow s) \vee p] \rightarrow \sim(p \Delta q)\}$$

es verdadera, además $p \leftrightarrow q$ es falsa, halle los valores de verdad de "p", "q", "r" y "s".

A) FVFF B) FVVF C) FFFV
D) VVVF E) VFFV

16. Si "s" es verdadera y la proposición:

$$[(s \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)] \vee (p \wedge r)$$

es falsa, halle los valores de verdad de "p", "q" y "r".

A) VVV B) FFF C) VFF
D) FFV E) VFV

17. Dadas las proposiciones

a. $\sim[(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)]$

b. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

c. $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \underline{\leftrightarrow} \sim q)$

Indique cuál o cuáles es(son) una contradicción (F)

A) sólo a B) sólo b C) sólo c
D) a y b E) a y c

18. ¿Cuál o cuáles de las proposiciones son equivalentes a:

$$\sim(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim r)$$

a. $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$

b. $p \wedge (\sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$

c. $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

A) a y b B) b y c C) a y c
D) a, b y c E) sólo a

19. ¿Cuál de las siguientes expresiones es una tautología?

a. $\sim[\sim(p \vee q) \rightarrow \sim q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

b. $\sim(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

c. $\sim\{(p$ [illegible] $q)$ [illegible] $[p$ [illegible] $(\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

A) a B) b C) c
D) a y b E) a, b y c

20. De la falsedad de: $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$ deduce el valor de verdad de:

a. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
b. $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
c. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

A) FVF B) FFF C) VVV
D) VVF E) FFV

21. ¿Cuál de las siguientes expresiones son equivalentes entre sí?

a. $\sim\{(q \vee \sim p) \vee [q \wedge (r \vee \sim p)]\}$
b. $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$
c. $\sim[\sim q \rightarrow \sim p] \wedge [q \rightarrow \sim(p \rightarrow r)]$

A) a y b B) b y c C) a y c
D) todas E) ninguna

22. La proposición: $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera, teniendo r y s valores veritativos opuestos, se afirma que son ciertas:

a. $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$: verdadera
b. $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$: falsa
c. $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$: verdadera
d. $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (s \vee p)] \,\Delta\, \sim(r \wedge p)$: verdadera

A) a y b B) b y c C) c y d
D) a y d E) c

23. Si $p \downarrow q$ se define como $\sim q \wedge \sim p$, entonces el equivalente a: $(p \leftrightarrow q)$ es:

a. $(\sim p \downarrow q) \vee (q \downarrow p)$
b. $(\sim p \downarrow q) \vee (\sim q \downarrow p)$
c. $(\sim p \downarrow \sim q) \vee (p \downarrow q)$

A) sólo a B) sólo b C) sólo c
D) a y b E) b y c

24. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones es equivalente a $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?

a. $\sim[p \wedge \sim q \wedge \sim r]$
b. $(p \wedge \sim q) \vee r$
c. $(r \vee q) \wedge (\sim r \wedge q)$
d. $\sim p \vee q \vee r$

A) sólo a B) sólo b C) sólo c
D) a y b E) todos

25. Si la proposición: $(p \vee \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera y $(\sim w) \rightarrow (\sim s)$ es falsa. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$
b. $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \wedge \sim p)$
c. $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \rightarrow r)$

A) VVV B) VVF C) FFF
D) VFF E) FFV

26. Si: "Algunos filósofos son materialistas" Entonces podemos concluir que:

A) no ocurre que ningún filósofo sea materialista.
B) ningún filósofo es materialista.
C) ningún materialista es filósofo.
D) todo filósofo es materialista.
E) algunos filósofos no son materialistas.

27. Si: "No todo profesional es amoral", entonces:

A) Es falso que algunos profesionales no sean morales.
B) Algunos profesionales son morales.
C) Algunos profesionales no son morales.
D) Todo profesional es no moral.
E) Algunos morales no son profesionales.

28. Si es cierto que:
"Ningún ornitorrinco es no mamífero",
entonces:

A) Algún ornitorrinco es mamífero.
B) No todo ornitorrinco es mamífero.
C) Todo ornitorrinco es mamífero.
D) Ningún mamífero es ornitorrinco.
E) Algún ornitorrinco es no mamífero.

29. Si: "Todo orangután es simio",
entonces:

A) Algún orangután no es simio.
B) Algún simio no es orangután.
C) Ningún orangután es simio.
D) Ningún no orangután es no simio.
E) Ningún no simio es orangután.

30. Si: "Todo matemático es científico",
concluimos que:

A) Ningún matemático es científico.
B) No todo matemático es científico.
C) Algunos matemáticos no son científicos.
D) Todo científico es matemático.
E) No es cierto que todo científico sea no matemático.

31. Si: "Ningún escritor es considerado apolítico",
entonces:

A) Todo político es escritor.
B) Ningún político es escritor.
C) Todo apolítico es escritor.
D) Todo escritor es político.
E) Ningún político es escritor.

32. Si afirmamos que:
"Ningún molusco es mamífero",
entonces:

A) Todo mamífero es molusco.
B) Algún no mamífero es molusco.
C) Ningún molusco es no mamífero.
D) Algún mamífero es no molusco.
E) Todo molusco es mamífero.

33. Sabiendo que:
"Todo responsable es maduro",
entonces:

A) Ningún responsable es maduro.
B) Algún inmaduro es responsable.
C) Todo maduro es responsable.
D) Algún responsable no es maduro.
E) Ningún inmaduro es responsable.

34. Si: "Todo desordenado es incumplido",
entonces:

A) Todo incumplido es desordenado.
B) Algún desordenado es cumplido.
C) Ningún cumplido es ordenado.
D) Algún ordenado es cumplido.
E) Ningún cumplido es desordenado

35. Si: "Es falso que algunos políticos sean honestos", entonces:

A) Algún político es deshonesto.
B) Ciertos honestos no son no políticos.
C) Ningún deshonesto es político.
D) No es el caso que los político son honestos.
E) Los deshonestos son políticos.

36. Si:

- Todos los insectos son invertebrados.
- Algunos insectos son coleópteros.

Entonces:

A) Todo coleóptero es invertebrado.
B) Algún coleóptero es invertebrado.
C) Ningún coleóptero es insecto.
D) Todo insecto es coleóptero.
E) Algún coleóptero es vertebrado.

37. Si:

- Una persona que estudia con esfuerzo, logrará sus objetivos.
- Todo joven estudia con esfuerzo.

Entonces:

A) Ningún joven logra sus objetivos.
B) Todo joven logra sus objetivos.
C) Toda persona es joven.
D) Ninguna persona es joven.
E) Todo el que no logra sus objetivos no es joven.

38. Sí afirmamos que:

- Algunos reptiles son de sangre caliente.
- Todo animal de sangre caliente es ovíparo.

Entonces:

A) Todo reptil es ovíparo.
B) Ningún reptil es ovíparo.
C) Algunos reptiles son ovíparos.
D) Todo reptil no es de sangre caliente.
E) No es cierto que algunos reptiles son ovíparos.

39. Si:

- Algunos poetas son fantasiosos.
- Todo fantasioso es no realista.

Entonces:

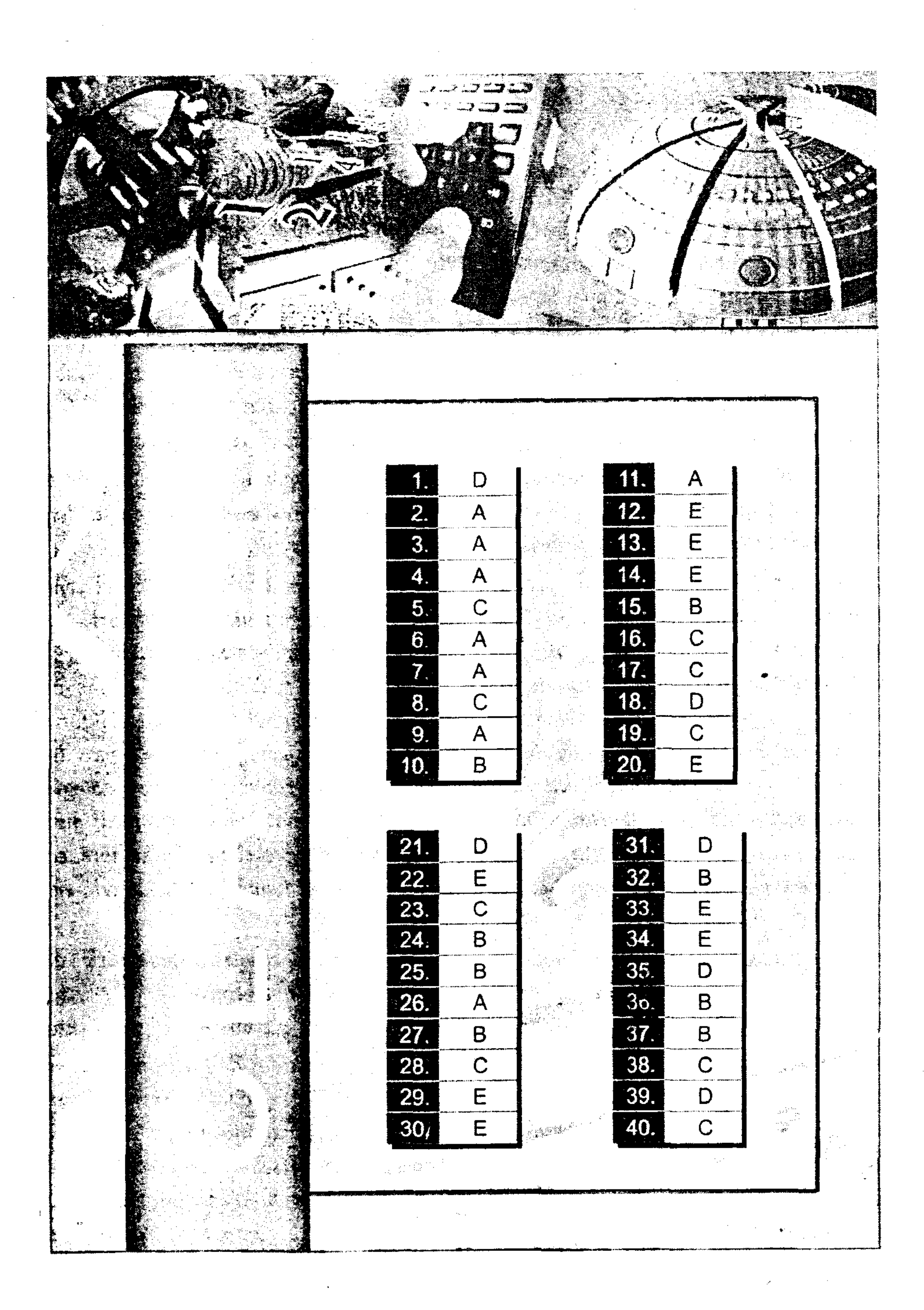
A) Todos los poetas son realistas.
B) No es cierto que muchos poetas no sean realistas.
C) Muchos poetas no son escritores.
D) Muchos poetas no son realistas.
E) Ningún poeta es realista.

40. Si:

- Muchos de los que ofrendan la vida son valientes.
- Todos los valientes van a la gloria.

Entonces:

A) Nadie que ofrenda la vida va a la gloria.
B) Todos los valientes van a la gloria.
C) Muchos de los que ofrendan la vida van a la gloria.
D) Todo aquel que ofrenda la vida va a la gloria.
E) Algunas personas van a la gloria.



1.	D	11.	A	21.	D	31.	D
2.	A	12.	E	22.	E	32.	B
3.	A	13.	E	23.	C	33.	E
4.	A	14.	E	24.	B	34.	E
5.	C	15.	B	25.	B	35.	D
6.	A	16.	C	26.	A	36.	B
7.	A	17.	C	27.	B	37.	B
8.	C	18.	D	28.	C	38.	C
9.	A	19.	C	29.	E	39.	D
10.	B	20.	E	30.	E	40.	C

Hipatía de Alejandría

Cuando el talento realmente existe, las mujeres no dejan de ocupar puestos de gravitación intelectual en la historia. Decimos de gravitación intelectual, porque en el destino de la humanidad la mujer influyó poderosamente a través de los hombres, siempre y con sosiego, siendo ellas fuente de inspiración, carácter, apoyo y acicate para las grandes y pequeñas empresas de la vida.

En este caso hablamos de una mujer nacida en Alejandría hacia el año 370 de nuestra era, en tiempos insidiosos de cambio y violencia, cuando iba decayendo lo formal del Imperio romano. Esta mujer se llama Hipatía, y a pesar de la época remota en que le tocó actuar, lo hizo como profesora de matemática en Alejandría, a la sazón el más importante centro cultural del mundo antiguo.

Si aún en nuestros días son excepción las mujeres que ocupan cargos directivos en la política, por ejemplo, pensemos qué antecedente valioso significa la presencia de esta mujer en la docencia, manejándose con autoridad frente a hombres portadores de una alta cultura.

Hipatía, repetimos, fue titular de geometría y aritmética con título cabal en el centro de conocimiento de la época. Podemos afirmar que se trata de la primera mujer en la historia -a lo que sabemos-, que haya desempeñado una cátedra universitaria con tanta solvencia y antecedentes porque, además de brillante matemática, Hipatía desarrolló el álgebra y dirigió todo el movimiento neoplatónico que imperaba entonces en la ciudad de Alejandría. Dominaba casi toda la información del siglo V ya que, en su condición de filósofa, nada del saber le era ajeno, pues los antiguos dividían la Filosofía en tres campos: Lógica, Física y Ética. La primera se ocupaba de la metodología para llegar a la verdad; la segunda abarcaba todo lo existente, como matemática, química, medicina, derecho, incluso el estudio del alma; la tercera especulaba sobre las creaciones del hombre, como la política, el arte o el Estado (la filosofía comprendía todo el saber humano, considerado en aquel tiempo).

Escribió, además, una biografía de Diofanto, quien introdujo el álgebra en la matemática antigua -hacia el año 250-, haciendo progresar enormemente esa disciplina. Fue convertida al cristianismo por el obispo de Hipona, San Agustín, otro gran converso del siglo y padre de la Iglesia católica.

Hacia comienzos del año 415, uno de los tantos motines acaecidos de las luchas civiles en el complicado mosaico político de la época y la zona, puso fin a la vida de esta mujer extraordinaria que hoy, a más de 1 500 años de distancia, recordamos con respeto y agradecimiento por sus trabajos en esa materia que mueve tan gran parte de la técnica y los logros del presente. Un grupo de revoltosos que recorrían las calles de la ciudad, incendiando propiedades y atacando transeúntes, acometieron a Hipatía, sin conocerla, le dieron muerte a puñaladas. Así, irracionalmente, es segada la existencia de un ser que tanto hizo por la cultura de Occidente.

A ella le debemos el desarrollo y análisis del Álgebra.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

"El conocimiento de la historia de la ciencia contribuye a la elaboración de la concepción materialista del mundo en los científicos. La historia muestra que lo importante, lo determinante en el desarrollo incluso de una ciencia tan abstracta como la matemática, lo constituyen las exigencias de la realidad material".

K. Ribnikov

Lectura 23 El Proceso de desarrollo de la Matemático

El desarrollo de la matermática, no es ni ha sido un proceso armonioso de desarrollo continuo y gradual de las verdades matemáticas; el desarrollo en realidad transcurre en una contienda impacable del conocimiento nuevo contra el conocimiento viejo. La historia de la matemática abunda de ejemplos, cuando esta contienda se revela particularmente fuerte, cuando lo nuevo irresistiblemente vence, a pesar de los fracasos e incluso de la muerte de los creadores de la ciencia. Citemos algunos ejemplos. La ciencia sobre la naturaleza, entre ellas la matemática, siempre experimentaron la oposición de los círculos de orientación religiosa. Esta oposición fue a veces tan fuerte que significativamente dificultó y contuvo el crecimiento de la ciencia. La ciencia le debe mucho al heroísmo de conocimientos científicos e ignorados del Imperio Romano y la Edad Media, que hicieron avanzar la ciencia a precio de su propia vida.

En el siglo XVII el análisis infinitesimal, cuando apenas aparecía en los trabajos de Leibniz y Newton y sus seguidores, fue sometido a una impacable crítica, cuyo tono dio el obispo Berckeley. La discusión alrededor de los conceptos de los fundamentales del análisis matemático; en particular alrededor del concepto de límite, ocurre en el transcurso de toda la historia de esta disciplina científica. Esta lucha no se calmó como se acostumbra pensar, con el surgimiento de los trabajos de Cauchy y en el primer tercio del siglo XIX, sino que se intensificó con una fuerza. La construcción de los fundamentos del análisis sobre la base de la teoría de límite recibió el reconocimiento sólo al final del siglo XX.

Los fundamentos de la geometría no euclidiana se conocieron desde el año 1826, gracias los trabajos del genial científico ruso N.I. Lobachevsky, quien partió del quinto postulado dela geometría ecuclideana (ya que éste no se podeía demostrar) planteado los fundamentos de la geometría no euclidiana en la cual la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor de 180° y dos rectas que son paralelas que pueden intersectar. Sin embargo el reconocimiento y el posterior desarrollo, esta ciencia los logró hacia fines del siglo XIX despueés de una larga disputa. En esencial, las ya creadas geometrías no euclidianas pudieron desarrollarse sólo, cuandio después del surgimiento de la teoría de la relatividad se convirtieron en parte de los fundamentos matemáticos de las investigaciones físicas sobre la naturaleza real del continuo espacio- tiempo.

Los métodos geométricos de investigación de espacios abstractos de dimensión finita e infinita, que se utilizan en la expresión de los procesos en espcios de fases, resultaron necesarios en física. También en nuestro tiempo en todas las ramas de la matemática continúa la pugna de las tendencias progresistas y conservadoras.

La practica nos enseña que todo el orden lógico de cualquier ciencia, su estructura, interrelación e incluso la existencia de ramas independientes no constituyen algo inmutable. Ellas son fruto del desarrollo histórico. Además de esto, el mismo desarrollo lógico de las ideas sobre una ciencia no es otra que el reflejo del proceso histórico en forma consecuente, abstracta y teórica.

En el mundo se han escrito y le han dedicado un conjunto de libros, y artículos al desarrollo de la matemática, llamándolo la historia de la matemática. No todo en ellos, por supuesto, es fidedigno. A veces los autores deobras sobre historia de la ciencia subojrdinan su trabajo a fines ajenos a la objetividad y al carácter científico.

Es necesario poder diferenciar tales obras, en la cuales la historia de la ciencia se expone demanera deformada obedeciendo ha ciertos intereses individuales o de grupo, y juzgar sobre ellas acertadamente. Es necesario saber diferenciar, por ejemplo, entre las diversas formas de negación de las leyes objetivas del desarrollo de la ciencia en general, entre ellas la matemática, su orientaci´n idealidsta y conservadora, comprender los métodos de descrédito de las tendencias científicas progresistas y de las actividades de los científicos progresistas. Es necesario aprender a luchasr contra todo tipo de tales fenómenos. La contienda entre las fuerzas progresistas y consservadoreas en al cienccia matemática, que es una de las formas de la controversia de clases, se revela en forma más intensa en las cuestiones históricas y filósofas de la matemática. Aquí es´ta la línea de avanzada de uno de los sectores de la pugna por el progreso, por la ciencia necesaria a una sociedad más justa y humana. De esta forma, el estudio del proceso de desarrollo de la matemática se nos presenta como una parte importantísima en el estudio de la matemática, necesaria para una correcta comprensión de la esencia de la ciencia dada y para una elección correcta de a orientación y formas de su actividad individual.

FUENTE : Historia de la matemática. Ribnikov

TEMAS COMPLEMENTARIOS

Objetivos

1. *Al finalizar el estudio del presente capítulo, el lector comprenderá las nociones básicas y las aplicaciones de los temas siguientes:*
   - *I. Certezas.*
   - *II. Cifras terminales.*

Introducción

El conocimiento matemático está en constante proceso de desarrollo; acercarse a éste significa aproximarse a las matemáticas de una manera flexible y objetiva, este conocimiento nos permitirá comprender su vinculación dinámica con otros problemas científicos y, en general, con el mundo que nos rodea. Hemos tratado, en la presente obra, muchos temas básicos de la matemática, pero la limitación en la extensión de la misma nos impide explayarnos más y estudiar otros temas que, de seguro son de su interés; sin embargo, hemos seleccionado de entre ellos dos muy interesantes y útiles, con la convicción que serán de provecho. En todo caso, cualquier tema omitido podrás encontrarlo en los otros libros de la Colección de Matemática de Lumbreras Editores.

En esta parte abordaremos cada ítem en forma concreta, pero de manera sistemática, objetiva y didáctica, con una orientación más práctica. Es importante que los estudies con una actitud crítica y emprendedora buscando ampliar lo estudiado mediante la investigación, lo cual te permitirá resolver los ejercicios y problemas planteados fácilmente, también te será útil para resolver con éxito problemas de la vida cotidiana.

CERTEZAS

Cecilia tiene 6 monedas, de las cuales dos son de S/0,5; dos son de S/1 y dos son de S/2. Su hermano Alessandro tiene también seis monedas: dos de S/0,5; una de S/1 y tres de S/2. Ambos juntan todas las monedas y las colocan dentro de una caja sobre la mesa. El juego consiste en extraer de la caja una moneda de S/0,50, pero con la condición de **hacer la extracción al azar**; es decir, sin mirar el contenido de la caja. Quien gane se lleva el premio: ¡Todas las monedas! ¿Cuál es el mínimo número de monedas que se han de extraer para estar seguro de ganar? (la extracción se realiza de uno en uno).

Cuando vamos a rendir nuestro examen de admisión a la universidad tomamos, con anticipación, diversas precauciones para llegar a tiempo a tan importante evento; quizás nos detenemos a pensar en muchas situaciones negativas que comúnmente no se dan, pero de las cuales cabe una posibilidad de que ocurran (el carro se malogra, no se apuntó bien la ubicación del colegio, o: "me olvidé del carné de postulante y tengo que regresar a casa", etc.), todo esto hace que uno tome medidas anticipadas para tener la certeza o seguridad que el examen será bien rendido. Es, pues, muy importante entender, qué son situaciones negativas y qué son certezas, de ello hablaremos en el presente capítulo, desarrollándolo con muchos ejemplos.

CERTEZA

Es el conocimiento seguro de un evento, sin temor a equivocarse, es el proceso que realizamos, por la cual obtenemos el resultado de un problema con anticipación y ese resultado puede verificarse en la práctica.

SITUACIONES NEGATIVAS (casos desfavorables o en contra)

Son las situaciones contrarias a lo que buscamos, de acuerdo a la pregunta.

Para dar solución a los problemas de certezas, generalmente primero se analizan las situaciones negativas y luego se le añaden los elementos necesarios hasta dar solución al problema.

Ejemplo 1

En el bolsillo de mi casaca tengo 2 caramelos de limón y 2 de fresa, si se extrae de uno en uno ¿cuántos debo sacar al azar y como mínimo para invitarle a una amiga un caramelo si su preferido es el de limón?

Resolución:

Si la pregunta es obtener un caramelo de limón, la situación negativa es obtener un caramelo que no sea de limón.

Observamos que, evidentemente, debemos sacar 3; porque si sacamos 1 ó 2, éstos pueden ser del sabor no preferido por ella (situación negativa), por lo tanto, sacamos uno más.

Ejemplo 2

En una rifa se han hecho 1000 boletos y hay tres premios en sorteo. ¿Cuántos boletos se debe comprar para tener la certeza de obtener un premio?

Resolución:

Si la pregunta es obtener uno de los premios.

La situación negativa es de obtener un boleto no premiado.

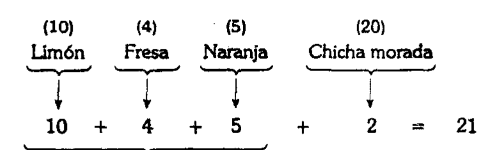
Al comprar todos los boletos supuestamente no premiados y un número más, o sea: 997+1, obtengo un premio con certeza. Luego, se debe comprar 998 números.

Ejemplo 3

Pedro desea obtener con seguridad, por lo menos, 2 caramelos de chicha morada; si en la fuente de golosinas hay 10 de limón, 4 de fresa, 5 de naranja y 20 de chicha morada, si extrae de uno en uno ¿cuántos debe extraer al azar y como mínimo para obtener su propósito?

Resolución:

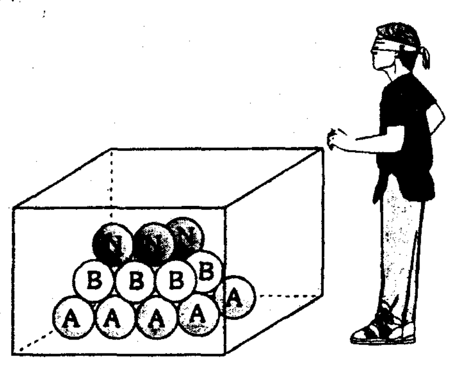
Para tener seguridad, tenemos que suponer que al extraer los caramelos ocurre primero las situaciones negativas; es decir, que primero se extraigan los caramelos que no son de chicha morada y que, después de ello, recién extraemos los 2 caramelos de chicha morada. Así:



∴ Se deben extraer, como mínimo, 21 caramelos.

Ejemplo 4

En una urna se tienen 3 esferas negras, 4 blancas y 5 azules. ¿Cuántas esferas se deben extraer al azar de uno en uno y como mínimo para estar seguros de haber extraído por lo menos:



a. Una esfera azul.
b. Una esfera negra.
c. Una blanca o una negra.
d. Dos azules.
e. Dos de igual color.
f. Tres del mismo color.
g. Dos de diferente color.
h. Tres de diferentes colores.
i. Una blanca y una azul.
j. Dos blancas y dos azules.
k. Todas las blancas.
l. Un grupo completo.

Resolución:

Utilizando el criterio de analizar las situaciones negativas en primer lugar, de modo que se garanticen los resultados esperados, tenemos que:

a. Si queremos 1 azul, un caso de infortunio es que nos resulten de cualquier color, excepto el buscado, hasta agotar todas las situaciones negativas.

Así: 3N + 3B + 1A = 7

∴ Se deben extraer, como mínimo, 7 esferas.

b. Similarmente, como en el anterior, un caso extremo de infortunio es el siguiente resultado, buscando una esfera negra:

$$5A + 4B + \textcircled{1N} = 10$$

∴ Se deben extraer, como mínimo, 10 esferas.

c. El resultado que exprese el peor de los casos (se busca 1B o 1N) es el siguiente:

$$5A + \textcircled{1} = 6$$

(Con seguridad será blanca o negra)

∴ Se deben extraer, como mínimo, 6 esferas.

d. Buscamos 2 esferas azules, entonces un caso extremo será: extraer todas las negras, todas las blancas y luego las 2 azules.

$$3N + 4B + \textcircled{2A} = 9$$

∴ Se deben extraer, como mínimo, 9 esferas.

e. Buscamos 2 esferas iguales, entonces el peor de los casos es que en principio salgan diferentes, así:

$$1B + 1N + 1A + \textcircled{1} = 4$$

(Completa el par de esferas iguales)

∴ Se deben extraer, como mínimo, 4 esferas.

f. Buscamos 3 esferas iguales, entonces el peor de los casos es que vayan saliendo hasta 2 iguales en todos los colores, así:

$$2B + 2N + 2A + \textcircled{1}$$

(Completa con cualquiera de las anteriores un grupo de 3 iguales)

∴ Se deben extraer, como mínimo, 7 esferas.

g. Buscamos 2 esferas diferentes, entonces, el peor de los casos es que nos resulten en principio todos los iguales de aquel color que tengo mayor cantidad de esferas, así:

5A + ① ← Completo con 1 de los azules las 2 esferas diferentes que buscamos

∴ Se deben extraer, como mínimo, 6 esferas.

h. Buscamos 3 esferas diferentes, entonces el peor de los casos es que en principio nos resulten todos iguales hasta en dos grupos completos que tengan mayor cantidad de esferas, así:

$\underbrace{5A + 4B}_{\text{Hasta aquí no tenemos 3 diferentes}} + \text{(1N)} = 10$ ← Completo 3 diferentes

∴ Se deben extraer 10 bolas, como mínimo.

i. Obtener 1 esfera blanca y 1 esfera azul es nuestro objetivo, entonces el peor de los casos sucede cuando salen:

3N + 5A + (1B) = 9 ← Completa 1 azul y 1 blanca

∴ Se deben extraer, como mínimo, 9 esferas.

j. Buscamos 2 blancas y 2 azules, entonces el peor de los casos sucede cuando extraemos:

3N + 5A + (2B) = 10 ← Completa 2 blancas y 2 azules

∴ Se deben extraer, como mínimo, 10 esferas.

k. Buscamos todos los blancos, el peor de los casos sucede cuando nos resulten así:

5A + 3N + (4B) = 12 ← Completar todas las blancas

∴ Se deben extraer, como mínimo, 12 esferas; es decir, todas las esferas.

l. Buscamos un grupo completo, entonces el peor de los casos sucede cuando en principio nos resulten grupos "casi completos", o sea:

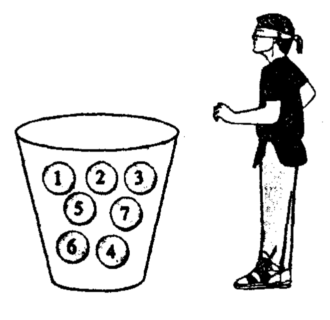
$\underbrace{4A + 3B + 2N}_{\text{Hasta aquí ningún grupo está completo}} + ①$ ← Esta esfera compone el grupo completo en uno de los 3 colores

∴ Se deben extraer, como mínimo, 10 esferas.

Ejemplo 5

Se tiene en una urna fichas numeradas del 1 al 7. ¿Cuántas fichas debemos extraer de uno en uno en total y sin ver, para estar seguros de haber extraído fichas cuya numeración sea mayor o igual que 4?.

Resolución:



Sería mucha fortuna obtener en la primera extracción una de las fichas pedidas (4, 5, 6, 7), pero es poco probable que esto ocurra, por ello para estar seguro de lograrlo debemos superar todos los "inconvenientes", suponiendo que estamos en el peor de los casos. Debemos pensar, por ejemplo, que en un principio nos salieron las fichas no deseadas; (1, 2, 3), luego de esto estaremos seguros de obtener como siguiente ficha extraída una de las deseadas, es decir, el 4 o el 5 o el 6 o el 7.

∴ Para estar seguros hay necesidad de extraer:

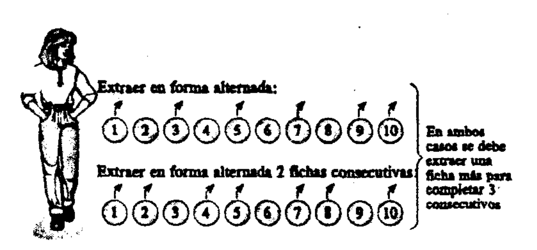
3 + 1 = 4 fichas, por lo menos.

Ejemplo 6

Zoila tiene en una urna 10 fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que ha de extraer de uno en uno para tener la seguridad de haber extraído 3 fichas numeradas consecutivamente?

Resolución:

Sería una gran suerte si en las primeras extracciones nos resulten 3 fichas con números consecutivos, pero no es seguro; para garantizar el resultado, debemos ponernos en el peor de los casos (aquél caso que dilate más el momento en que se logre el objetivo), entonces habría 2 casos finalmente para analizar:



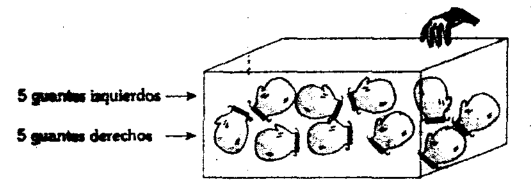
Se observa, entonces, que el segundo es el peor de los casos (7 ya extraídos y uno más que falta)

∴ Se debe extraer, como mínimo, 8 esferas.

Ejemplo 7

Se tiene en una urna 5 pares de guantes negros y se empiezan a extraer una por una. Si se quiere estar seguro de haber extraído un par de guantes utilizables, ¿cuántos se deben extraer como mínimo?.

Resolución:



Nuestro objetivo es obtener:

$\begin{cases} \text{1 guante negro (derecho)} \\ \text{1 guante negro (izquierdo)} \end{cases}$

luego, sería mucha suerte si con las dos primeras extracciones lográsemos nuestro objetivo, pero nada nos asegura ello; sin embargo, para garantizar el resultado esperado (1 guante derecho y el otro izquierdo), debemos ponernos en el peor caso de infortunio, es decir, extraer en principio todos los guantes de un sólo lado, así:

$\underbrace{\text{1ras. 5 extracciones}}_{\text{5 guantes derechos}} + \underbrace{\text{6ta. extracción}}_{\text{1 guante izquierdo}} = 6$

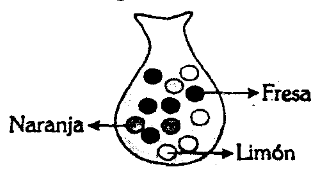
↓

Con seguridad, completo el par de guantes utilizables

∴ Se deben extraer 6 guantes, como mínimo.

PROBLEMA 1

En una bolsa se tiene 5 caramelos de fresa, 4 de limón y 3 de naranja. Se debe extraer cierto número de caramelos de uno en uno al azar. ¿Cuál es la cantidad mínima que se debe extraer para obtener con seguridad uno de cada sabor?



Resolución:

Como queremos uno de cada sabor, el peor de los casos es que primero nos resulten 5 de fresa, luego 4 de limón y por último 1 que deberá ser de naranja.

$\therefore 5 + 4 + 1 = 10$

PROBLEMA 2

Del problema anterior, ¿cuántas debemos extraer como mínimo para obtener con certeza 3 caramelos de fresa?.

Resolución:

Como queremos 3 de fresa, el peor de los casos es que primero nos resulte de otros sabores y finalmente los de fresa, o sea:

4 limón + 3 naranja + 3 fresa = 10

PROBLEMA 3

Se tiene un grupo de 10 hombres y 8 mujeres de los cuales se elige uno por uno al azar. ¿Cuántas elecciones se tendrán que realizar, como mínimo, para tener la seguridad de que entre los elegidos se encuentre:

a. Un hombre
b. Una pareja mixta

Resolución:

Hay 10 hombres y 8 mujeres

a. Como deseamos elegir un hombre, entonces el peor de los casos es que en primer lugar nos resulten las 8 mujeres (todas) y posteriormente el hombre.

   $\therefore 8M + 1H = 9$

b. Como queremos una pareja mixta (1 hombre y 1 mujer), entonces pesimistamente diremos que, en primer lugar, nos resulten del mismo sexo y de la mayor cantidad, o sea los 10 hombres y luego una mujer.

   $\therefore 10H + 1M = 11$

PROBLEMA 4

En una caja hay 12 fichas azules, 15 blancas 18 verdes y 20 rojas. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que se deben sacar de uno en uno para tener la certeza de haber extraído 10 de uno de los colores?

Resolución:

Como deseamos 10 fichas de un mismo color (cualquiera); entonces el peor de los casos es que nos vayan resultando 9 de cada uno de los 4 colores, así:

9 azules + 9 blancos + 9 verdes + 9 rojos + $\underbrace{1}$ = 37

Cualquier color completará el grupo de 10 iguales

PROBLEMA 5

En una urna se tienen 10 esferas verdes, 8 esferas azules, 6 esferas celestes y 4 esferas blancas. ¿Cuántas debemos extraer de uno en uno como mínimo para obtener con seguridad 3 esferas de cada color?

Resolución:

El peor de los casos es que primero salga de aquel color que tiene mayor cantidad de esferas, se completen 3 (como nos piden) y continúen saliendo, todavía, todos los que queden de ese color, luego se extrae del color que le sigue en cantidad (azules) y así:

10 verdes + 8 azules + 6 celestes + 3 blancos = 27

Con seguridad contienen 3 esferas c/u.

PROBLEMA 6

De la pregunta anterior, ¿cuántas debemos extraer como mínimo para obtener con seguridad 5 esferas de cada color, en 3 de los colores dados?.

Resolución:

Basándonos en la resolución del problema anterior, el peor de los casos es que nos resulten así:

4 blancas	+	10 verdes	+	8 azules	+	5 celestes = 27
↓		↓		↓		↓
No completa los 5 iguales		por lo menos 5 iguales		por lo menos 5 iguales		5 iguales

∴ Se debe extraer como mínimo 27 esferas.

PROBLEMA 7

En una caja hay 15 borradores, 1 de color A, 2 de color B, 3 de color C, 4 de color D y 5 de color E. ¿Cuántos borradores se deben extraer de uno en uno, al azar y como mínimo para tener la certeza de haber extraído un borrador de cada color?

Resolución:

Como del color A existe solamente un borrador; hay necesidad de sacar todos entonces, porque este borrador en el peor de los casos puede ser el último en salir para completar, por los menos, uno de cada color, es decir:

$$5E + 4D + 3C + 2B + 1A = 15$$

PROBLEMA 8

En un cartapacio hay 10 borradores, 10 tajadores y 10 lapiceros; ¿cuántos útiles se deben extraer, como mínimo, para tener la seguridad de haber extraído 2 borradores y 3 tajadores?.

Resolución:

El peor de los casos es que nos resulten en primer lugar, los lapiceros (puesto que no es lo que deseamos), así:

10 lapiceros	+	10 borradores	+ 3 tajadores = 23
↓		↓	
puesto que no nos piden		contiene por lo menos 2 borradores	

PROBLEMA 9

En una caja hay 25 canicas del mismo tamaño, pero de diferentes colores: 5 azules, 5 blancas, 5 celestes, 5 verdes y 5 negras. ¿Cuántas canicas se deben extraer al azar y, como mínimo, para tener la certeza de haber extraído 4 de color azul y 4 de color negro?

Resolución:

Como queremos obtener 4 azules y 4 negros, entonces, el peor de los casos sucede cuando en primer lugar nos resulten de colores distintos a nuestro objetivo, así:

5 blancos + 5 celestes + 5 verdes + 5 azules + 4 negros = 24

Ninguno de estos colores nos piden (5 blancos, 5 celestes, 5 verdes); Por lo menos hay 4 azules; 4 negros

$\therefore$ Como mínimo, se debe extraer 24 canicas.

PROBLEMA 10

En una caja hay 10 pares de guantes de color blanco y 5 pares de guantes de color negro.

a. ¿Cuántos guantes se deben extraer, como mínimo, para tener con seguridad un par de guantes blancos utilizables?

b. ¿Cuántos guantes se deben extraer, como mínimo, para tener la certeza de obtener un par de guantes negros y un par de guantes blancos utilizables?

Resolución:

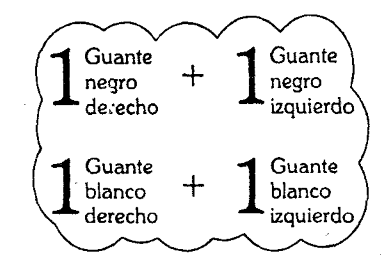
a. Queremos un par de guantes blancos utilizables (un guante blanco derecho y un guante blanco izquierdo); luego, el peor de los casos sucede cuando en principio sacamos todos los guantes negros y luego comienzan a salir guantes blancos, pero de un mismo lado, así:

5 Guantes negros derechos + 5 Guantes negros izquierdos + 10 Guantes blancos derechos + 1 Guante blanco izquierdo

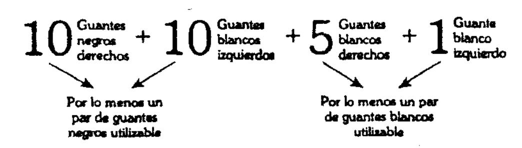
(10 Guantes blancos derechos + 1 Guante blanco izquierdo): Por lo menos un par de guantes blancos utilizable

$\therefore$ Se debe extraer, como mínimo, 21 guantes.

b. Queremos:



Luego, manejando el peor de los casos (dilatando al máximo el momento en que se obtenga el resultado esperado), tenemos:



$\therefore$ Se debe extraer 26 guantes, como mínimo

PROBLEMA 11

De 5 fichas rojas, 4 azules y 9 blancas, ¿Cuál es el mínimo número de fichas que se deben extraer para tener la certeza de haber obtenido un grupo completo.

Resolución:

El peor de los casos sucede cuando en principio vayamos sacando grupos "casi completos", así:

8 blancos + 4 rojos + 3 azul + (1)

(1): esta ficha completa un grupo en uno de los 3 colores

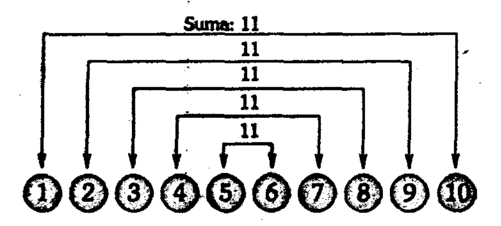
$\therefore$ Se deben extraer 16 fichas, como mínimo.

PROBLEMA 12

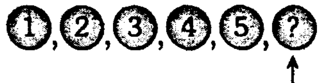
Se tienen fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es el menor número de fichas que se deben extraer para estar seguro de haber obtenido por lo menos 2 fichas cuya suma sea 11?

Resolución:

Sabemos, por el tema de sucesiones aritméticas que la suma de términos equidistantes de los extremos suman un mismo resultado, así:



El peor de los casos sucede cuando en primer lugar extraemos una ficha de cada una de las parejas cuya suma es 11, así por ejemplo:



Completará con cualquiera de las extraídas; una pareja cuya suma es 11

∴ Se deben extraer, 6 como mínimo.

PROBLEMA 13

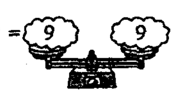
Se tiene 81 esferas de mismo color y tamaño, pero una de ellas es un poco más pesada que las otras, que sí tienen el mismo peso. Encontrar la esfera más pesada, disponiendo de una balanza de 2 platillos; ¿cuántas pesadas como mínimo debe hacerse?

Resolución:

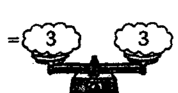
Se divide el total de esferas en tres grupos iguales.

81 =

En uno de estos grupos está la más pesada, (1era. Pesada)

Suponiendo que éste es el grupo más pesado 27 = 

En uno de estos grupos está la más pesada, (2da. Pesada)

Suponiendo que éste es el grupo más pesado 9 = 

En uno de estos grupos está la más pesada, (3era. Pesada)

Uno de estos será la bolita más pesada, (4ta. Pesada)

∴ Debe hacerse 4 pesadas, como mínimo.

PROBLEMA 14

Una caja grande contiene 20 cajas medianas; a la vez, cada una de estas medianas, o bien contienen 10 cajas pequeñas, o no contiene caja alguna. ¿Cuántas cajas vacías hay si en total se han contado 15 cajas llenas?

Resolución:

De las condiciones se deduce que las 15 cajas llenas son: 1 grande + 14 medianas

⇒ Las cajas vacías son:

6 medianas + 10(14) pequeñas (contenidas en las 14 medianas)

⇒ 6 + 140 = 146 cajas vacías

PROBLEMA 15

En una caja hay 6 pares de guantes negros y 8 pares de calcetines rojos. ¿Cuál es el menor número de extracciones, de 1 en 1 y al azar, que se debe realizar para obtener con seguridad un par de guantes utilizable y un par de calcetines utilizable.

Resolución:

Analizando, el peor de los casos que dilata al máximo el proceso es cuando, en principio, salgan todos los calcetines (16) y luego los guantes, así:

$$16 \text{ calcetines} + 6 \begin{matrix}\text{guantes}\\\text{derechos}\end{matrix} + 1 \begin{matrix}\text{guante}\\\text{izquierdo}\end{matrix} = 23$$

∴ Se deben realizar 23 extracciones, como mínimo.

PROBLEMA 16

Un kilogramo de manzanas contiene entre 12 y 13 manzanas; ¿cuál es el mayor peso que puede tener 13 docenas de manzanas?.

Resolución:

1Kg. → 12manz. ⇒ 13doc. → 13Kg.

1Kg. → 13manz. ⇒ 13doc. → 12Kg.

∴ El mayor peso contenido en 13 docenas de manzanas es 13 kg.

PROBLEMA 17

Una caja contiene 8 esferas blancas, 6 azules, 9 negras y 5 rojas. ¿Cuántas esferas, como mínimo, se deben extraer al azar para tener la certeza de obtener, al menos, 3 bolitas de un mismo color en 3 de los cuatro colores?

Resolución:

(8) blancas, (6) azules, (9) negras, (5) rojas

$$8 + 2 + 9 + 2 + 1 = 22$$

8 + 9: situación negativa 2 colores (mayor cantidad de esferas)

2: Completa un grupo según la condición del problema

∴ Como mínimo, se deben extraer 22 esferas.

PROBLEMA 18

Se tiene 30 pares de medias blancas y 30 pares de medias negras. ¿Cuántas medias se deben extraer, como mínimo y al azar, para tener por lo menos un par de medias blancas?

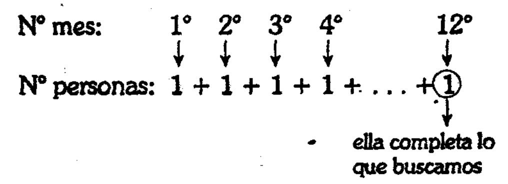
Resolución:

Negras → 60, Blancas → 2

$$60 + 2 = 62$$

PROBLEMA 19

Cuantas personas deben estas reunidas, como máximo, para tener 2 con el mismo mes de cumpleaños?



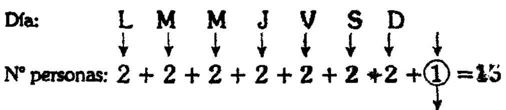
Resolución:

El peor caso ocurre cuando se reúnen personas que hayan nacido cada una de ellas en cada uno de los 12 meses del año, y luego con una persona más ya se tendría la certeza de que hayan 2 personas con el mismo mes de cumpleaños, luego:

PROBLEMA 20

¿Cuántas personas deben estar reunidas, como mínimo, para tener 3 con el mismo día de la semana en la fecha de su cumpleaños?

Resolución:



ella necesariamente nació un día de la semana, con ella se completa las 3 personas que han nacido el mismo día

CIFRAS TERMINALES

En el desarrollo del presente tema nos dedicaremos exclusivamente a calcular la última cifra o cifras del resultado de un número que va a ser expuesto a sucesivas operaciones para ello debemos tener en cuenta algunos aspectos teóricas basadas en la inducción.

También debemos tener presente los conceptos básicos de la teoría de exponentes, potenciación, adición, sustracción, etc. De esta manera la resolución de los problemas será más rápida y sencilla.

CIFRAS TERMINALES PARA NÚMEROS QUE TERMINEN EN: 0, 1, 5 y 6 elevados a exponentes naturales

En estos casos la cifra terminal será la última cifra del número base.

$$\left.\begin{matrix}(\ldots 0)^n = \ldots 0 & (\ldots 5)^n = \ldots 5 \\ (\ldots 1)^n = \ldots 1 & (\ldots 6)^n = \ldots 6\end{matrix}\right\} n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1

$11^2 = 121 \rightarrow 1$ $\quad 10^2 = 100 \rightarrow 0$

$21^2 = 441 \rightarrow 1$ $\quad 20^2 = 400 \rightarrow 0$

$5^2 = 25 \rightarrow 5$ $\quad 6^2 = 36 \rightarrow 6$

$15^2 = 225 \rightarrow 5$ $\quad 16^2 = 256 \rightarrow 6$

$25^2 = 625 \rightarrow 5$ $\quad 26^2 = 676 \rightarrow 6$

Ejemplo 2

Hallar la cifra terminal del desarrollo total en:

$$A = 1990^7 + 1991^{20} + 1995^{35} + 1996^{44}$$

'esolución:

$(1990)^7 = (\ldots 0)^7 = \ldots 0$ $\quad (1991)^{20} = (\ldots 1)^{20} = \ldots 1$

$(1995)^{35} = (\ldots 5)^{35} = \ldots 5$ $\quad (1996)^{44} = (\ldots 6)^{44} = \ldots 6$

Reemplazando en A:

$$A = \ldots 0 + \ldots 1 + \ldots 5 + \ldots 6 = \ldots 2$$

Ejemplo 3

Hallar en que cifra termina el desarrollo de M:

$$M = 111^{444^{555}} + 666^{777^{888}}$$

Resolución:

$$M = \ldots 1 + \ldots 6 = \ldots 7$$

$\therefore$ M termina en 7.

CIFRAS TERMINALES PARA NÚMEROS QUE TERMINAN EN: 4 y 9 elevados en exponentes naturales

Aquí notaremos que la última cifra del desarrollo dependerá de la naturaleza par o impar del exponente.

Observemos:

$$\left.\begin{matrix}4^{①} = 4 \\ 4^2 = 16 \\ 4^{③} = 64 \\ 4^4 = 256 \\ \vdots \quad \vdots\end{matrix}\right\} \begin{matrix}(\ldots 4)^{IMPAR} = \ldots 4 \\ (\ldots 4)^{PAR} = \ldots 6\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}9^{①} = 9 \\ 9^2 = 81 \\ 9^{③} = 729 \\ 9^4 = 6561 \\ \vdots \quad \vdots\end{matrix}\right\} \begin{matrix}(\ldots 9)^{IMPAR} = \ldots 9 \\ (\ldots 9)^{PAR} = \ldots 1\end{matrix}$$

Resumiendo:

$$\begin{pmatrix}\ldots 4 \\ \ldots 9\end{pmatrix}^{IMPAR} = \begin{matrix}\ldots 4 \\ \ldots 9\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}\ldots 4 \\ \ldots 9\end{pmatrix}^{PAR} = \begin{matrix}\ldots 6 \\ \ldots 1\end{matrix}$$

CIFRAS TERMINALES PARA NÚMEROS QUE TERMINAN EN 5 Y ELEVADOS A EXPONENTES NATURALES.

Aquí notaremos que las dos últimas cifras del desarrollo será siempre 25 para cualquier exponente natural.

$15^2 = 225$
$25^2 = 625$
$35^2 = 1225$ (× 4)

En general

$(N5)^2 = \ldots 25$ (× (N+1))

Ejemplo 1

En qué cifra termina el desarrollo de: $A=794^{2346}$

Resolución:

$$794^{\overset{\text{Par}}{2346}} = (\ldots 4)^{\text{Par}} = \ldots 4$$

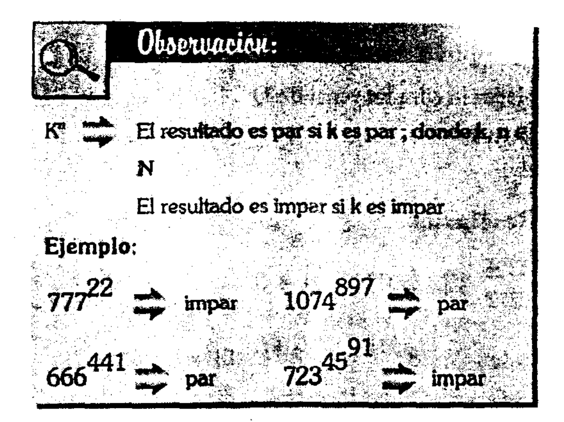
∴ A termina en 4.

Ejemplo 2

Hallar la cifra terminal de A:

$$A = 9999^{2222^{555^{333}}}$$

Resolución:


Observación:

K^n ⇒ El resultado es par si k es par ; donde k, n ∈ N

El resultado es impar si k es impar

Ejemplo:

777^{22} ⇒ impar 1074^{897} ⇒ par

666^{441} ⇒ par $723^{45^{91}}$ ⇒ impar

Analizando el exponente de 9999 se observa que es par

$$\overset{\text{Par}}{2222}^{555^{333}} \Rightarrow \text{El resultado es par}$$

Luego, tenemos:

$$A = 9999^{\text{PAR}} = \ldots 1$$

∴ A termina en 1.

CIFRAS TERMINALES PARA NÚMEROS QUE TERMINAN EN: 2, 3, 7 y 8 elevados a exponentes naturales

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^{④} = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^{⑧} = 256$
⋮

$(\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}} = \ldots 6$

$3^1 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^{④} = 81$
$3^5 = 243$
$3^6 = 729$
$3^7 = 2187$
$3^{⑧} = 6561$
⋮

$(\ldots 3)^{\overset{\circ}{4}} = \ldots 1$

Se observa que para exponentes consecutivos, las cuatro primeras cifras terminales son diferentes; luego, las cuatros siguientes cifras terminales son iguales a las cuatro primeras, y cada grupo de cuatro se repiten las mismas cifras terminales.

Por ejemplo:

$$(\ldots 2)^7 = (\ldots 2)^{4 \cdot 3} = (\ldots 2)^3 = \ldots 8$$

$$(\ldots 2)^{30} = (\ldots 2)^{\overset{\circ}{4} \cdot 2} = (\ldots 2)^2 = \ldots 4$$

Esto es, sólo para el cálculo de la cifra terminal.

$$\left.\begin{array}{ll} 7^1 = & 7 \\ 7^2 = & 49 \\ 7^3 = & 343 \\ 7^{④} = & 2401 \\ 7^5 = & 16807 \\ 7^6 = & 117649 \\ 7^7 = & 823543 \\ 7^{⑧} = & 5764801 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} (\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}} = \ldots 1$$

$$\left.\begin{array}{ll} 8^1 = & 8 \\ 8^2 = & 64 \\ 8^3 = & 512 \\ 8^{④} = & 4096 \\ 8^5 = & 32768 \\ 8^6 = & 262144 \\ 8^7 = & 2097152 \\ 8^{⑧} = & 16777216 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} (\ldots 8)^{\overset{\circ}{4}} = \ldots 6$$

Ejemplo 1

En qué cifra termina el desarrollo de: A

$$A = 27472^{97}$$

Resolución:

Busquemos que relación existe entre el exponente y el $\overset{\circ}{4}$.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 4 \\ 17 & 24 \\ 1 & \end{array} \quad \therefore\ 97 = \overset{\circ}{4} + 1$$

$$\Rightarrow A = (\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}+1} = (\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}} (\ldots 2)^1$$

$$= (\ldots 6)(\ldots 2) = \ldots 2$$

Ejemplo 2

En qué cifra termina el desarrollo de M.

$M = (4443)^{9763}$

Resolución:

Analizando el exponente:

$$\begin{array}{r|l} 63 & 4 \\ 23 & 15 \\ 3 & \end{array} \quad \Rightarrow\ 63 = \overset{\circ}{4} + 3$$

$$\therefore\ M = (\ldots 3)^{\overset{\circ}{4}+3} = (\ldots 3)^{\overset{\circ}{4}} (\ldots 3)^3$$

$$= (\ldots 1)(\ldots 7) = \ldots 7$$

Ejemplo 3

Hallar la cifra terminal de **P**.

$$P = (\overline{ADUNI97})^{\overline{CV99}}$$

Resolución:

Analizando el exponente:

$$\begin{array}{r|l} 99 & 4 \\ 19 & 24 \\ 3 & \end{array} \quad \Rightarrow\ \overline{CV99} = \underbrace{\overline{CV00}}_{\overset{\circ}{4}} + \underbrace{99}_{\overset{\circ}{4}+3}$$

$$\underbrace{\overset{\circ}{4} + \overset{\circ}{4}}_{\overset{\circ}{4}} + 3$$

$$\overset{\circ}{4} + 3$$

$$\Rightarrow P = (\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}+3} = (\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}} (\ldots 7)^3 = (\ldots 1)(\ldots 3)$$

$$= \ldots 3$$

$\therefore$ La cifra terminal es 3

Ejemplo 4

Hallar la cifra terminal de Q

$Q = 98^{20011}$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ 3 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow\ 20011 = \overset{\circ}{4} + 3$$

$$\therefore\ Q = (\ldots 8)^{\overset{\circ}{4}+3} = (\ldots 8)^{\overset{\circ}{4}} (\ldots 8)^3 = (\ldots 6)(\ldots 2)$$

$$Q = \ldots 2$$

Problemas Resueltos

PROBLEMA 1

En qué cifra termina el desarrollo de A:

$$A=(111)^{222}+(222)^{333}+(444)^{444}+(555)^{666}$$

Resolución:

$(\ldots 1)^{222} = \ldots 1$

$(\ldots 2)^{333} = (\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}+1}(\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}}(\ldots 2) = \ldots 2$

$(\ldots 4)^{444} = (\ldots 4)^{PAR} = \ldots 6$

$(\ldots 5)^{666} = \ldots 5$

$\Rightarrow$ $A = \ldots 1 + \ldots 2 + \ldots 6 + \ldots 5 = \ldots 4$

$\therefore$ A termina en **4**.

PROBLEMA 2

Halle la cifra terminal del desarrollo de M:

$$M = \overline{RM99}^{\overline{ab2}} + \overline{RV66}^{\overline{MAP}} + \overline{AD44}^{242}$$

Resolución:

$(\ldots 9)^{\overline{ab2}} = \ldots 1$

$(\ldots 6)^{\overline{MAP}} = \ldots 6$

$(\ldots 4)^{242} = (\ldots 4)^{\overset{\circ}{4}+2} = (\ldots 4)^{\overset{\circ}{4}}(\ldots 4)^2 = \ldots 6$

$\Rightarrow$ $M = \ldots 1 + \ldots 6 + \ldots 6$

$\therefore$ $M = \ldots 3$

PROBLEMA 3

En qué cifra termina el desarrollo de A:

$$A = 6^{2^{2^{100}}} + 3^{3^{4}}$$

Resolución:

$6^{2^{2^{100}}} = \ldots 6$

$3^{3^4} = 3^{81} = (\ldots 3)^{\overset{\circ}{4}+1} = (\ldots 3)^{\overset{\circ}{4}}(\ldots 3)^1 = \ldots 3$

$\therefore A = \ldots 6 + \ldots 3 = \ldots 9$

PROBLEMA 4

Halle la cifra terminal de desarrollo de A

$$A = 999999999^{888888888^{77777777^{666666}}}$$

Resolución:

Analizando el exponente del número base

$$\underbrace{88888888}_{\text{Par}}{}^{7777777^{666666}} = \text{par}$$

$\Rightarrow$ El resultado para el exponente, será un número par.

$\therefore A = (\ldots 9)^{par} = \ldots 1$

PROBLEMA 5

Halle la cifra terminal del desarrollo de F:

$$F = 444444444^{55555555^{6666666^{\overline{ADUNI}}}}$$

Resolución:

Analizando el exponente del número base:

$$\underbrace{55555555}_{\text{Impar}}{}^{6666666^{\overline{ADUNI}}} = \text{impar}$$

$\Rightarrow$ El resultado para el exponente, será un número impar.

$\therefore F = (\ldots 4)^{Impar} = \ldots 4$

PROBLEMA 6

Halle la última cifra del desarrollo total en:

$$A = 997^{\overline{ab42}} + 998^{\overline{CV97}} + 999^{\overline{ADUNI1}}$$

Resolución:

$$(\ldots 7)^{\overline{ab42}} = (\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}+2} = (\ldots 7)^2 = \ldots 9$$

$$(\ldots 8)^{\overset{\circ}{4}+1} = (\ldots 8)^1 = \ldots 8$$

$$(\ldots 9)^{\overline{ADUNI1}} = (\ldots 9)^{\text{Impar}} = \ldots 9$$

$$\therefore A = \ldots 9 + \ldots 8 + \ldots 9 = \ldots 6$$

La última cifra es 6.

PROBLEMA 7

Halle la última cifra del desarrollo de:

$$A = \overline{BERTOLT99}^{\overline{SMP2}} + \overline{BRECHT12}^{\overline{SMP43}}$$

Resolución:

$$(\ldots 9)^{\overline{SMP2}} = (\ldots 9)^{\text{Par}} = 1$$

$$(\ldots 2)^{\overline{SMP43}} = (\ldots 2)^{\overset{\circ}{4}+3} = (\ldots 2)^3 = \ldots 8$$

$$\therefore A = \ldots 1 + \ldots 8 = \ldots 9$$

La última cifra es 9.

PROBLEMA 8

Halle la cifra terminal del desarrollo de.

$$A = \frac{2^{19} \times 3^{77} \times 7^{999}}{4^8 \times 3^{60} \times 49^{121}}$$

Resolución:

Acomodando adecuadamente para obtener bases iguales y simplificando tendremos:

$$A = \frac{2^{19} \times 3^{77} \times 7^{999}}{(2^2)^8 \times 3^{60} \times (7^2)^{121}} = \frac{2^{19} \times 3^{77} \times 7^{999}}{2^{16} \times 3^{60} \times 7^{242}}$$

$$= 2^3 \times 3^{17} \times 7^{757}$$

Luego analizamos cada factor:

$$2^3 = 8$$

$$3^{17} = 3^{\overset{\circ}{4}+1} = 3^1 = \ldots 3$$

$$7^{757} = 7^{\overset{\circ}{4}+1} = 7^1 = \ldots 7$$

$$\therefore A = 8 \times (\ldots 3) \times (\ldots 7) = \ldots 8$$

La cifra terminal es 8.

PROBLEMA 9

En qué cifra termina el desarrollo de A:

$$A = \overline{LUMBRERAS97}^{99} + \overline{EDITAL44}^{2n+1} + \overline{ADUNI98}^{8n+22} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

$$(\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}+3} = (\ldots 7)^3 = \ldots 3$$

$$(\ldots 4)^{\overbrace{2n+1}^{\text{impar}}} = \ldots 4$$

$$(\ldots 8)^{\overset{\circ}{4}+2} = (\ldots 8)^2 = \ldots 4$$

$$\therefore A = \ldots 3 + \ldots 4 + \ldots 4 = \ldots 1$$

PROBLEMA 10

Calcule la suma de cifras del resultado de A:

$$A = \left[\frac{99^2 + 77^2 - (88^2 + 66^2)}{\overline{(a-8)a} - a}\right]^2$$

Resolución:

$$A = \left[\frac{9^2 \times 11^2 + 7^2 \times 11^2 - (8^2 \times 11^2 + 6^2 \times 11^2)}{\overline{(a-8)a} - a}\right]^2$$

$$A = \left[\frac{11^2(9^2 + 7^2 - 8^2 - 6^2)}{\overline{(9-8)9} - 9}\right]^2$$

$$A = \left[\frac{11^2 \times 30}{10}\right]^2 = [11^2 \times 3]^2 = 131769$$

$\therefore$ **La suma de cifras de 131769 es 27.**

PROBLEMA 11

En qué cifra termina el desarrollo de la siguiente división.

$$A = \frac{2^{10} \times 3^5 \times 7^4 \times 6^5}{12^5 \times 2^7}$$

Resolución:

$$A = \frac{2^{10} \times 3^5 \times 7^4 \times 3^5 \times 2^5}{(2^2 \times 3)^5 \times 2^7}$$

$$A = \frac{\cancel{2^{10}} \times \cancel{3^5} \times 7^4 \times 3^5 \times \cancel{2^5}}{\cancel{2^{10}} \times \cancel{3^5} \times \cancel{2^7}}$$

$$A = \frac{7^4 \times 3^5 \times 5^2}{2^2 \times 5^2}$$

$$A = \frac{7^4 \times 3^5 \times 5^2}{100} = \frac{\ldots 5}{100} = \ldots \underline{5}$$

$\therefore$ La cifra en que termina dicho desarrollo es 5.

PROBLEMA 12

En qué cifra termina el desarrollo de la siguiente expresión:

$$L = (\underbrace{999\ldots999}_{n \text{ cifras}})^{2n+1} \text{ ; donde } n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

$$L = (\ldots 9)^{2n+1} = (\ldots 9)^{\text{impar}} = \ldots 9$$

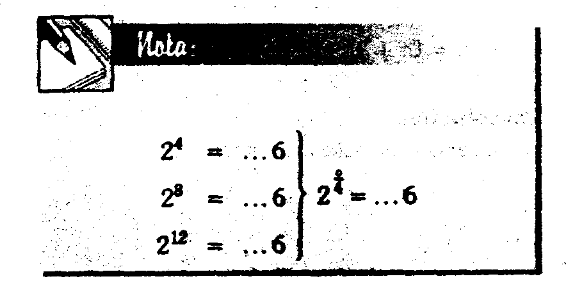
$\therefore$ "L" termina en 9.

PROBLEMA 13

La siguiente expresión:

$2^{2^n} + 1$, donde n toma valores positivos, da origen a los números conocidos como "números de Fermat". ¿En qué cifra termina la suma de los 10 primeros números de Fermat?

Resolución:



$$\left.\begin{array}{l} 2^4 = \ldots 6 \\ 2^8 = \ldots 6 \\ 2^{12} = \ldots 6 \end{array}\right\} 2^{\overset{\circ}{4}} = \ldots 6$$

$$2^{2^1} = 2^2 + 1 = 5$$

$$2^{2^2} = 2^4 + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^3} = 2^8 + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^4} = 2^{16} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^5} = 2^{32} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^6} = 2^{64} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^7} = 2^{128} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^8} = 2^{256} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^9} = 2^{512} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

$$2^{2^{10}} = 2^{1024} + 1 = \ldots 2^{\overset{\circ}{4}} + 1 = \ldots 6 + 1 = \ldots 7$$

Para hallar en qué cifra termina la suma de los 10 primeros números de Fermat, sumamos las cifras terminales de los mismos, así:

$$5 + 7(9) = \ldots 8$$

$\therefore$ La suma termina en 8.

PROBLEMA 14

Calcule la cifra terminal del valor de la siguiente serie:

$$S = 0! + 1! + 2! + 3! + \ldots + 99!$$

Resolución:

Calculando los factoriales tenemos:

0!:	=	1+
1!:	=	1
2!:	=	2
3!:	=	6
4!:	=	24
5!:	=	120
6!:	=	720
7!:	=	6040
8!:	=	0
9!:	=	0
10!:	=	0
⋮		⋮
99!	=	0
S	=	 4

∴ La cifra terminal es 4.

PROBLEMA 15

Halle la suma de las 3 últimas cifras del desarrollo de:

$$A = (\ldots 376)^2 + (\ldots 376)^3 + (\ldots 376)^4 + (\ldots 376)^5 + \ldots + (\ldots 376)^{10}$$

Resolución:

Primero observamos lo siguiente:

$(\ldots 376)^2 = (\ldots 376)(\ldots 376) \Rightarrow$

```
 ...376 ×
 ...376
 ------
 ...256
  ..632
  .128
 ------
 ...376
```

∴ $(\ldots 376)^2 = \ldots 376$

Analizando: $(\ldots 376)^3$

Tenemos:

$$(\ldots 376)^3 = \underbrace{(\ldots 376)^2}_{(\ldots 376)} \times (\ldots 376)^1 = (\ldots 376)^2 = \ldots 376$$

Análogamente para $(\ldots 376)^4$

$$(\ldots 376)^4 = \underbrace{(\ldots 376)^2}_{\ldots 376} \times \underbrace{(\ldots 376)^2}_{\ldots 376} = (\ldots 376)^2 = \ldots 376$$

∴ Podemos observar y sacar una conclusión en este ejercicio

$(\ldots 376)^n = \ldots 376$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Resolviendo la pregunta:

$$A = \overbrace{\underbrace{(\ldots 376)^2}_{\ldots 376} + \underbrace{(\ldots 376)^3}_{\ldots 376} + \underbrace{(\ldots 376)^4}_{\ldots 376} + \ldots + \underbrace{(\ldots 376)^{10}}_{\ldots 376}}^{\text{Hay 9 sumandos}}$$

$A = (\ldots 376) \times 9 = \ldots 384$

∴ La suma de las 3 últimas cifras es:

$3 + 8 + 4 = 15$

PROBLEMA 16

Halle los 2 cifras terminales de A:

$$A = 1005^2 + 2005^2 + 3005^2 + \ldots + 9005^2$$

Resolución:

Sabemos que el cuadrado de todo número entero positivo siempre termina en 25.

$$\left.\begin{array}{l} 5^2 = 25 \\ 15^2 = 225 \\ 25^2 = 625 \end{array}\right\} (\ldots 5)^2 = \ldots 25$$

Luego:

$$\therefore A = \overbrace{\ldots 25 + \ldots 25 + \ldots 25 + \ldots + \ldots 25}^{\text{9 términos}}$$

$A = (\ldots 25) \times 9 = \ldots 25$

Las 2 cifras terminales son 2 y 5.

PROBLEMA 17

En cuántos ceros termina el desarrollo de:

$5^{20} \times 3^{77} \times 2^{18} \times 7^{9}$

Resolución:

$$A = 5^{18} \times 2^{18} \times \underbrace{5^{2} \times 3^{77} \times 7^{9}}_{n}$$

$A = 10^{18} \times n$, donde $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow A = \overline{n\underbrace{000\ldots000}_{18\text{ ceros}}}$$

El desarrollo termina en 18 ceros.

PROBLEMA 18

Halle la última cifra del período en el desarrollo decimal de $\frac{1}{7^{23}}$

Resolución:

Aquí tenemos que recordar que dicha fracción originará un decimal periódico puro por que la base en el denominador es 7.

$$\frac{1}{7^{23}} = 0,\widehat{\ldots x}$$

Nos piden hallar la última cifra del período, es decir, x.

Para esto vemos que: $7^{23} = 7^{\overset{\circ}{4}+3} = 7^{3} = \ldots 3$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ldots 3} = \frac{\overline{\ldots x}}{\ldots 9}$$

$$\underbrace{(1)(\ldots 9)} = (\ldots 3)(\overline{\ldots x})$$

$$\ldots 9 = (\ldots 3)(\overline{\ldots x})$$

$$x \downarrow 3$$

$\therefore\ x = 3$

PROBLEMA 19

En cuántos ceros termina el producto total en:

$$A = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots \times 50$$

Resolución:

Debemos tener en cuenta que los ceros dependen de los factores 2 y 5 que al multiplicarse originan un cero, entonces sólo analizaremos dichos factores; sin embargo, de ellos debemos tomar en consideración los factores 5, pues los números que tienen factores 2 son más abundantes.

$$1\times2\times3\times4\times\underline{5}\times6\ldots\times\underline{10}\ldots\ 15\times\ldots\times\underline{20}\ldots\times 25$$

(5 → $\underline{5}\times 1$; 10 → 5×2; 15 → $\underline{5}\times 3$; 20 → 5×4; 25 → $\underline{5}\times\underline{5}$)

$$\ldots\times\underline{30}\times\ldots\times 35\times\ldots\underline{40}\times\ldots 45\times\underline{50}$$

(30 → 5×6; 35 → $\underline{5}\times 7$; 40 → 5×8; 45 → $\underline{5}\times 9$; 50 → 5×10)

contemos los factores 5: hay 6;

contemos los ceros que ya aparecen: son 5

$\therefore$ **Número de ceros en que termina el resultado:**

$$5 + 6 = 11$$

PROBLEMA 20

Halle x sabiendo que: $0,\widehat{ab\ldots x} = \frac{2}{117^{97}}$

Resolución:

$$0,\widehat{ab\ldots x} = \frac{2}{(\ldots 7)^{\overset{\circ}{4}+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{ab\ldots x}}{99\ldots 9} = \frac{2}{(\ldots 7)^{1}}$$

$$\frac{\overline{ab\ldots x}}{\ldots 9} = \frac{2}{\ldots 7}$$

$$\Rightarrow (\ldots 7)(\overline{ab\ldots x}) = (\ldots 9)\times 2$$

$$(\ldots 7)(\overline{ab\ldots x}) = \ldots 8$$

$$x \downarrow 4$$

$\therefore\ x = 4$

Problemas Propuestos

CERTEZAS

1. En una caja hay 10 pares de medias blancas y 12 pares de medias negras. ¿Cuál es el menor número de medias que se deben extraer de manera que se obtengan con seguridad un par de medias utilizables?

A) 2 B) 3 C) 10
D) 5 E) 4

2. De la pregunta anterior, ¿cuántas medias debemos extraer, como mínimo, para obtener 5 pares de medias negras?

A) 30 B) 25 C) 28
D) 31 E) 32

3. En una caja hay 10 esferas amarillas, 12 azules y 15 verdes. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se debe extraer al azar de manera que se obtengan 10 de un mismo color?

A) 30 B) 29 C) 27
D) 26 E) 28

4. En un monedero se tiene 10 monedas de S/.1; 25 monedas de S/.0,50 y 30 monedas de S/.0,20. ¿Cuántas se deben extraer al azar y como mínimo para obtener al menos 10 del mismo valor en 2 de los 3 valores?

A) 39 B) 48 C) 52
D) 49 E) 65

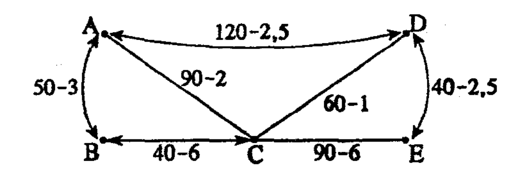
5. En un cajón hay 6 esferas rojas y 6 esferas blancas. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se han de sacar para tener la seguridad de haber extraído 3 del mismo color?

A) 4 B) 5 C) 7
D) 8 E) 6

6. En una caja hay 10 esferas blancas, 8 azules y 5 rojas. ¿Cuál es el mínimo número de esferas que se han de extraer para tener la seguridad de haber extraído, por lo menos, uno de cada color?

A) 16 B) 19 C) 21
D) 20 E) 18

7. Según el diagrama, siendo el primer número la longitud en km y el segundo el costo en soles por cada km recorrido; ¿cuál es el menor costo del recorrido desde A hasta E?



A) S/.320 B) S/.350 C) S/.340
D) S/.280 E) S/.345

8. En un cajón hay 24 esferas rojas, 20 blancas y 25 amarillas, 8 negras, 14 verdes y 10 azules. ¿Cuál es el menor número de esferas que se han se sacar para tener la seguridad de haber extraído, por lo menos, 12 esferas de 3 colores?

A) 90 B) 98 C) 76
C) 82 E) 96

9. Del problema anterior, ¿cuál es el mínimo números de esferas que hay que sacar para tener la seguridad de haber extraído un color por completo?

A) 93 B) 94 C) 102
D) 96 E) 95

10. En una caja hay 5 pares de medias azules y 8 pares de medias negras. ¿Cuántas medias como mínimo se deberán extraer para que, entre las medias extraídas, se encuentren:

a. Un par de medias del mismo color

b. Un par de medias utilizable.

A) 4 , 3 B) 3 , 4 C) 3 , 3
D) 5 , 3 E) 3 , 5

11. En una urna se tiene 10 esferas verdes, 8 blancas y 12 rojas. Se extraen al azar una por una; ¿cuántas se deben extraer, como mínimo, para estar seguro de tener 6 esferas de un mismo color?

A) 13 B) 16 C) 12
D) 11 E) 10

12. Si m peras pesan entre n y s gramos inclusive ($n < s$); ¿cuál es el máximo número de peras que pueden haber en t kilogramos?

A) $\frac{1000tm}{n}$ B) $\frac{1000tm}{m+n}$ C) $\frac{1000mt}{t+m}$
D) $\frac{1000m}{t+n}$ E) $\frac{1000mn}{t}$

13. Un grupo de 456 personas va a elegir un presidente. Si se presentan 5 candidatos para el puesto, ¿cuál es el menor número de votos que se puede obtener uno de ello y lograr así más que cualquiera de los otros 4?

A) 78 B) 90 C) 91
D) 92 E) 89

14. A la orilla de un río se encuentra un campesino con una canoa, una cabra, un lobo hambriento y un paquete de alfalfa. ¿Cuántas veces, como mínimo, debe cruzar el río, si en la canoa sólo entran 2 elementos?.

A) 7 B) 12 C) 8
D) 6 E) 5

CIFRAS TERMINALES

15. Halle la cifra terminal de A:

$$A = (9971+2345)^{9999^{8}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

16. Halle la cifra terminal de M.

$$M = (2777^2 + 1993^3 + 1435^6) \times 92^5$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

17. En qué cifra termina A.

$$A = (88888)^{77777} + (99999)^{22222} + 5^{2^{3^{4^{7}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

18. Halle la cifra terminal de: A

$$A = \overline{PERU99}^{\overline{ADUNI95}^{\overline{CV99}}}$$

A) 1 B) 3 C) 6
D) 5 E) 9

19. Halle la cifra terminal en el desarrollo total de A.

$$A = 999 \times 888 \times 777 \times 666 \times 222$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

20. En qué cifra termina el desarrollo de:

$$3237^{91246} - 428792^{266643}$$

A) 6 B) 8 C) 4
D) 2 E) 7

21. Halle la última cifra significativa al resolver:

$$(8700070)^{92746} + (81200000)^{266643}$$

A) 6 B) 8 C) 4
D) 9 E) 7

22. En cuántos ceros termina el desarrollo de:

$$(\overline{ADUNI99\underbrace{000\ldots0}_{x\ veces}})^{y}$$

A) $x + y$ B) xy C) y
D) $x - y$ E) $y - x$

23. En qué cifra termina la parte periódica del desarrollo decimal $\dfrac{1}{83}$

A) 3 B) 7 C) 9
D) 1 E) 2

24. En qué cifra termina el producto de:

$$A = 63_{(7)} \times 63_{(8)} \times 63_{(9)} \times \ldots \times 63_{(64)}$$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 6

25. Si: $4N = \ldots 548$; $3N = \ldots 661$
Halle la suma de las 3 últimas cifras de 4111N.

A) 10 B) 12 C) 9
D) 13 E) 16

26. Halle x

$$3^{47} + 62^{97} + 35^{\overline{ab2}^{3}} = \overline{\ldots x}$$

A) 1 B) 4 C) 5
D) 3 E) 6

27. Halle:

$$A = 0{,}982081 + 0{,}017838 + 0{,}000081$$

A) 1 B) 2 C) 0,81
D) 0,7 E) 0,83

28. Halle x

$$\overline{ab4}^{\overline{ab5}} + \overline{mn9}^{\overline{mn0}} + \overline{ab1}^{\overline{ab2}} + \overline{ab6}^{\overline{ab7}} = \overline{\ldots x}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

29. Halle las dos últimas cifras del desarrollo de A:

$$A = 1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 999!$$

A) 43 B) 37 C) 13
D) 34 E) 00

30. Halle la suma de las tres últimas cifras de:

$$1376^{2376^{3376}} + 2376^{3376^{4376}} + 3376^{4376^{5376}}$$

A) 11 B) 12 C) 8
D) 9 E) 16

31. Halle la última cifra del desarrollo de:

$$99999^{888^{77^{66}}}$$

A) 1 B) 2 C) 0
D) 6 E) 5

32. Halle la cifra terminal de:

$$77^{96^{44^{33^{22}}}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 7 E) 9

33. Halle a+b

$$2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times 98 = \sqrt[8]{\overline{\ldots ab00}}$$

A) 0 B) 2 C) 7
D) 10 E) 6

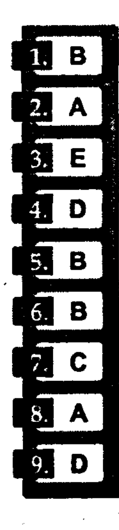
34. Halle la cifra terminal del desarrollo de:

$$A = 1! \times 2! \times 3! \times 4! \times 5! \times \ldots \times 99! + 44444^{9! \times 8! \times 7! \times \ldots \times 1!} + 777799!$$

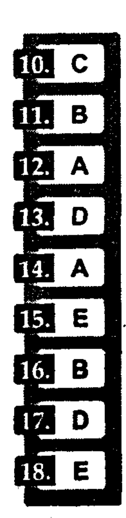
A) 6 B) 4 C) 7
D) 8 E) 3

Claves

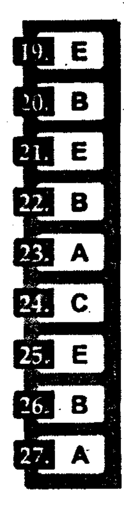
Problemas propuestos



1. B
2. A
3. E
4. D
5. B
6. B
7. C
8. A
9. D



10. C
11. B
12. A
13. D
14. A
15. E
16. B
17. D
18. E



19. E
20. B
21. E
22. B
23. A
24. C
25. E
26. B
27. A

28. B
29. C
30. A
31. A
32. A
33. A
34. A

Diógenes

Cuando hablemos de matemática no olvidemos a quienes despreciaron esta disciplina. Es el caso de Diógenes, llamado el Cínico, quien vivió entre el 413 y el 323 a. de C.; gran burlador de los hombres y sus costumbres.

Nos relata su vida un tocayo suyo, Diógenes Laercio, por quien nos enteramos que el Cínico fue de origen que hoy llamaríamos burgués, –como que su padre era nada menos que banquero– pero padre e hijo vinculados a la delincuencia, pues fueron acusados de falsificar moneda, por lo cual padecieron pena de destierro.

Diógenes rechazaba la Geometría, la Música y la Astrología como inútiles, inservibles y dañinas.

Su vida tuvo los altibajos del destino que incluyeron –según Laercio– el haber sido vendido como esclavo, aunque "esclavo" tan egregio que eligió a su propio comprador, Xeníades, diciendo: "Vendedme a ése, que necesita un amo". El señalado lo compró llevándolo consigo a Corinto, en donde Diógenes se convirtió en el preceptor de los hijos y el administrador de los bienes de su aparente dueño.

Su amplio sentido del humor y sarcasmo le hizo decir y hacer cosas notables, desde proclamarse ciudadano del mundo, a escupirle en la cara a un amigo que le había pedido no salivara su hermosa mansión, salvo en sitio apropiado.

Insiste Laercio que Diógenes solía andar con linterna buscando siempre un hombre, y que, a veces los llamaba a gritos, pero en cuanto alguno aparecía, exclamaba: "¡He llamado hombres, y no heces!"

Este despreciador de la matemática solía pedir dinero a sus amistades, pero no en concepto de préstamo, sino como un derecho propio, circunstancia que no le impidió llegar a viejo con toda felicidad. Caminaba descalzo sobre la nieve y los guijarros, vituperaba a los descifradores de sueños: "No se conmueven por lo que hacen despiertos y andan ocupándose de lo que imaginan dormidos". No está mal. A un joven muy acicalado, lo exhortaba a desnudarse para ver si era hombre o mujer; cuando los funcionarios llevaban detenido a quien robara del erario público, decía: "Los grandes ladrones se llevan al pequeño". A veces quisieron ofenderlo –cuenta siempre Laercio–, como en cierta ocasión en que le arrojaron unos huesos del banquete al que asistía; Diógenes, con toda calma, se acercó a los convidados "y les orinó encima, como hacen los perros".

Su menosprecio hacia la matemática lo sostenía en un casi aforismo: "Miran al sol y la luna, y no ven las cosas que tienen a los pies". Ni Platón se salvó de sus burlas. Habiendo definido éste al hombre como un bípedo implume, un día le largó un gallo desplumado en la Escuela, afirmando: "Éste es tu hombre".

Sostenía que las rameras eran reinas de los reyes por cuanto recibían de éstos cuanto pedían, y viendo unas mujeres ahorcadas de un olivo, rogó porque "todos los árboles trajesen ese fruto". Cuando le preguntaron qué era lo más miserable de la vida, respondió: "Un viejo pobre".

Cuentan que murió pasado los 90 años, reteniendo la respiración o mordido por los perros; sus amigos se disputaron –que parece que los tuvo y muchos–, por levantarle sepultura digna. Columnas de mármol y estatuas de bronce se construyeron sobre la tumba de este despreciador de la matemática. Tuvo epitafio preciso:

Caducan aún los bronces con el tiempo;
mas no podrán, Diógenes, tu gloria
sepultar las edades, pues tú sólo
supiste enseñar a los mortales felicidad de vida
y a la inmortalidad ancho camino.

"El mundo de las matemáticas"
Volumen I. Ediciones Oceáno-Éxito S.A.